۱- در یک کلاس حداقل چند دانش‌آموز باید موجود باشد تا دست کم اسامی چهار نفر از آن

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چون تعداد حروف الفبای فارسی برابر ۳۲ می‌باشد بنابراین طبق اصل لانه کبوتری خواهیم داشت: $۳۲ \times ۳ + ۱ = ۹۷$ = حداقل تعداد مطلوب

نکته‌ی درسی: اصل لانه کبوتری به صورت زیر است:

اگر m کبوتر بخواهند در n لانه قرار گیرند با فرض $m > n$ و با فرض این که لانه‌ای یافت می‌شود که در آن حداقل $\left[\frac{m}{n}\right] + ۱$ کبوتر قرار گرفته باشند.

۲- n عدد طبیعی متمایز موجود است. حداقل مقدار n چقدر باشد تا اطمینان یابیم که حداقل ۳ عدد مابین آن‌ها موجود است که دارای رقم یکان یکسانی بوده و در تقسیم بر ۳ نیز باقی‌مانده‌های یکسانی دارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۱ ۴) ۹۱

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. رقم یکان هر عدد طبیعی یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ... و ۹ است که تنوع آن‌ها برابر ۱۰ است از طرفی باقی‌مانده‌های تقسیم بر ۳ اعداد طبیعی نیز یکی از ارقام ۰ و ۱ و ۲ است که تنوع آن‌ها برابر ۳ است. پس تنوع اعداد طبیعی از نظر رقم یکان و باقی مانده‌ی تقسیم بر ۳ برابر $۳۰ = ۱۰ \times ۳$ است. یعنی در بدترین حالت، ۳۰ عدد طبیعی متمایز می‌توان یافت که حداقل در یکی از ویژگی‌های رقم یکان یا باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۳ با هم متفاوت هستند. بنابراین اگر بخواهیم در میان n عدد طبیعی حداقل ۳ عدد قطعاً یافت شود که هم رقم یکان آن‌ها یکسان باشند و هم باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ با هم برابر باشند، طبق اصل لانه کبوتری باید حداقل $۳۰ \times ۲ + ۱ = ۶۱$ عدد طبیعی داشته باشیم.

۳- کدام گزینه یک قضیه کلی است؟

۱) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت.

۲) مجموع مکعب‌های n عدد متوالی با شروع از یک ، برابر است با مربع مجموع آن‌ها.

۳) اگر n نقطه اختیاری روی محیط یک دایره انتخاب کرده و n ضلعی حاصل و قطرهای آن را رسم کنیم، به $۲^{n-۱}$ ناحیه تقسیم می شود.

۴) اگر x,y دو عدد گنگ باشند، x^y نیز عددی گنگ است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مثال نقض برای گزینه‌ی۱: عدد ۸

مثال نقض برای گزینه‌ی۳: $n = ۶$ (صفحه‌ی۲۱ کتاب جبر و احتمال)

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴:

$$\left.\begin{matrix} x=۲^{\sqrt{۲}} & \text{گنگ} \\ y=\sqrt{۲} & \text{گنگ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^y = \left(۲^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = ۲^۲ = ۴ \quad \text{گویاست}$$

گزینه‌ی ۲ همیشه برقرار است.

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

۴- یک کد ۱۰۰ رقمی از کنار هم قرار گرفتن ۱۲ رقم یک و ۸۸ رقم صفر ایجاد شده است. بزرگ‌ترین عدد n که قطعاً بتوان ادعا کرد «حداقل n رقم صفر به‌طور متوالی در کنار یک‌دیگر قرار دارند»، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با قرار دادن ۱۲ رقم یک در این کد ۱۰۰ رقمی، ۱۳ مکان برای قرار دادن ردیف‌هایی از صفر ایجاد می‌شود. با توجه به این‌که ۸۸ رقم صفر موجود است و $۶ \times ۱۳ < ۸۸$ و $۷ \times ۱۳ > ۸۸$، پس می‌توان به‌طور قطع ادعا کرد حداقل ۷ رقم صفر به‌طور متوالی در کنار یک‌دیگر قرار دارند.

۵- ۶۵ کبوتر در حدّاکثر چند لانه کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد؟

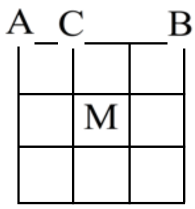
۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا کبوترها را ۲ به ۲ به لانه‌ها می‌فرستیم که ۳۲ لانه احتیاج داریم. حال اگر ۱ کبوتر مانده به یکی از لانه‌ها بفرستیم، در یک لانه بیش از ۲ کبوتر داریم.

۶- ده نقطه داخل مربعی به ضلع ۳ واحد مفروضند، حداقل فاصله ۲ نقطه از این ده نقطه کم‌تر از .... است.

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۳

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



ابتدا مربع را به ۹ مربع کوچک و مساوی تقسیم می‌کنیم (هر ضلع را سه قسمت می‌کنیم) بدیهی است که از بین ۱۰ نقطه، حداقل دو نقطه هستند که در یکی از این مربع‌های کوچک قرار می‌گیرند و می‌دانیم که در هر مربع بزرگ‌ترین اندازه‌ی فاصله‌ی دو نقطه، اندازه‌ی قطر است:

$$AB = ۳ \Rightarrow AC = ۱ \Rightarrow AM = \sqrt{۲}$$

۷- برای آن که در یک کلاس به یقین حداقل ۵ نفر وجود داشته باشند که در یک ماه از سال متولد شده باشند حداقل چند نفر دانش‌آموز لازم داریم؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۴۹ ۴) ۶۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم ۱۲ ماه داریم، در پخش‌ترین حالت در هر ماه ۴ نفر قرار می‌دهیم، طبق اصل لانه کبوتر اگر حداقل ۴۹ نفر در یک کلاس باشند، حداقل ۵ نفر از آنها در یک ماه متولد شده‌اند.

۸- ۱۵۲ کبوتر حداکثر در چند لانه کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از سه کبوتر قرار داشته باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۵۱

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.تعداد لانه‌ها را n می‌گیریم. برای آنکه حداقل در یک لانه بیش از سه کبوتر قرار گیرد، باید تعداد کبوترها از ۳ برابر تعداد لانه‌ها اکیداً بزرگ‌تر باشد:

$$۱۵۲ > ۳n \Rightarrow n < \frac{۱۵۲}{۳} \Rightarrow n < ۵۰/۶۶ \Rightarrow n \leqslant ۵۰ \Rightarrow n_{\text{حداکثر}} = ۵۰$$

نکته‌ی درسی:

۱) اصل لانه کبوتر: اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ی کبوترها باشد، $(m>n)$، آنگاه طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.

۲) تعمیم: اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از k برابر تعداد لانه کبوترها باشد، $(m>kn)$، آنگاه طبق تعمیم اصل لانه کبوتر، حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم $k+۱$ یا بیشتر از $k+۱$ کبوتر در آن قرار داشته باشند.

۹- در اثبات نامساوی $۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\ldots+\frac{۱}{n^۲}<۲-\frac{۱}{n}$ ، با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

۱) $k+۲>k+۱$ ۲) $۲k-۱>k+۱$ ۳) $k^۲+k>k^۲+۱$ ۴) $k^۲+k+۱>k^۲+k$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرض}: P(k): ۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\ldots+\frac{۱}{k^۲}<۲-\frac{۱}{k}$$

$$\text{حکم} \Rightarrow P(k+۱): ۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\ldots+\frac{۱}{(k+۱)^۲}<۲-\frac{۱}{k+۱}$$

به طرفین فرض عبارت $\frac{۱}{(k+۱)^۲}$ را اضافه می‌کنیم.

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\ldots+\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}<۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)}$$

پس کافی است ثابت شود که

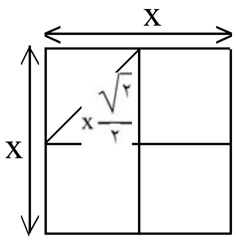
$$۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}<۲-\frac{۱}{k+۱}\Rightarrow \frac{۱}{(k+۱)^۲}<\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\Rightarrow \frac{۱}{(k+۱)^۲}<\frac{۱}{k(k+۱)}\Rightarrow k^۲+۲k+۱>k^۲+k$$

$$\Rightarrow k+۱>k$$

با توجه به این که نامساوی بدیهی فوق به صورت مستقیم در گزینه‌ها وجود ندارد تنها گزینه‌ی (۱) است که می‌تواند هم‌آرزی با این نامساوی باشد، یعنی $k+۲>k+۱$

۱۰- در یک مربع با طول ضلع x ، ۹ نقطه را به هر صورت که قرار دهیم، حداقل ۳ نقطه فاصله‌شان کمتر از ۴ می‌شود. x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵/۷ ۲) ۵/۶ ۳) ۵/۸ ۴) ۵/۹



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اگر مربع را به چهار ناحیه‌ی برابر تقسیم کنیم، طبق اصل لانه کبوتری با قرار گرفتن ۹ نقطه درون مربع بزرگ لااقل در یکی از ناحیه‌ها بیش از دو نقطه قرار می‌گیرد. لذا قطر مربع کوچک $\left(x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ حتماً کمتر از ۴ است.

یعنی $x\frac{\sqrt{۲}}{۲} < ۴$ پس $x < \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \approx ۵/۶۴$ لذا فقط گزینه‌ی ۲ قابل قبول است.

۱۱- اگر a عددی گنگ باشد، کدام یک از اعداد زیر حتماً گنگ است؟

۱) $\frac{a+۱}{a-۱}$ ۲) $a-\frac{۱}{a}$ ۳) $a^۲-a$ ۴) $\sqrt{a^۲+۱}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\frac{a+۱}{a-۱}$ گویا باشد، بنابراین $\frac{a+۱}{a-۱}=\frac{p}{q}$

بنابراین: $\frac{a+۱}{a-۱}=\frac{p}{q} \Rightarrow aq+q=ap-p \Rightarrow a(p-q)=q+p \Rightarrow a=\frac{p+q}{p-q}$

و این با فرض مسأله که a گنگ است در تناقض است. برای رد گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ باید مثال نقض بزنیم. مثلاً اعداد $a=\sqrt{۲}-۱$ برای رد گزینه‌ی ۲ و $a=\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$ برای رد گزینه‌ی ۳ و $a=\sqrt{۸}$ برای رد گزینه‌ی ۴ کفایت می‌کند.

۱۲- درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

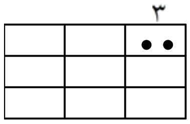
۱) حداقل ۲ نقطه از این ۱۰ نقطه فاصله کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ دارند.

۲) حداقل ۲ نقطه از ۱۰ نقطه فاصله‌ی کمتری از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ دارند.

۳) حداکثر۲ نقطه از ۱۰ نقطه فاصله‌ی کمتری از $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ دارند.

۴) حداکثر۲ نقطه از ۱۰ نقطه فاصله‌ی کمتری از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ دارند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مربع را به ۹ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، طبق اصل لانه کبوتر در یک مربع حداقل ۲ نقطه وجود است و قطر مربع ماکزیمم فاصله است.



$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲+\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=a^۲ \longrightarrow a=\frac{\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow \text{فاصله دو نقطه} < \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۳- حداقل چند عدد طبیعی در نظر بگیریم تا دست کم، ۴ عدد یافت شود که رقم یکان آن‌ها برابر باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم از ۰ تا ۹ برای یکان عدد داریم پس در پخش‌ترین حالت ۳بار از هرکدام برمی‌داریم، $۳\times ۱۰=۳۰$ حال اگر عدد سی‌ویکم را برداریم طبق اصل لانه کبوتر به خواسته مسئله می‌رسیم.

۱۴- اگر ۴۲ مهره درون ۹ خانه قرار گیرند، حداقل در یک خانه بیش از n مهره قرار می‌گیرد. حداقل مقدار ممکن برای n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. داریم: $۴۲ = ۹ \times ۴ + ۴$ پس لااقل در یک خانه بیش از ۴ مهره قرار می‌گیرد لذا مقدار ممکن برای n برابر با ۴ می‌باشد.

۱۵- کدام حکم زیر یک قضیه کلی است؟

۱) هر عدد اول فرد است.
۲) هر لوزی یک مستطیل است.
۳) هر مستطیل یک لوزی است.
۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. قضیه کلی، قضیه‌ای است که همواره تحت هر شرایطی درست است.
در گزینه اول ۲ عددی است زوج و اول، پس قضیه کلی نیست. در گزینه ۲ چون اضلاع مستطیل باید برهم عمود باشند و در لوزی الزاماً چنین نیست پس یک قضیه کلی نیست. در گزینه ۳ چون اضلاع باید با هم مساوی باشند و در مستطیل الزاماً چنین نیست پس یک قضیه کلی نیست. ولی در گزینه ۴ هر مثلث متساوی‌الاضلاع، شرایط مثلث متساوی‌الساقین را دارد پس یک قضیه کلی است.

۱۶- اگر گزاره‌ی $P(n): \frac{۱}{۲\times ۵} + \frac{۱}{۵\times ۸} + \frac{۱}{۸\times ۱۱} + ... + \frac{۱}{(۳n-۱)(۳n+۲)} = \frac{x}{۲(۳n+۲)}$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n برقرار باشد، آن گاه x کدام است؟

۱) n ۲) ۱ ۳) $۲n-۲$ ۴) $۲n-۱$

گزینه‌ی ۱ پاسخ درست است. به ازای $n = ۱$ مقدار x برابر ۱ می‌شود، پس گزینه‌ی ۳ رد می‌شود. به ازای $n = ۲$ مقدار x برابر ۲ می‌شود، پس گزینه‌های ۲ و ۴ نیز رد می‌شوند.
روش دوم:

$$\frac{۱}{۲\times ۵} + \frac{۱}{۵\times ۸} + \ldots\ldots + \frac{۱}{(۳n-۱)(۳n+۲)} =$$

$$\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۸}\right) + \ldots\ldots + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{(۳n-۱)(۳n+۲)}\right) =$$

$$\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۲} - \cancel{\frac{۱}{۵}} + \cancel{\frac{۱}{۵}} - \cancel{\frac{۱}{۸}} + \cancel{\frac{۱}{۸}} - \cancel{\frac{۱}{۱۱}} + \cancel{\ldots\ldots} + \cancel{\frac{۱}{۳n-۱}} - \frac{۱}{۳n+۲}\right]$$

$$= \frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳n+۲}\right] = \frac{n}{۲(۳n+۲)} \quad \Rightarrow \quad x = n$$

۱۷- هر زیرمجموعه n عضوی از $A = \{۱,۲,۳,۴,\ldots,۲۳\}$ به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می‌باشد، حداقل n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مجموعه‌ی داده شده را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

$\{(۱ , ۲۳) , (۲ , ۲۲) , (۳ , ۲۱) ,\ldots, (۱۱ , ۱۳) , ۱۲\}$

اگر ۱۳ عدد از این مجموعه انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ عدد مربوط به یک زوج مرتب هستند و حجم آن‌ها برابر ۲۴ است.

۱۸- اصل استقراء ریاضی در مورد حکم $P(n) : ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} < \frac{۵n}{۱۲}$ برای اعداد طبیعی $n \geqslant m$ برقرار است. کوچکترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} < \frac{(۵ \times ۴)}{۱۲} < \frac{۲۰}{۱۲}$ نادرست

$\frac{۲۵}{۱۲} + \frac{۱}{۵} < \frac{(۵ \times ۵)}{۱۲}$ نادرست

$\frac{۲۵}{۱۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} < \frac{(۵ \times ۶)}{۱۲} \Rightarrow \frac{(۱۲۵ + ۱۲ + ۱۰)}{۶۰} < \frac{۱۵۰}{۶۰}$ درست $\Rightarrow m = ۶$

۱۹- در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ حداقل چند نقطه در نظر بگیریم که فاصله‌ی آنها از $\frac{۱}{۴}$ کمتر گردد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۱ اگر هر ضلع مثلث به n قسمت تقسیم شود و آنها را به هم وصل می‌کنیم، $n^۲$ مثلث ایجاد می‌شود. پس کافی است حداقل $n^۲ + ۱$ نقطه در نظر بگیریم، تا حداقل دو نقطه یافت شود که فاصله‌ی آنها کمتر از $\frac{۱}{n}$ باشد. بنابراین در این مساله:

$n = ۴ \Rightarrow n^۲ + ۱ = ۱۷ \Rightarrow$ باید حداقل ۱۷ نقطه در نظر بگیریم

۲۰- مدرسه‌ای دارای n دانش‌آموز است. حداقل مقدار n چقدر باشد تا مطمئن شویم در آن مدرسه حداقل دو دانش‌آموز وجود دارند به طوری که هم حرف اول اسم و هم حرف اول نام خانوادگی آن دو یکسان باشد؟

۱) ۳۳ ۲) ۶۵ ۳) ۲۵۷ ۴) ۱۰۲۵

گزینه‌ی ۴ پاسخ درست است. تعداد حروف الفبای فارسی برابر ۳۲ می‌باشد. بنابراین اگر تعداد دانش‌آموزان $۳۲ \times ۳۲ + ۱$ یعنی ۱۰۲۵ باشد، به جواب مطلوب رسیده‌ایم.

۲۱- از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه نتیجه گرفته شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری کدام است؟

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) تمثیلی ۴) قیاسی

روش استدلال استقرایی است. در این روش، نتیجه گیری کلی براساس مجموعه محدودی از مشاهدات صورت می‌گیرد. چون تعداد محدودی میله بر اثر حرارت دادن افزایش یافته است، پس نتیجه شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود. پس نوع استدلال استقرایی است. و گزینه ۲ صحیح است.

۲۲- ۳۲ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل یک لانه، دارای ۳ کبوتر باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر $\frac{۳۲}{۲} = ۱۶$ لانه داشته باشیم، آن‌گاه در هر لانه دقیقاً ۲ کبوتر قرار می‌گیرد، بنابراین اگر ما حداکثر ۱۵ لانه داشته باشیم، آن‌گاه حداقل یک لانه بیش از دو کبوتر خواهد داشت.

۲۳- عکس کدام‌یک از حکم‌های زیر، درست است؟

۱) اگر $x = y$، آن‌گاه $\tan^{-۱} x = \tan^{-۱} y$ ۲) اگر $x = y$، آن‌گاه $\tan x = \tan y$

۳) اگر $x = y$، آن‌گاه $x^۲ - y^۲ = ۰$ ۴) اگر $x = y \neq ۰$، آن‌گاه $\frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y^۲}{x^۲} = ۲$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

عکس حکم (۱) به شکل «اگر $\tan^{-۱} x = \tan^{-۱} y$، آن‌گاه $x = y$» می‌باشد که با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع $f(x) = \tan^{-۱} x$، این حکم درست است.

عکس حکم (۲) به شکل «اگر $\tan x = \tan y$، آن‌گاه $x = y$» می‌باشد که نادرست است، مثلاً $\tan(\pi) = \tan(۰)$ ولی $\pi \neq ۰$.

عکس حکم (۳) به شکل «اگر $x^۲ - y^۲ = ۰$، آن‌گاه $x = y$» می‌باشد که نادرست است، مثلاً فرض کنید: $x = ۱$ و $y = -۱$.

عکس حکم (۴) به شکل «اگر $\frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y^۲}{x^۲} = ۲$، آن‌گاه $x = y$» می‌باشد که نادرست است، مثلاً فرض کنید: $x = ۱$ و $y = -۱$.

۲۴- تعداد m مداد رنگی در سه رنگ مختلف و سه اندازه متمایز در یک جعبه موجودند. m حداقل چند باشد تا مطمئن شویم در بین آنها دست کم ۸ مداد هم رنگ و هم اندازه وجود دارد؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۵ ۳) ۶۴ ۴) ۶۳

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اصل لانه کبوتری را دوبار به‌کار ببرید. بار اول سه رنگ را به عنوان لانه و بار دوم سه اندازه را به عنوان لانه در نظر بگیرید.

$۳ \times ۳ = ۹$ لانه $\rightarrow$ هر لانه را ۷ بار پر می کنیم: $۷ \times ۹ + ۱ = ۶۴$

۲۵- در یک مهمانی، از میان هر ۴ نفر، حداقل دو نفر وجود دارند که در روزهای متفاوتی از هفته به دنیا آمده‌اند. تعداد افراد حاضر در مهمانی حداکثر چند نفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به صورت سؤال، معلوم می‌شود که به ازای هر روز هفته حداکثر ۳ نفر وجود دارند که در آن روز به دنیا آمده باشند. لذا حداکثر تعداد افراد حاضر در مهمانی برابر است با: $۷ \times ۳ = ۲۱$

۲۶- یک نه ضلعی محدب حداکثر چند زاویه حاده داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

می‌دانیم در هر راس چند ضلعی محدب زاویه داخلی و زاویه خارجی تشکیل یک نیم صفحه را می‌دهند. اگر در یک رأس، زاویه داخلی حاده باشد، زاویه خارجی آن منفرجه است. پس تعداد زاویه حاده داخلی برابر با تعداد زاویه منفرجه خارجی است و چون مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ است در نتیجه تعداد زاویه‌های منفرجه خارجی کمتر از ۴ می‌باشد، پس حداکثر ۳ زاویه حاده داخلی داریم و گزینه ۳ صحیح است.

۲۷- قضیه زیر را در نظر بگیرید: «اگر n نقطه بر روی محیط یک دایره واقع باشند کلیه وترهایی که توسط این نقاط مشخص می‌شوند دایره را به $۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴}$ ناحیه تقسیم می‌کنند.»

این قضیه را با کدام‌یک از روش‌های زیر می توان اثبات کرد؟

۱) استدلال استقرایی ۲) استقراء ریاضی ۳) به طور شهودی ۴) اثبات بازگشتی

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اثبات این مسئله به روش استقراء ریاضی میسر است. با استدلال استقرایی و درک شهودی نمی‌توان اثباتی برای یک مسئله ارائه کرد. اثبات بازگشتی هم با توجه به نوع مسئله در اینجا کارساز نیست.

۲۸- اگر $\frac{An+B}{۲n+۱} = \frac{۱}{۱\times ۳} + \frac{۱}{۳\times ۵} + \dots + \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}$ باشد، $A+B$ برابر است با:

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: $n=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۱\times ۳} = \frac{A+B}{۳} \Rightarrow A+B=۱$

روش دوم: می دانیم $\frac{۱}{(۲n-۱)\,(۲n+۱)} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\right]$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right) + \dots + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{n}{۲n+۱}$$

$$\begin{cases} A=۱ \\ B=۰ \end{cases}$$

۲۹- حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $\{۱۲, ۱۰, ۸, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل یکی بر دیگری بخش‌پذیر است؟

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۳

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌های روبه‌رو را در نظر می‌گیریم: $\{۲, ۴, ۸\}$, $\{۳, ۶, ۱۲\}$, $\{۵, ۱۰\}$
اعضای هر مجموعه به این صورت هستند که هر دو عضو دلخواه از آن‌ها را که در نظر بگیریم، یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. اگر این مجموعه‌ها را لانه‌ها در نظر بگیریم، برای آن‌که حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار گیرند، حداقل ۴ کبوتر باید داشته باشیم، یعنی، حداقل ۴ عضو باید انتخاب کنیم.

۳۰- اگر ۴۷ مهره را در n خانه به همه روش‌های ممکن جاگذاری کنیم، همواره در یک خانه بیش از ۴ مهره قرار می‌گیرد. حداکثر مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۲   ۳) ۱۱   ۴) ۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر در هر خانه چهار مهره قرار گیرد، باید باز هم مهره یا مهره‌هایی باقی بماند تا با قرار گرفتن در خانه‌ها، لااقل یک خانه وجود بیش از ۴ مهره را ایجاب کند. لذا در تقسیم ۴۷ بر n باید باقیمانده مخالف صفر باشد. پس داریم: $۴۷ = ۴\times n + r$ و $۰ < r < n$ که از اینجا حداکثر مقدار n برابر ۱۱ می‌تواند باشد.

۳۱- اصل استقراء ریاضی در مورد حکم « $p(n):۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{n}<\frac{۵n}{۱۲}$ » برای اعداد طبیعی $n \geqslant m$ برقرار است، کوچکترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ‏ ‏ ‏ ۲) ۵ ‏ ‏ ‏ ۳) ۶ ‏ ‏ ‏ ۴) ۷

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{n}=\frac{n!+\frac{n!}{۲}+\frac{n!}{۳}+...+\frac{n!}{n}}{n!}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=۴:\frac{۲۴+۱۲+۸+۶}{۲۴}=\frac{۵۰}{۲۴}=\frac{۲۵}{۱۲}>\frac{۲۰}{۱۲} \\ n=۵:\frac{۱۲۰+۶۰+۴۰+۳۰+۲۴}{۲۴}=\frac{۲۷۴}{۱۲۰}>\frac{۲۵}{۱۲} \\ n=۶:\frac{۷۲۰+۳۶۰+۲۴۰+۱۸۰+۱۴۴+۱۲۰}{۷۲۰}=\frac{۲۹/۴}{۱۲}<\frac{۳۰}{۱۲} \end{cases}$$

که مقادیر ۴ و ۵ برای n غیر قابل قبول می‌باشند و تنها مقدار $n=۶$ قابل قبول است. بنابراین گزینه ۳، صحیح است.

۳۲- کدام عدد نمی‌تواند حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی باشد؟

۱) ۲۴ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱۲۰ ‏ ‏ ‏ ۳) ۷۲ ‏ ‏ ‏ ۴) ۳۶۰

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی مضرب ۲۴ می‌باشد که همه گزینه‌ها چنین هستند و از طرفی حاصل‌ضرب چهار عدد متوالی بعلاوه‌ی ۱ مربع کامل است.

$$n\times(n+۱)\times(n+۲)\times(n+۳)+۱=\left(n^{۲}+۳n\right)\left(n^{۲}+۳n+۲\right)+۱=$$
$$k^{۲}+۲k+۱=(k+۱)^{۲}$$

۳۳- در یک میهمانی حداقل چند نفر حضور داشته باشند تا دست کم چهار نفر از آنها در یک روز هفته و یک فصل از سال متولد شده باشند؟

۱) ۸۴ نفر ‏ ‏ ‏ ۲) ۱۱۲ نفر ‏ ‏ ‏ ۳) ۸۵ نفر ‏ ‏ ‏ ۴) ۱۱۳ نفر

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تعداد لانه‌های کبوتر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: ۷ روز هفته و۴ فصل سال: لذا $۲۸=۴\times۷$ لانه داریم. پس در هر کدام ۳ کبوتر قرار می‌دهیم و سپس ۱ کبوتر به کل کبوترها اضافه می‌کنیم تا دست‌کم یک لانه دارای ۴ کبوتر یا بیشتر باشد: $۸۵=۱+۳\times۲۸$

۳۴- اگر مجموع عده‌ی اضلاع و عده‌ی اقطار یک چندضلعی کوژ برابر ۲۱ باشد، عده‌ی اضلاع آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

اگر n تعداد اضلاع یک n ضلعی کوژ باشد، تعداد اقطار آن برابر با $\frac{n(n-۳)}{۲}$ می‌باشد. بنابراین طبق صورت مسئله :

$$n + \frac{n(n-۳)}{۲} = ۲۱ \Rightarrow n^۲ - ۳n + ۲n = ۴۲ \Rightarrow n^۲ - n - ۴۲ = ۰ \Rightarrow (n+۶)(n-۷) = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = -۶ & \text{غیرقابل قبول است} \\ n = ۷ \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۳۵- در اثبات حکم $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$ برای اعداد حقیقی x و y، همواره به کدام عبارت بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰$ ۲) $(x+y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰$

۳) $(x-y)^۲ + (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ \geq ۰$ ۴) $(x+y)^۲ + (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ \geq ۰$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geq ۲xy + ۲x + ۲y$$
$$\Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ - ۲xy - ۲x - ۲y \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow x^۲ + x^۲ + y^۲ + y^۲ + ۱ + ۱ - ۲xy - ۲x - ۲y \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \left(x^۲ - ۲xy + y^۲\right) + \left(x^۲ - ۲x + ۱\right) + \left(y^۲ - ۲y + ۱\right) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰$$

۳۶- ۸۸ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۳ کبوتر قرار داشته باشد.

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای این که در یک لانه بیش از ۳ کبوتر باشد، باید ابتدا به هر لانه ۳ کبوتر بدهیم، سپس یک کبوتر دیگر به مجموعه‌ها اضافه کنیم (که در این صورت لااقل یکی از لانه‌ها بیش از ۳ کبوتر خواهد داشت.) لذا بدترین حالت (حداکثر تعداد لانه‌ها) هنگامی است که: (اگر تعداد لانه‌ها را x فرض کنیم) $۳x + ۱ = ۸۸$ باشد، پس: $x = ۲۹$ یعنی اگر ۸۸ کبوتر را بین ۲۹ لانه تقسیم کنیم، حداقل در یکی از آن‌ها بیش از ۳ کبوتر قرار دارد، اما اگر تعداد لانه‌ها ۳۰ تا باشد، ممکن است در هیچ لانه‌ای بیش از ۳ کبوتر نباشد. اگر m را بین n لانه تقسیم کنیم $(m > n)$ لانه‌ای وجود دارد که در آن لااقل $\left[\frac{m-۱}{n}\right] + ۱$ کبوتر وجود دارد. (اصل لانه‌ی کبوتر) اگر بخواهیم m کبوتر را درون n به گونه‌ای توزیع کنیم که لانه‌ای وجود داشته باشد که در آن بیش از k کبوتر وجود داشته باشد، حداکثر n برابر است با: $\left[\frac{m-۱}{k}\right]$

۳۷- درون جعبه هفت مهره به رنگ سبز، زرد و قرمز وجود دارد، این مهره‌ها را در ۲ جعبه دیگر قرار می‌دهیم،دراین‌صورت:

۱) یکی از جعبه‌ها تمام مهره‌هایش قرمز است.
۲) حداقل یکی از جعبه‌ها، همه مهره‌هایش هم‌رنگ است.
۳) هیچ جعبه با دو مهره هم‌رنگ نداریم.
۴) یکی از جعبه‌ها حداقل ۲ مهره هم‌رنگ دارد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر در پخش‌ترین حالت تعداد مهره‌های هر رنگ ۲ و ۲ و۳ باشد، هر طور که تقسیم کنیم، طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ مهره هم‌رنگ در یک جعبه قرار می‌گیرد.

۳۸- اگر $۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \ldots + n^{۳} = ۹۰۰۰۰$ باشد، n کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۵
۳) ۳۵
۴) ۳۶

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \ldots + n^{۳} = \left[\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right]^{۲} = ۹۰۰۰۰ \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲} = ۳۰۰$$

$$n\,(n+۱) = ۶۰۰ = ۲۴ \times ۲۵ \Rightarrow n = ۲۴$$

۳۹- حداقل چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو مجموعه‌ی جدا از هم در میان آن‌ها موجود باشد؟

۱) ۹
۲) ۱۳
۳) ۱۷
۴) ۲۱

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی عبارت است از $A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\}$ که دارای $۳۲ = ۲^{۵}$ زیرمجموعه می‌باشد. در بین این ۳۲ زیرمجموعه، می‌توان ۱۶ دسته ایجاد کرد که هر دسته شامل ۲ زیرمجموعه بوده که اشتراک آن‌ها تهی است، مانند $\{۵ , ۷ , ۹\} , \{۳ , ۱\}$ یا $\{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\} , \{\,\}$. بنابراین با انتخاب $۱۷ = ۱ + ۱۶$ زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی، حداقل ۲ زیرمجموعه‌ی متعلق به یک دسته وجود خواهد داشت که اشتراک آن‌ها تهی باشد.

۴۰- در یک جعبه، ۷ مهره‌ی سبز، ۲ مهره‌ی سیاه، ۴ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی قرمز موجود است. حداقل چند مهره از جعبه باید بیرون بیاوریم تا مطمئن شویم که حداقل سه مهره‌ی غیرهم‌رنگ در مهره‌های انتخاب وجود دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۱۲
۴) ۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ درست است. اگر ۱۱ مهره برداریم، ممکن است ۷ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی سفید (یعنی دو رنگ) استخراج شده باشد. ولی اگر ۱۲ مهره برداریم، اطمینان مورد نظر، حاصل شده است.

۴۱- فرض کنیم p_n حکمی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و هرگاه $p_{۴}$ درست باشد و از درستی p_k بتوان درستی $p_{k+۵}$ را نتیجه گرفت، آن‌گاه کدام حکم زیر حتماً درست است؟

۱) $p_{۱۳}$
۲) $p_{۱۹}$
۳) $p_{۲۱}$
۴) $p_{۲۵}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$P_{۴} \rightarrow P_{۴+۵} = P_{۹} \Rightarrow P_{۹+۵} = P_{۱۴} \Rightarrow P_{۱۴+۵} = P_{۱۹}$$

۴۲- حداقل مقدار عبارت $\left(\frac{n+۳}{n}\right)^{۲n}$ برای $n \in \mathbb{N}$ به کدام عدد نزدیک است؟

۱) ۷   ۲) ۹   ۳) ۱۱   ۴) ۱۵

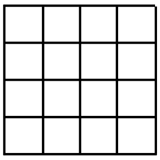
گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم $(۱+a)^n \geqslant ۱+na$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+۳}{n}\right)^{۲n} = \left(۱+\frac{۳}{n}\right)^{۲n} \geqslant ۱+\left(\frac{۳}{n}\right)\times\frac{۲}{n} = ۷$$

یعنی عبارت بزرگ‌تر مساوی ۷ باشد، پس حداقل عبارت به ۷ نزدیک است.

۴۳- در شکل مقابل مربع‌های کوچک به ضلع واحد هستند. تعداد کل مربع‌های شکل مقابل چندتاست؟



۱) ۱۷   ۲) ۳۰   ۳) ۲۰   ۴) ۲۸

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$۴^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲ = ۱۶ + ۹ + ۴ + ۱ = ۳۰$$

مربع ۱ × ۱

مربع ۲ × ۲

مربع ۳ × ۳

مربع ۴ × ۴

۴۴- برای $n \in N$، اگر $\left(\frac{n+۲}{n}\right)^{۲n} \geqslant K$ باشد، حداقل مقدار K برابر است با:

۱) ۵   ۲) ۹   ۳) ۷   ۴) $\frac{۷}{۲}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم $(۱+a)^n \geqslant n\,.\,a+۱$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+۲}{n}\right)^{۲n} = \left(۱+\frac{۲}{n}\right)^{۲n} \geqslant ۱+۲n\times\frac{۲}{n} = ۵ \Rightarrow K = ۵$$

۴۵- اگر گزاره‌ی «$P(n)\colon ۴^n > n^۴$» به ازای جمیع مقادیر طبیعی $n \geqslant m$ برقرار باشد آن‌گاه کم‌ترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزاره‌ی داده شده برای اعداد ۱ , ۵ , ۶ , ۷ , ... برقرار است بنابر این پایه استقرا عدد ۵ می‌باشد.

۴۶- اگر n عددی صحیح بوده و $n^{۲}$ مضربی از ۲۴ باشد، بزرگ‌ترین عددی که n مضربی از آن باشد، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون $n^{۲}$ مضربی از ۲۴ است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$n^{۲} = ۲۴q = ۲^{۳} \times ۳^{۱} \times q \xrightarrow{\text{مربع کامل } n^{۲}} q = ۲^{۱} \times ۳^{۱} \times k^{۲} \Rightarrow n^{۲} = ۲^{۴} = ۲^{۴} \times ۳^{۲} \times k^{۲} : n = ۱۲q$$

۴۷- اگر a و b اعدادی فرد باشد معادله‌ی $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} = ۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) جواب ندارد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. زیرا،

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} = ۱ \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = ۱ \Rightarrow \underbrace{a + b}_{\text{جمع دو عدد فرد، زوج است.}} = \underbrace{ab}_{\text{ضرب ۲ عدد فرد، فرد است.}}$$

۴۸- اگر $\frac{An + B}{۲n + ۱} = \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)} + \dots + \frac{۱}{۳ \times ۵} + \frac{۱}{۱ \times ۳}$ باشد، $A + B$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: $n = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۱ \times ۳} = \frac{A + B}{۳} \Rightarrow A + B = ۱$

روش دوم: می دانیم $\frac{۱}{(۲n-۱)\,(۲n+۱)} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\right]$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵}\right) + \dots + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n - ۱} - \frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲n+۱}\right) = \frac{n}{۲n + ۱}$$

$$\begin{cases} A = ۱ \\ B = ۰ \end{cases}$$

۴۹- کدام عدد کلیّت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اعداد ۲^{n} را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی طبیعی نوشت، زیرا مجموع اعداد طبیعی متوالی بر مبنای تصاعد حسابی، عددی می‌دهد که فاکتور عدد فرد بزرگ‌تر از ۱ می‌دهد.

۵۰- برای اثبات حکم «عبارت $۴^{n}+۶n-۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.» توسط استقرای ریاضی، در گامی که درستی حکم را به ازای $n=k+۱$، از درستی حکم به ازای $n=k$ نتیجه می‌گیریم، از چه عبارت درستی استفاده شده است؟

۱) عبارت $۴^{k}+۶k+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است. ۲) عبارت $۳\times ۴^{k}+۶k$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۳) عبارت $۴^{k}+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است. ۴) عبارت $۴^{k+۱}+۶k-۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در گامی که در فرض سؤال اشاره شده، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n=k:\ ۴^{k}+۶k-۱=۹m$$
$$n=k+۱:\ ۴^{k+۱}+۶(k+۱)-۱=۴\times ۴^{k}+۶k+۶-۱$$
$$=\left(۴^{k}+۶k-۱\right)+۳\times ۴^{k}+۶$$
$$=۹m+۳\left(۴^{k}+۲\right)=۹m+۹n=۹(m+n)$$

از درستی «عبارت $۴^{k}+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است.» استفاده شده است.