بسمه تعالی

آزمون اول المپیاد فیزیک (تابستان 96) مدت : 4 ساعت

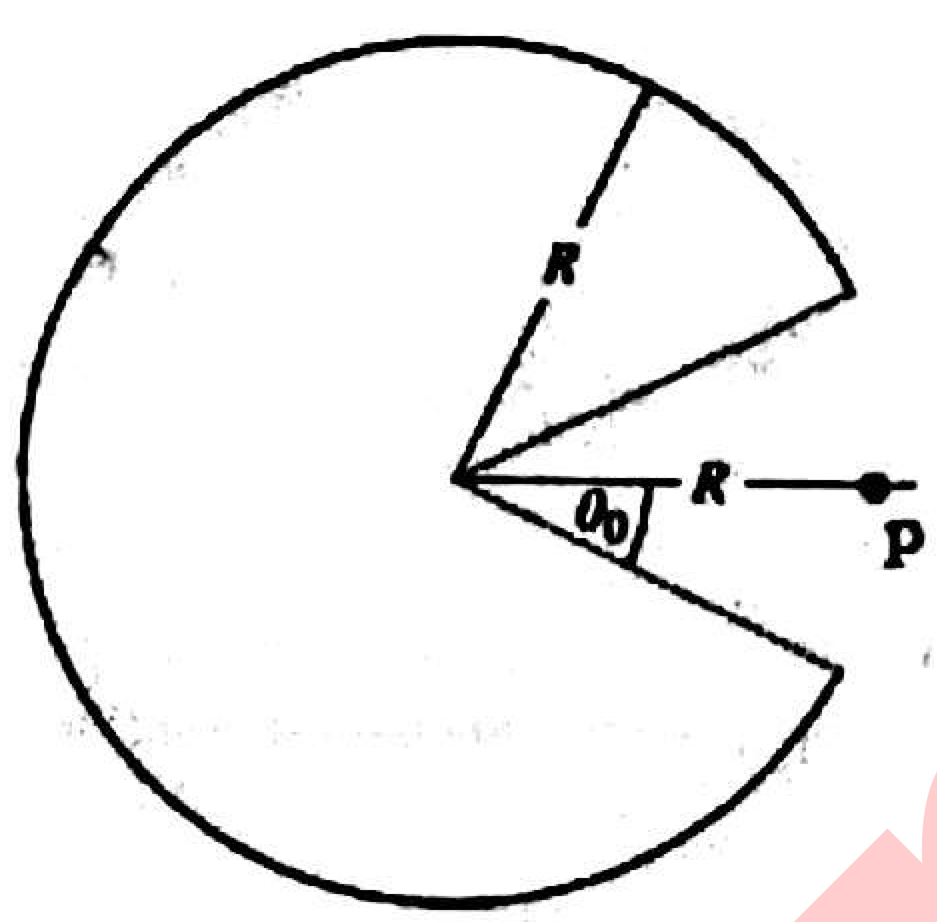
96/5/1

مسئله ی 1) این مسئله دو قسمت مجزا از هم دارد.

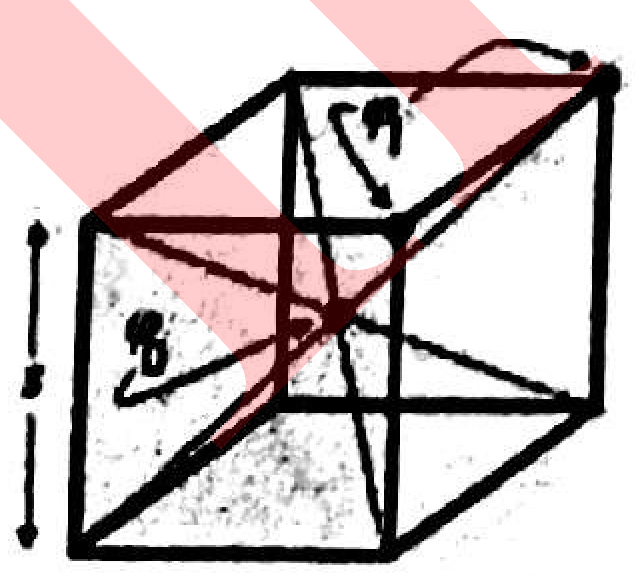
آ) یک پوسته ی کروی به شعاع R دارای چگالی بار الکتریکی سطحی σ است. یک حفره ی دایره ای روی این پوسته ایجاد می کنیم. زاویه ی مخروطی که رأس آن در مرکز کره، و قاعده ی آن حفره ی روی پوسته است، θ_0 است.

آ-1) میدان الکتریکی را در نقطه ی P در مرکز حفره به دست آورید.

آ-2) در حالت $\theta_0 \ll 1$ ، میدان الکتریکی در نقطه ی P را به دست آورید.



ب) مکعبی با طول ضلع s، دارای چگالی بار الکتریکی یک نواخت است. پتانسیل در مرکز، و در یک رأس این مکعب را به ترتیب با φ_0 و φ_1 نشان می دهیم. نسبت $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ را به دست آورید.



مسئله‌ی ۲)

در این مساله می‌خواهیم یک مدل ساده از رشد سلولی را در نظر بگیریم. برای این منظور فرض می‌کنیم که یک سلول در بازه‌ی زمانی کوچک Δt سه امکان دارد: ۱) سلول می‌تواند به احتمال $\omega\Delta t$ تقسیم و به دو سلول تبدیل شود، ۲) سلول به احتمال $\gamma\Delta t$ از بین می‌رود و ۳) برای سلول هیچ اتفاقی نمی‌افتد. فرض می‌کنیم $\omega \neq \gamma$. احتمال اینکه در لحظه‌ی t در محیط رشد، n سلول داشته باشیم را با $p(n,t)$ نشان می‌دهیم.

الف) معادله‌ی تحول زمانی، یعنی $\frac{\partial p(n,t)}{\partial t}$ را بنویسید.

تابع مولد، $G(s,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n p(n,t)$ مطابق معمول تعریف می‌شود.

ب) معادله‌ی تحول تابع مولد، یعنی $\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}$ را بنویسید.

ج) با دانستن تابع توزیع اولیه، $p(n,t=\text{۰})$، می‌توان تابع مولد در لحظه‌ی نخست را ساخت. با فرض اینکه $G(s,t=\text{۰}) = F(s)$ یک تابع داده شده است، پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل بخش ب، چنین است:

$$G(s,t) = F(x(s,t)), \qquad x(s,t) = \frac{\gamma - \omega s + \gamma(s-\text{۱})e^{-kt}}{\gamma - \omega s + \omega(s-\text{۱})e^{-kt}}, \qquad (\text{۱})$$

که در آن k یک ثابت است. k را بر حسب γ و ω تعیین کنید.

د) مقدار متوسط تعداد در زمان t، یعنی $\langle n(t)\rangle$ را بر حسب $\langle n(t=\text{۰})\rangle$، γ، ω و t حساب کنید.

حال فرض کنید $F(s) = s^N$، که در آن N یک عدد ثابت مثبت است. علاوه بر آن احتمال نابودی کامل نمونه یا انقراض در زمان t برابر با $p(\text{۰},t)$ است.

ه) احتمال انقراض در زمان دلخواه t را حساب کنید. اگر زمان بسیار زیادی بگذرد، احتمال انقراض چه‌قدر است؟

مسئله ۳ ـ توجه فرمایید این مسئله دارای چهار بخش مجزا از هم است.

الف) ماتریس N متعامد گفته می شود اگر $N\tilde{N} = \tilde{N}N = 1$، که در آن $\tilde{N}$ ترانهاده ماتریس N نامیده می شود و عناصر آن از رابطه $(\tilde{N})_{ij} = N_{ji}$ تعریف می شوند. ثابت کنید مجموعه ماتریس های متعامد $n \times n$ تحت عمل ضرب ماتریسی یک گروه است. (۲ نمره)

ب) چنانکه می دانید در هیأت اعداد مختلط عمل ضرب به صورت زیر تعریف می شود:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ثابت کنید مجموعه اعداد مختلط به جز صفر، ضرب فوق ، یک گروه آبلی است. (۲ نمره)

ج) با استفاده از نامساوی شوارتز ثابت کنید مجموعه توابع مجذور انتگرال پذیر یک فضای برداری است. (۲ نمره)

د ۱) تعریف دترمینان یک ماتریس $n \times n$ به صورت زیر است

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det N = \epsilon_{i'_1 i'_2 \cdots i'_n} N_{i_1 i'_1} N_{i_2 i'_2} \cdots N_{i_n i'_n}$$

که در آن تانسور اپسیلون لوی- چیویتا تانسور کاملا پادمتقارن در n بعد است، به این معنی که اگر شاخص های i_1 تا i_n جایگشت زوجی از اعداد صحیح یک تا n باشند مقدار آن ۱+، اگر جایگشت فردی از همان اعداد باشد مقدار آن ۱− و اگر دو تا یا بیشتر از شاخص ها یکسان باشند مقدار آن صفر است. با استفاده از این تعریف ثابت کنید اگر دو سطر یک ماتریس مشابه باشند، دترمینان آن صفر است. (۲ نمره)

د ۲) در ادامه بخش (د ۱) ثابت کنید اگر کلیه عناصر یک سطر را با سطر دیگر به ترتیب جمع کنیم دترمینان تغییر نمی کند. (۱ نمره)

د ۳) ثابت کنید اگر ترکیبی خطی از برخی سطرهای یک ماتریس را به یکی دیگر از سطرها اضافه کنیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی کند. (۱ نمره)

مسئله‌ی ۴) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.

a) برای آن که الکترون‌های رسانش از سطح یک فلز کنده شوند، باید انرژی جنبشی هر یک از آن‌ها برابر یا بزرگ‌تر از تابع کار فلز، ε_0، باشد. الکترون‌ها می‌توانند به راه‌های مختلف این انرژی را کسب کنند. یک راه بالا بردن دمای فلز است. گسیل الکترون‌ها به این روش گسیل گرمایونی نام دارد.

آ) فلزی در نظر بگیرید که تعداد الکترون‌های آزاد در واحد حجم آن n_0 است. همچنین فرض کنید الکترون‌ها مانند ذرات یک گاز ایده‌آل آزادند و از تابع توزیع سرعت ماکسول پیروی می‌کنند

$$n(v_z) = n_0\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

می‌دانیم در صورتی که سرعت سوق همه‌ی الکترون‌ها $\vec{v}$ باشد، رابطه‌ی بین چگالی جریان با سرعت الکترون‌ها $\vec{J} = n_0e\vec{v}$ است که e بار یک الکترون است. دمای فلز را T در نظر بگیرید و رابطه‌ای برای چگالی جریان الکترون‌های کنده شده از سطح فلز به دست آورید. راستای عمود بر سطح را z بگیرید. معادله‌ای که به دست می‌آید معادله‌ی ریچاردسون نام دارد. (۲ نمره)

ب) برای فلز تنگستن $\varepsilon_0 = 4.5\ \mathrm{eV}$ و $n_0 = 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$. فلز تنگستن تا چه دمایی باید گرم شود تا چگالی جریان الکترون‌های کنده شده از سطح آن $1\ \mathrm{mA/cm^2}$ باشد. (۳ نمره)

---

b) فرض کنید در همجوشی هسته‌ای (ترکیب دو هسته‌ی دوتریوم و تشکیل یک هسته‌ی هلیوم) برای این که این واکنش به طور مداوم ادامه پیدا کند باید لااقل یک درصد از هسته‌های دوتریوم انرژی جنبشی شان بزرگ‌تر از $\varepsilon_0 = 10^4\ \mathrm{eV}$ باشد. دمای دوتریوم حداقل چقدر باشد تا این اتفاق بیفتد؟ فرض کنید ذرات دوتریوم از تابع توزیع تندی ماکسول پیروی می‌کنند و $\varepsilon_0 \gg kT$.

(۵ نمره)

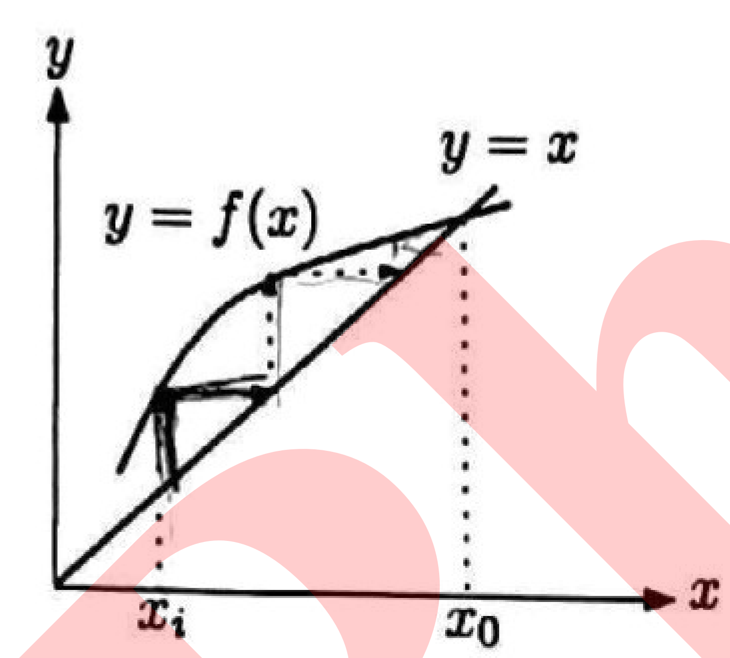
در صورت نیاز: ادامه در صفحه بعد

$$\mathrm{erf}\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp\,(-x^2)dx \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,y}\exp\,(-y^2) \qquad \text{If} \qquad y \gg 1$$

$$\frac{d}{dy}(y\exp\,(-y^2)) = -2y^2\exp\,(-y^2) + \exp\,(-y^2)$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

همچنین برای به دست آوردن ریشه‌های معادله‌ای مانند $x = f(x)$ با توجه به شکل، با حدس مقدار اولیه‌ی مناسبی مانند x_i با چند بار تکرار می‌توان به مقدار واقعی ریشه معادله که در واقع محل تقاطع خط $y = x$ با منحنی $y = f(x)$ یعنی x_0 است نزدیک شد.



بسمه تعالی

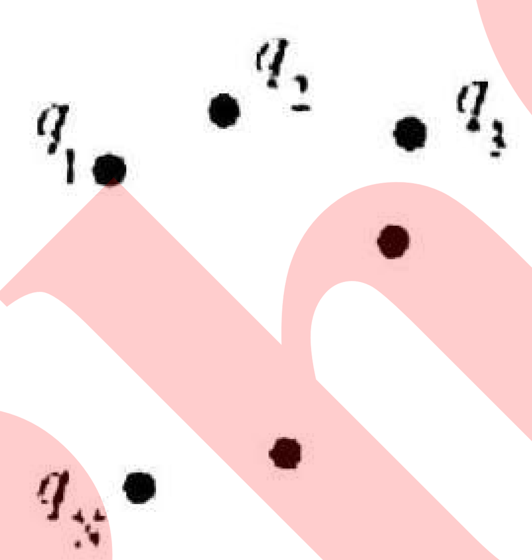
آزمون دوم المپیاد فیزیک (تابستان 96) مدت : 4 ساعت

96/5/19

مسئله ی 1)

آ) مطابق شکل بارهای q_1، q_2، ...، q_N در مکان های مشخصی قرار دارند به طوری که فاصله ی بار i ام تا بار jام برابر r_{ij} است. پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام را با V_i نشان می دهیم.

اگر به جای این بارها، بارهای q'_1 ، q'_2 ، ....، q'_N در همان مکان های قبل قرار بگیرد، پتانسیل الکتریکی در محل بار i ام، V'_i ، خواهد شد.



نشان دهید $\sum_{i=1}^{N} q_i V'_i = \sum_{i=1}^{N} q'_i V_i$

ب) فرض کنید سه کره ی رسانای مشابه در رأس های یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند. وقتی بار روی این سه رسانا (q, q_0, q_0) است، پتانسیل الکتریکی این کره ها $(V, 0,0)$ است. وقتی پتانسیل همه ی آنها برابر V' است، بار روی هر یک از این سه کره را بر حسب q ، q_0 ، V ، و V' به دست آورید؟

ج) فرض کنید بار روی این کره ها $(q'', 0, 0)$ باشد، پتانسیل الکتریکی هر یک از این سه کره را برحسب q'' ، q ، q_0 ، و V به دست آورید.

مسئله ۲ ـ این مسئله لزوما جوابهای جمع و جور ندارد.

مفتولی نازک و بدون اصطکاک روی سطح کره ای به شعاع R مسیری با معادله $\theta = \alpha \cos n\phi + \theta_0$ تشکیل می دهد، که θ و ϕ مختصات قطبی هستند. مهره ای کوچک به جرم m مثل یک دانه تسبیح روی این مفتول حرکت می کند. شتاب گرانش برابر g، در امتداد محور کره و به سمت پایین است.

الف) سرعت و شتاب مهره را به صورت توابعی از $\phi(t)$ و مشتقات آن، در مختصات کروی به دست آورید. اگر فرمولی لازم است به دست آورید. (۴ نمره)

ب) نیروی N وارد شده از طرف مفتول به مهره را به صورت توابعی از $\phi(t)$ و مشتقات آن، در مختصات کروی به دست آورید. (۲ نمره)

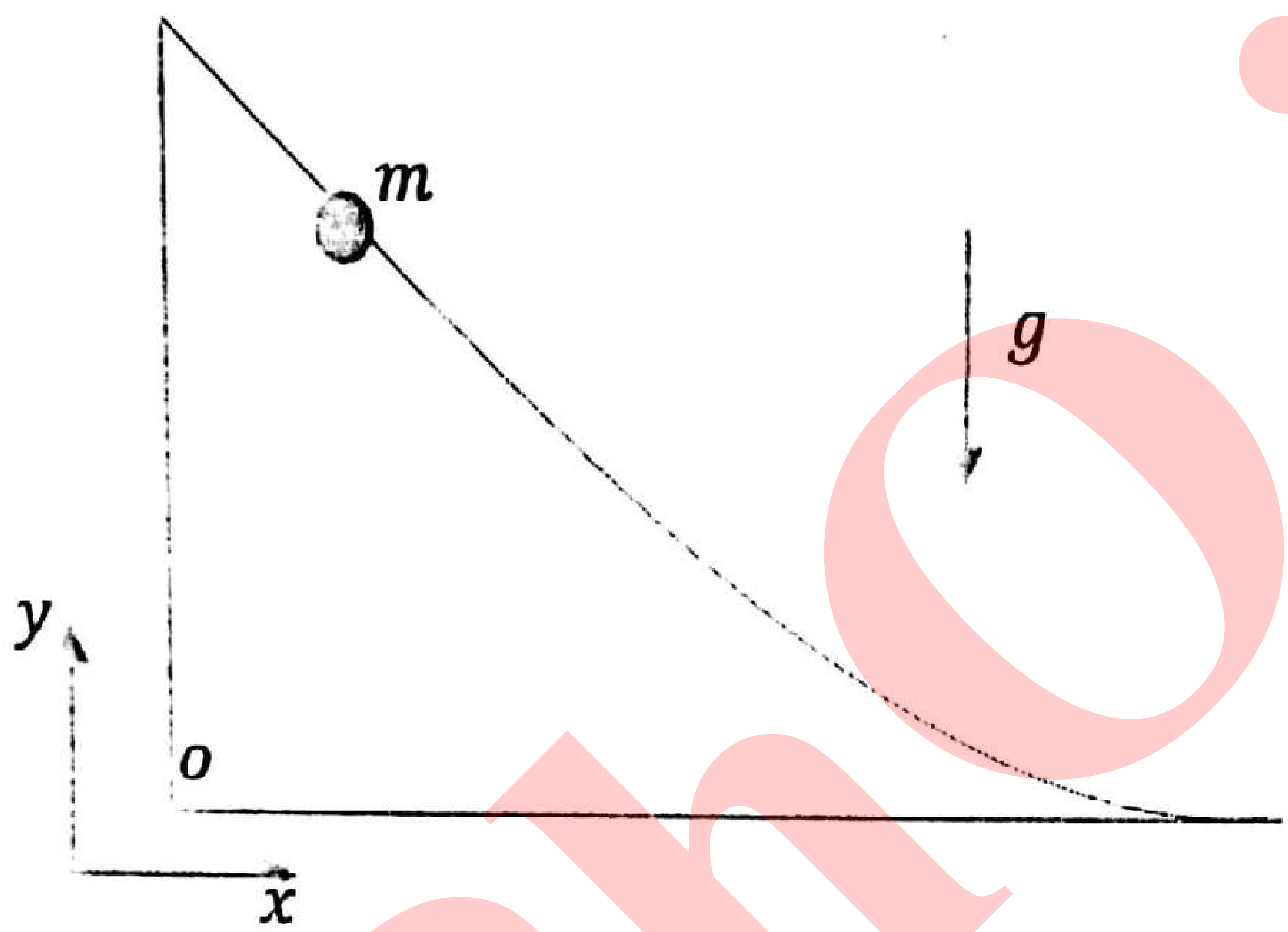
ج) انرژی مکانیکی مهره که شامل انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل mgh (که h ارتفاع از مرکز کره است)، را بر حسب $\phi(t)$ و مشتقات آن، به دست آورید. رابطه $dE/dt = 0$ را به صورت معادله ای روی ϕ و مشتقات آن بیان کنید. (۲نمره)

د) با استفاده از رابطه ای که برای N به دست آوردید، شرط بدون اصطکاک بودن را به صورت معادله ای روی ϕ و مشتقات آن بیان کنید. (۲نمره)

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

3- مطابق شکل زیر یک مسیر شیب دار که از یک سیم منحنی شکل و صلب تشکیل شده است را در نظر بگیرید. معادله این سیم در دستگاه مختصات منطبق بر کنج (O) را تابع مشتق پذیر $y = f(x)$ بگیرید.

همچنین فرض کنید که $f(0) = h$ و $f(h) = 0$ (h یک ثابت مثبت است). شتاب گرانش را نیز مقدار ثابت g و در خلاف جهت محور y بگیرید.



اکنون یک مهره تسبیح به جرم m را در نظر بگیرید. این مهره را در سیم مقید کرده و آن را از نقطه ی $y = h$ رها می کنیم. با فرض آنکه حرکت مهره در سیم بدون اصطکاک و شیب منحنی در تمامی نقاط منفی باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف-	اندازه سرعت مهره را در مکانی به مختصات $(x, f(x))$ و بر حسب پارامتر های داده شده در مساله تعیین کنید.

ب-	اندازه نیروی وارد بر مهره از طرف سیم را در مکانی به مختصات $(x, f(x))$، بر حسب پارامتر های داده شده در مساله و با فرض معلوم بودن مشتقات تابع $f(x)$ تعیین کنید.

- راهنمایی : برای منحنی پیوسته و مشتق پذیر $y = f(x)$ در هر نقطه ی دلخواه، منحنی را می توان به تقریب قسمتی از یک دایره در نظر گرفت. شعاع این دایره از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$R = \frac{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

پ-	مدت زمانی که طول می کشد تا مهره به نقطه ی $(x, f(x))$ برسد، $T(x)$، را به صورت تابعی انتگرالی و برحسب پارامتر های داده شده در مساله و با فرض معلوم بودن مشتقات تابع $f(x)$ بنویسید.

اکنون فرض کنید که معادله ی سیم منحنی شکل به صورت زیر است.

$$y = f(x) = (h - x) + \Delta(x)$$

که در رابطه ی فوق $\Delta(x)$ یک تابع مشتق پذیر با شیب ملایم و با اندازه ی کوچک (نسبت به $h - x$ در هر نقطه) است.

ت-	جواب های بخش الف و ب را تا اولین مرتبه نسبت به تابع $\Delta(x)$ و مشتقات آن ساده کنید. در واقع در معادلات خود از توان دو و بالاتر $\Delta(x)$ و مشتقات آن صرف نظر کنید.

- راهنمایی: برای x خیلی کوچکتر از یک داریم

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

ث-	جواب بخش پ را تا اولین مرتبه نسبت به تابع $\Delta(x)$ و مشتقات آن ساده کرده و معادله ای به صورت زیر را بدست آورید. $$T(x) = F_1(x) + \int_0^x F_2(x)dx$$ که در معادله ی فوق $F_1(x)$ و $F_2(x)$ توابعی هستند که باید تعیین کنید.

حال فرض کنید که ما معادله ی دقیق مربوط به $\Delta(x)$ را نداریم، اما می دانیم که در هر نقطه ی مشخص x $(0 \leq x \leq h)$ ، احتمال آنکه اندازه ی این تابع بین مقدارΔ و $\Delta + d\Delta$ باشد طبق معادله ی معلوم زیر تعیین می شود.

$$dP = G_x(\Delta)d\Delta$$

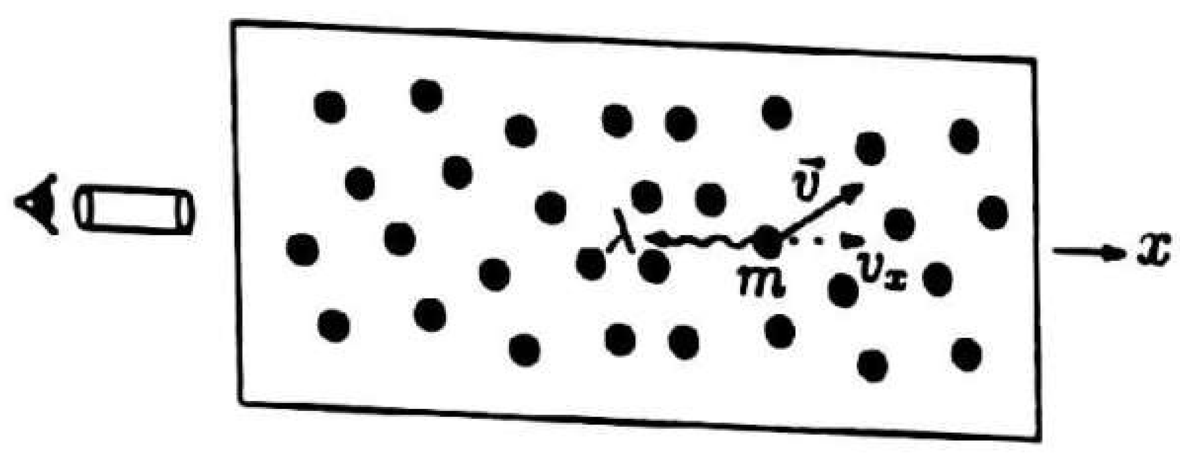
که در معادله ی فوق dP احتمال گفته شده در بالا و $G_x(\Delta)$ تابع توزیع مربوط به این احتمال در نقطه ی x است.

ج-	تابع توزیع مربوط به اندازه سرعت مهره را در هر نقطه دلخواه x از مسیر، برحسب $G_x(\Delta)$ و سایر پارامتر های داده شده در سوال تعیین کنید. فرض کنید که مقادیر مجاز مربوط به Δ بگونه ای هستند که همچنان شیب سیم در تمامی نقاط منفی بماند.

۴) طبق نظریهٔ جنبشی ماکسول برای یک گاز رقیق در دمای T، تابع توزیع احتمال تندی و تابع توزیع احتمال مؤلفه‌ی x سرعت ذرات گاز عبارتند از

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$
$$P(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

که m جرم ذرات گاز است. آزمایش‌های مختلفی به منظور تحقیق تجربی این نظریه انجام شده است که در قسمت a) و b) به دو تا از آن‌ها پرداخته می‌شود.



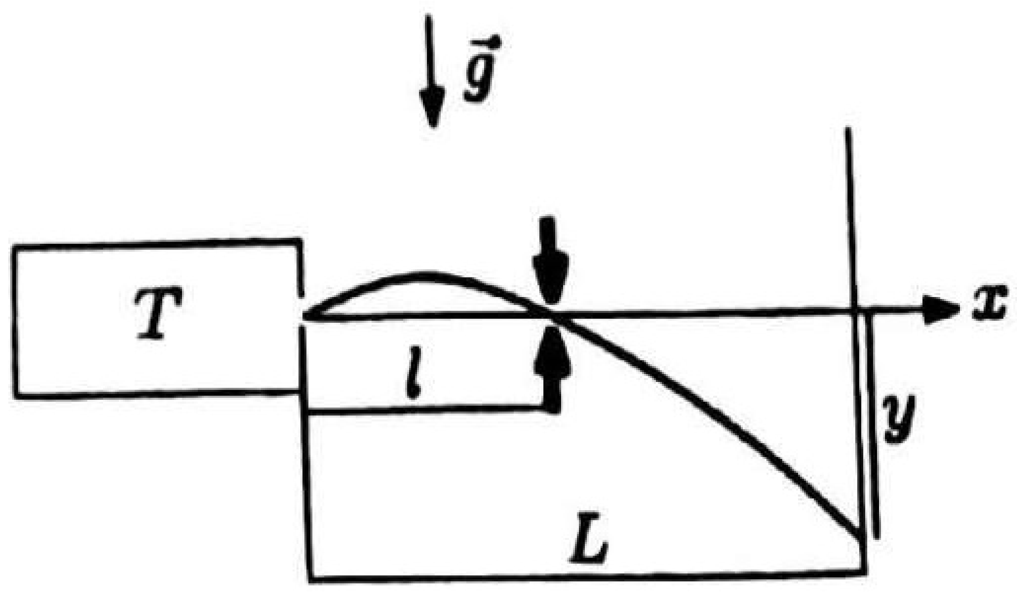
a) پهن‌شدگی دوپلری خطوط طیفی. می‌دانیم که اتم‌های برانگیخته می‌توانند فوتون (موج الکترومغناطیس) تابش کنند. فرض کنید ذرات گازی به جرم m در محفظه‌ای تا دمای T داغ شده‌اند. ذره‌ای در نظر بگیرید که مؤلفه سرعت آن در راستای x برابر v_x است. اگر طول موج تابش الکترومغناطیسی گسیل شده به وسیله‌ی ذره، نسبت به ناظر ساکن نسبت به آن λ_0 باشد طبق پدیدهٔ دوپلر، طول موج تابش اندازه‌گیری شده توسط ناظری که ذره در راستای x از او دور می‌شود $\lambda \approx \lambda_0(1 + v_x/c)$ است که c سرعت نور است. اگر ناظر طیف‌نمایی در اختیار داشته باشد و طول موج تابش وابسته به ذرات را ثبت و سپس تابع توزیع طول موج ذرات را رسم کند از مقایسه‌ی پهنای منحنی تجربی با پهنای محاسبه شده نظری می‌تواند به صحت نظریه جنبشی پی ببرد.

آ) تابع توزیع احتمال (شدت نسبی) تابش بر حسب طول موج λ را به دست آورید. **(۲ نمره)**

ب) پهنای تابع توزیع شدت نسبی که به صورت $\Delta\lambda = \sqrt{\overline{\lambda^2} - (\overline{\lambda})^2}$ تعریف می‌شود به دست آورید. **(۲ نمره)**

پ) اگر گاز متشکل از اتم‌های سدیم در دمای $300\,^\circ\mathrm{C}$ باشد که طول موج تابش گسیلی از آن در چارچوب سکون اتم $5896\ \text{Å}$ است، $\Delta\lambda$ را حساب کنید. جرم مولی سدیم $23\ \mathrm{g/mol}$ و ثابت گازها $8.3\ \mathrm{J/mol.K}$ است. **(۱ نمره)**

b) آزمایش اشترن. ذرات گاز از روزنه بسیار کوچکی که در دیواره ظرفی ایجاد شده به بیرون که تقریباً خلأ است نشت می‌کنند و در طول مسیرشان در اثر نیروی گرانش به سمت پایین سقوط می‌کنند و سرانجام به یک پرده می‌رسند. شمارنده‌ای ذرات رسیده به پرده را می‌شمارد. از مقایسه‌ی تابع توزیع ارتفاع سقوط با نتایج تجربی می‌توان به صحت نظریه جنبشی پی برد.



گازی که جرم هر یک از ذرات آن m است داخل ظرفی در دمای T در نظر بگیرید. این ذرات از روزنه‌ی کوچکی در دیواره ظرف نشت می‌کنند. قطر روزنه از مسافت آزاد میانگین ذرات گاز داخل ظرف کوچک‌تر است. بیرون ظرف تقریباً خلأ است. شکافی در فاصله‌ی l از روزنه و هم‌تراز با آن وجود دارد. ذراتی که موفق می‌شوند از شکاف عبور کنند به پرده‌ای که فاصله آن از روزنه L است برخورد می‌کنند. در تمام طول مسیر نیروی وزن ذرات، mg، به آن‌ها وارد می‌شود. حرکت را در یک صفحه قائم در نظر بگیرید.

آ) تابع توزیع ذرات برخورد کننده به پرده را بر حسب y به دست آورید. (۴ نمره)

ب) در چه فاصله‌ی y تابع توزیع ذرات برخورد کننده به پرده دارای بیشینه است؟ (۱ نمره)

بسمه تعالی

آزمون سوم المپیاد فیزیک (تابستان 96) مدت : 4 ساعت

96/5/26

مسئله ی 1) یک غشای خیلی نازکِ کروی نارسانا با کششِ سطحی γ در نظر بگیرید، مثلِ یک حباب، که در محیطِ خلاء قرار دارد. حباب دارای بارِ الکتریکی Q است که به طورِ یکنواخت روی سطحِ آن پخش شده است.

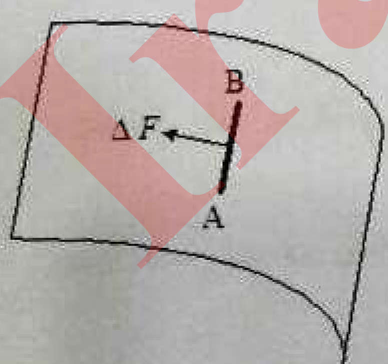
آ) نیروی کلِّ الکتریکی را که بر یک نیم‌کره وارد می‌شود به صورتِ تابعی از شعاع حباب، R ، بیابید.

ب) شعاعِ تعادلِ حباب را حساب کنید.

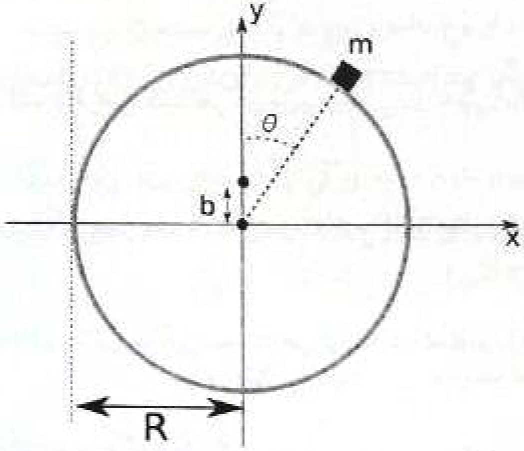
ج) حال فرض کنید داخل حباب n مول گازِ ایده آل در دمای T قرار دارد و بسیار رقیق است. اوّلین تصحیح بر شعاعِ تعادل را حساب کنید.

توجه: عناصر واقع بر سطح تماس دو محیط یکدیگر را با نیرویی می‌کشند. فرض کنید سطح نشان داده شده در شکل مقابل سطح جدایی بین دو محیط است، مثلاً یک طرف صفحه آب و طرف دیگر آن هوا قرار دارد. عناصر واقع در سمت چپ پاره خط AB به طول ΔL عناصر سمت راست را مطابق شکل با نیرویی می‌کشند که با طول AB متناسب است، به طوری که $\Delta F = \gamma\, \Delta L$ به کمیت γ ضریب کشش گفته می‌شود که واحد آن نیوتن بر متر است.

(5 نمره)



مسئله ی 2) دو سیمِ نارسانا که می توان آنها را باردار کرد، با طولِ بی‌نهایت در نظر بگیرید که با محورِ z موازی هستند. یک سیم در $x = 0, y = b$ و دیگری در $x = 0, y = 0$ صفحه ی xy را قطع می کند. یک سطحِ استوانه‌ای و نازک به شعاعِ R دورِ سیم‌ها قرار دارد که محورش منطبق بر محورِ z است. شتابِ گرانش g و جهت آن به سمتِ منفی محورِ y است. ذره‌ای به جرمِ m و بارِ مثبتِ q در بالای استوانه، یعنی در نقطه‌ی $x = 0, y = R, z = 0$ قرار دارد.



ذرّه ابتدا ساکن است. به ذرّه سرعتِ اولّیه‌ی ناچیزی می‌دهیم تا از حالتِ تعادل خارج شود و سقوط کند. در هر لحظه، زاویه‌ی بینِ خطّ واصلِ بین ذرّه و مبدأ مختصات با محور y را مطابق شکل با θ نشان می‌دهیم. در تمامِ قسمت‌ها فرض کنید $\frac{b}{R}$ کوچک است.

الف) ابتدا فرض کنید سیم‌ها بار ندارند. زاویه‌ای را بیابید که در آن ذرّه از سطح جدا می‌شود. همچنین اندازه‌ی سرعتِ ذرّه در لحظه‌ی جدایی را به دست آورید.

ب) حال فرض کنید سیمِ بالایی چگالی بار خطّی یکنواخت $+\lambda$ ، و سیمِ پایینی چگالی بارِ خطّی یکنواختِ $-\lambda$ دارد. میدانِ الکتریکی کل را، در راستای شعاع استوانه و عمود بر شعاع، در نقطه‌ای روی سطح که با زاویه‌ی θ مشخّص می‌شود، تا اولّین مرتبه‌ی ناصفرِ $\frac{b}{R}$ بیابید. فرض کنید استوانه اثری بر میدان الکتریکی سیم ها ندارد.

پ) اولّین تصحیحِ زاویه‌ی جدایی نسبت به پاسخِ قسمتِ الف را بیابید. همچنین اولّین تصحیحِ سرعتِ ذرّه در لحظه‌ی جدایی را حساب کنید (دقّت کنید که خودِ زاویه مطلوب است، نه صرفاً کسینوس آن. همچنین، خودِ سرعت مطلوب است، نه مربّع آن).

ت) اکنون فرض کنید هر دو سیم چگالی بارِ خطّی یکنواختِ $+\lambda$ دارند. ابتدا فرض کنید b صفر است (که در واقع معادلِ این است که یک سیم داریم که بر محور z منطبق است و چگالی بارِ $+2\lambda$ دارد). فرض کنید که ذرّه به اندازه‌ی کافی سنگین است، طوری که در لحظه‌ی ابتدایی، روی سطح می‌ماند. زاویه‌ی جدایی ذرّه از سطح را بیابید. سرعتِ ذرّه در لحظه‌ی جدایی را حساب کنید.

ث) حالا فرض کنید $\frac{b}{R}$ ناصفر و طبق معمول کوچک است. اولّین تصحیحِ زاویه‌ی جدایی و سرعتِ لحظه‌ی جدایی را نسبت به پاسخِ قسمتِ قبل به دست آورید.

(**10** نمره)

مسئله ۳ ـ این مسئله از دو قسمت مجزا تشکیل شده است.

الف)

در یک دنیای فرضی برهم کنشی وجود دارد که در آن ذراتی با سه رنگ مختلف شرکت دارند که به ترتیب آبی (B)، قرمز (R) و سبز (G) نام دارند. این برهم کنش از نوع عکس مجذوری است و در آن نیرویی که هر دو بار به هم وارد می کنند متناسب با حاصل ضرب بارها و در امتداد خط واصل بین آنهاست. مقدار بار رنگی هر ذره با عددی مثبت بیان می شود. در این نوع برهم کنش نیروی بین دو بار همنام از نوع دافعه و بین دو بار غیر همنام از نوع جاذبه است. برای نشان دادن نیروی رنگی وارد بر بارها سه نوع میدان رنگی نیاز است: میدان آبی برای نیروی وارد به واحد بار آبی، میدان قرمز برای بار قرمز و سبز برای سبز.

فرض کنید در یک آرایش از بارها بار آبی به بزرگی B_i در محل r_{Bi}، بار قرمز به بزرگی R_j در محل r_{Rj}، و بار سبز به بزرگی G_k در محل r_{Gk}، قرار دارند، که هر کدام از این اندیس ها یکی از انواع بارها را می شمارد. روابطی برای محاسبه میدانهای آبی، قرمز و سبز در نقطه دلخواه r، بنویسید. (۳ نمره)

ب)

در یک نظریه دینامیکی دو متغیر دینامیکی مختلط $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ به صورت زیر با هم برهم کنش دارند

$$\dot{f}_i = iH_{ij}f_j$$

که در آن

$$H = \begin{pmatrix} E_۱ & a \\ a & -E_۱ \end{pmatrix}.$$

سه مشاهده پذیر فیزیکی زیر نیز داده شده اند

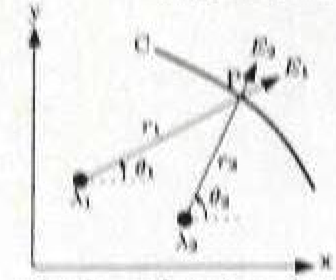
$$A = |f_۱|^۲ - |f_۲|^۲ \qquad B = f_۱^* f_۲ + f_۲^* f_۱ \qquad C = -if_۱^* f_۲ + if_۲^* f_۱$$

با فرض آن که $f_۱(۰) = ۱$ و $f_۲(۰) = ۰$ هر کدام از سه مشاهده پذیر فوق را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. (۷ نمره)

راهنمایی: شرایط برقراری حلی به صورت $f_i = A_i e^{iEt}$ را تحقیق کنید. برای E دو جواب به دست می آید و برای هر جواب نسبت $A_۱/A_۲$ معین می شود. سپس به دلیل خطی بودن معادله می توان ترکیبی خطی از جوابهای یاد شده را به عنوان حل کلی در نظر گرفت و آن را با شرایط اولیه داده شده تطبیق داد.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

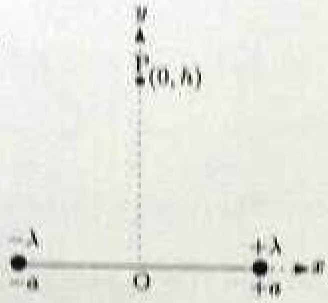
لطفاً نتایج را تا جایی که ممکن است ساده کنید.



۴) محل برخورد دو خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت λ_1 و λ_2 و موازی محور z با صفحه‌ی x-y در شکل نشان داده شده است.

فرض کنید منحنی C یکی از خطوط نیرو در صفحه‌ی x-y و نقطه‌ی P نقطه‌ی دلخواهی روی آن باشد. r_1 و r_2 فاصله خط بارها تا نقطه‌ی P و نیز θ_1 و θ_2 زاویه‌ی r_1 و r_2 با جهت مثبت محور x است. همچنین می‌دانیم میدان ناشی از خط بارها در نقطه‌ی P، به صورت $E_i = \dfrac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r_i}$ است.

آ) اگر معادله‌ی این خط نیرو به صورت: ثابت= $\lambda_1 f(r_1,\theta_1) + \lambda_2 f(r_2,\theta_2)$ نوشته شود $f(r_i,\theta_i)$ را به دست آورید. (۲ نمره)

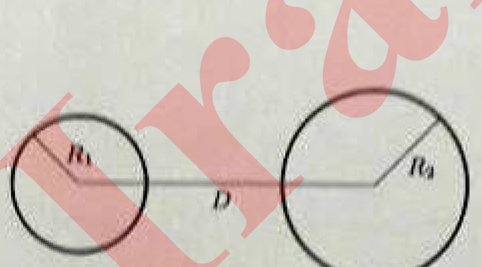


مطابق شکل فرض کنید خط بارها دارای چگالی بار خطی یکنواخت $\pm\lambda$ هستند و از نقاط $(a,0)$ و $(-a,0)$ می‌گذرند.

ب) معادله‌ی (مکان هندسی) خط نیرویی که از نقطه‌ی P می‌گذرد را در مختصات دکارتی به دست آورید. (۱ نمره)

پ) معادله‌ی سطح هم‌پتانسیل به پتانسیل V_0 را در مختصات دکارتی به دست آورید. (۱ نمره)

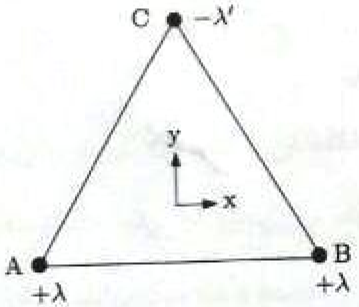
اکنون دو پوسته‌ی رسانای نامتناهی استوانه‌ای موازی، به شعاع‌های R_1 و R_2 و به فاصله‌ی D از یکدیگر در نظر بگیرید که محل برخورد آن‌ها با صفحه‌ای که بر آن‌ها عمود است در شکل نشان داده شده است.



ت) اگر پوسته‌ها به اختلاف پتانسیل V وصل شوند تشکیل یک خازن می‌دهند. اگر $\pm\lambda$ بار الکتریکی موجود روی واحد طول آن‌ها باشد آنگاه رابطه‌ی بین ظرفیت واحد طول این خازن، C، و بار واحد طول به صورت $\lambda = CV$ خواهد بود. C را به دست آورید. (۳ نمره)

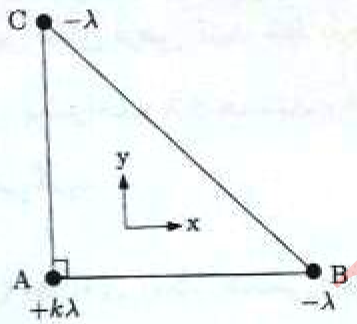
۷

در شکل، محل برخورد سه خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$، $+\lambda$ و $-\lambda'$ که موازی محور z اند با صفحه‌ی x-y نشان داده شده است. این نقاط بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع واقع‌اند و $\lambda' < 2\lambda$.



ث) بزرگترین زاویه‌ی هر یک از دو خط نیرویی که امکان دارد از A به C بروند با AC در محل A چقدر است؟ منظور این است که خطوط نیرویی که با زاویه‌ی بزرگ‌تر از مقدار خواسته شده نسبت به AC از خط بار واقع در A خارج می‌شوند به بینهایت می‌روند. (۲ نمره)

در شکل، محل برخورد سه خط بار نامتناهی با چگالی بار خطی یکنواخت $-\lambda$، $-\lambda$ و $+k\lambda$ که موازی محور z اند با صفحه‌ی x-y نشان داده شده است. این نقاط بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه واقع‌اند.



ج) به ازای چه مقداری از ضریب k هیچ یک از خطوط میدانی که از خط بار واقع در A به سمت خطوط بار واقع در B و C می‌روند از داخل مثلث نمی‌گذرند. (۱ نمره)

راهنمایی برای قسمت آ): یک راه برای به دست آوردن $f(r_i, \theta_i)$ این است که اگر قطعه‌ی کوچکی از منحنی C در نقطه‌ی P مانند ds اختیار کنیم، میدان الکتریکی نباید تصویری عمود بر ds داشته باشد. به جای حل معادله دیفرانسیل می‌شود از روش هندسی استفاده کرد.

آزمون چهارم المپیاد فیزیک ایران (مرحله چهل نفر)

دوم شهریور ۹۶ ــ (مدت سه و نیم ساعت)

مسئله ۱ــ این مسئله از دو قسمت مجزا تشکیل شده است.

الف)

فرض کنید هوا گاز کامل است و در حالت تعادل لایه های هوای اطراف زمین با هم مبادله گرمایی ندارند. در این حالت اگر در ارتفاع z از سطح زمین فشار $p(z)$ و چگالی $\rho(z)$ باشد می توان نشان داد کمیت $p\rho^{-\frac{۷}{۵}}$ در همه جا ثابت است. در سطح زمین فشار $p_۰$ و چگالی $\rho_۰$ است.

الف ۱) با فرض آنکه شتاب گرانش ثابت و برابر g است، $p(z)$ را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

الف ۲) فرض کنید شتاب گرانش ثابت نباشد و از قانون گرانش نیوتن به دست آید. شعاع زمین را R بگیرید و $p(z)$ را به دست آورید. در حد $z \ll R$ نخستین تصحیح ناشی از متغیر بودن شتاب گرانش را به دست آورید. (۲/۵ نمره)

ب)

در لوله ای بلند به طول L و قطر کوچک در ابتدا مقداری هوا با چگالی $\bar{\rho}$ در دمای ثابت T محبوس است. لوله را در صفحه ای افقی حول محور قائمی که از یک انتهای آن در $r = ۰$ می گذرد با سرعت زاویه ای ثابت ω به چرخش در می آوریم. هوا را گاز کامل با جرم مولی M بگیرید و فرض کنید ضمن دوران دمای آن در همه جا T می ماند. ثابت گازها R است و از آثار گرانشی می توان چشم پوشید.

ب ــ ۱) اگر چگالی هوا در $r = ۰$ برابر $\rho_۰$ باشد، فشار و چگالی آن را طول لوله بر حسب $\rho_۰$ به دست آورید. (۳/۵ نمره)

ب ــ ۲) با فرض آن که $M = ۲۹\mathrm{gr/mol}$، $R = ۸/۳\mathrm{j/K\,mol}$، $T = ۳۰۰\mathrm{K}$ و طول میله $L = ۱\mathrm{m}$ باشد، بیشینه مقدار ω چقدر باشد تا تغییرات نسبی چگالی در طول میله، یعنی نسبت $\frac{\rho(L)-\rho_۰}{\rho_۰}$، از ۱۰ در صد کمتر باشد. (۱ نمره)

ب ــ ۳) با فرض آنکه ω مطابق فرض قبل کوچک باشد، تا اولین تقریب غیر بدیهی $\rho_۰$ را بر حسب $\bar{\rho}$ به دست آورید.
؟
همچنین $\rho(L)$ و $\rho(L/۲)$ را بر حسب $\bar{\rho}$ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

۲) مقدمه:

در اثر شکافته شدن یک هستهٔ اورانیوم حدود ۲۰۰ MeV انرژی آزاد می‌شود که برای ۱ kg اورانیوم معادل انرژی آزاد شده در انفجار ۲۰۰۰۰ تن تی‌ان‌تی است. برای این که یک هستهٔ اورانیوم شکافته شود باید یک نوترون به آن برخورد کند. پس از شکافته شدن یک هستهٔ اورانیوم که همراه با آزاد شدن انرژی است به طور متوسط تقریباً ۲٫۵ نوترون هم آزاد می‌شود که می‌تواند برای شکافتن هسته‌های اورانیوم بیشتری مورد استفاده قرار گیرد. حاصل این فرایند یک واکنش زنجیره‌ای خود محرک یا خود نگه‌دار است. برای این که واکنش زنجیره‌ای متوقف نشود نباید بیش از ۱٫۵ نوترون از دست برود. با توجه به مسافت آزاد میانگین برخورد نوترون با هسته اگر نوترون حجم و در نتیجه جرم کافی از هسته سر راهش نباشد قبل از این که واکنشی اتفاق بیفتد به بیرون نشت می‌کند و واکنش زنجیره‌ای اتفاق نمی‌افتد.

جرم بحرانی جرمی است که پس از شکافته شدن یک هسته و تولید به طور متوسط تقریباً ۲٫۵ نوترون، یک نوترون فرصت دارد در ایجاد شکافت در هستهٔ دیگر شرکت کند و بقیه هدر روند. این وضعیتی است که یک راکتور هسته‌ای با آن کار می‌کند. از طرف دیگر اگر هر واکنش شکافت بیشتر از یک شکافت دیگر تولید کند، گفته می‌شود راکتور در وضعیت فوق بحرانی است که منجر به انفجار آن می‌شود مانند آنچه که در یک بمب اتمی نیز اتفاق می‌افتد. در این مسئله می‌خواهیم جرم بحرانی را برای اورانیوم ۲۳۵، $^{235}\mathrm{U}$، محاسبه کنیم که اساس آن پخش نوترون است.

معادله‌ی پخش نوترون در ماده (اورانیوم)

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{v_{neut}}{\lambda_f}(\nu-1)n+\frac{\lambda_t v_{neut}}{3}\nabla^2 n$$

است که در آن n تعداد نوترون در واحد حجم، v_{neut} سرعت متوسط نوترون، λ_f مسافت آزاد میانگین شکافت نوترون، λ_t مسافت آزاد میانگین ترابرد نوترون و ν تعداد متوسط نوترون‌های آزاد شده در هر شکافت است.

آ) برای داخل کره‌ای به شعاع R که به طور یکنواخت از اورانیوم تشکیل شده جوابی به صورت $n(r,t)=\exp(\alpha t/\tau)f(r)$ در نظر بگیرید و معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر $f(r)$ را به

دست آورید. $\tau = \frac{\lambda_f}{v_{neut}}$ زمان متوسط آزاد میانگین نوترون قبل از برخورد به یک هسته و α ضریب ثابتی است. (۱ نمره)

ب) $f(r)$ را به دست آورید. (۲ نمره)

پ) شرط مرزی $n(r = R + 0.71\lambda_t, t) = 0$ را به کار ببرید و شعاع کرهٔ اورانیومی را به دست آورید. (۱ نمره)

ت) این بار شرط مرزی $n(r = R, t) = -\frac{2\lambda_t}{3}(\frac{\partial n}{\partial r}|_{r=R})$ را به کار ببرید و معادله‌ای که شعاع کرهٔ اورانیومی از آن قابل محاسبه است به دست آورید. (۱ نمره)

شعاع بحرانی، کوچکترین شعاعی است که به ازای $\alpha = 0$ اتفاق می‌افتد.

ث) مقدار عددی شعاع بحرانی و جرم بحرانی را به ازای هر یک از دو شرط مرزی فوق و با استفاده از مقادیر عددی زیر برای $^{235}\mathrm{U}$ به دست آورید. (۵ نمره)

$$\rho = 18.71\ \mathrm{g/cm^3}, \qquad \sigma_f = 1.235 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm^2}, \qquad \sigma_{el} = 4.566 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm^2}$$

$$\nu = 2.637, \qquad n_0 = 4.794 \times 10^{22}\ /\mathrm{cm^3}, \qquad \tau = 8.635 \times 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

همچنین داریم $\lambda_f = \frac{1}{\sigma_f n_0}$ و $\lambda_t = \frac{1}{\sigma_t n_0}$ و $\sigma_t = \sigma_f + \sigma_{el}$.

در صورت نیاز:

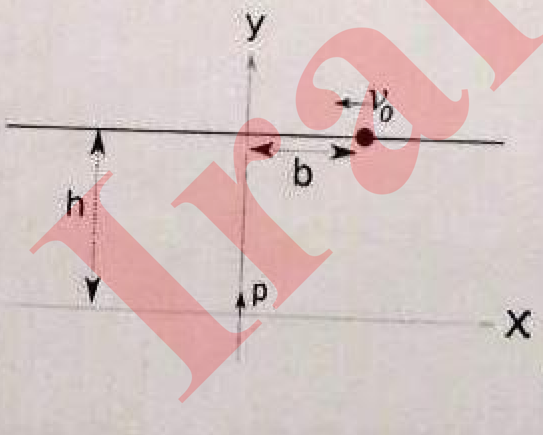
$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial f}{\partial r})$$

مسئله ی 3) دوقطبی الکتریکی، از دو بارِ نقطه‌ای با بارهای هم‌اندازه با علامت‌های مخالف تشکیل می‌شود که به فاصله‌ی کمی از هم قرار دارند. در صفحه‌ی دوبعدی، فرض کنید بارِ $-q$ در مبدا قرار دارد و بارِ $+q$ در نقطه‌ی $(0,d)$. وقتی فاصله‌ی بارها خیلی کم باشد (یعنی d به صفر میل کند ولی q طوری بزرگ باشد که حاصل‌ضربِ qd مقداری محدود باشد)، دوقطبی را اصطلاحاً «دوقطبی نقطه‌ای» می‌نامیم، و حاصل‌ضربِ qd را با p نشان می‌دهیم.

الف) پتانسیلِ الکتریکی را در نقطه‌ی (x,y) بر حسبِ p,x,y حساب کنید.

ب) بردارِ میدانِ الکتریکی را در نقطه‌ی (x,y) بیابید.

پ) خطِ $y=h$ در صفحه ی x-y را در نظر بگیرید که h مقداری مثبت است. نمودارِ مولفه‌ی عمودی میدانِ الکتریکی روی این خط را به صورتِ تابعی از x رسم کنید. نقاطِ عبور از صفر، مکانِ بیشینه ها و کمینه های موضعی، و مقدارِ تابع در این نقاط، باید دقیق مشخص شوند.



حالا فرض کنید ذره‌ای با بارِ $-Q$ و جرمِ m داریم که مطابقِ شکل، روی میز افقی بدون اصطکاک به معادله‌ی $y=h$، در راستای x حرکت می‌کند. شتابِ گرانش g و در جهت $-y$ است. ذرّه ای در ابتدا در نقطه ی (b,h) قرار دارد، که b خیلی از h بزرگ‌تر است و با سرعت اولیّه‌ی v_0 به سمتِ چپ (یعنی به سمتِ محورِ y) به حرکت در می‌آید.

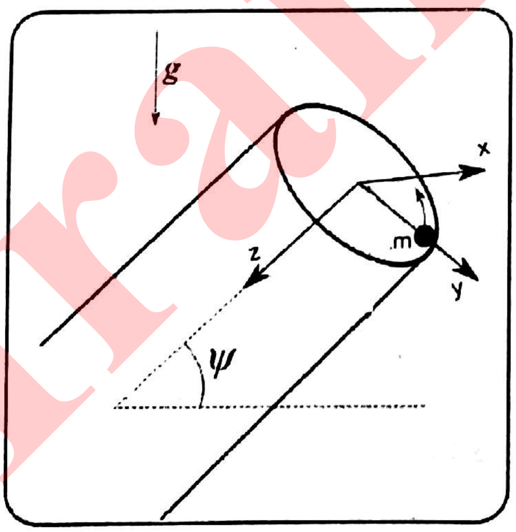
بسمه تعالی

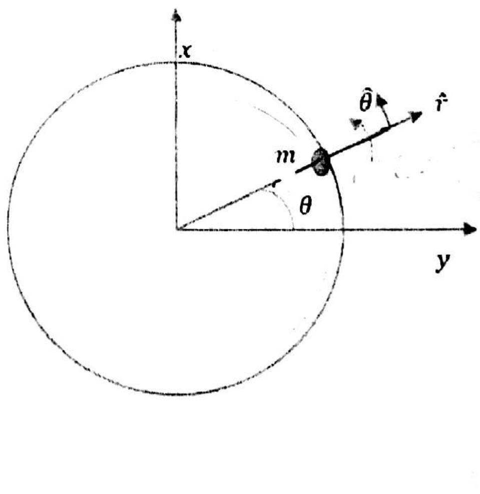
آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان 96)　　　　مدت : 3 ساعت

96/6/7

مسئله ی 1)

استوانه ای به شعاعِ R داریم که محورِ آن با افق زاویه‌ی ψ می‌سازد. ذرّه‌ای به جرمِ m روی سطحِ داخلی این استوانه قرار دارد. دستگاهِ مختصات را طوری می‌گیریم که محورِ z منطبق بر محورِ استوانه باشد، و مؤلفّه‌ی شتابِ گرانش در راستای محورِ z مثبت باشد (مطابقِ شکلِ چپ). در لحظه ی t=0، ذرّه در مکانِ x=0, y=R, z=0 قرار دارد. زاویه‌ی بینِ محور y و خطّ واصلِ مبدأ به ذرّه را با θ نشان می‌دهیم. یعنی در لحظه‌ی t=0، θ صفر است. ذرّه را با سرعتِ اوّلیّه‌ی v_0 به حرکت در می‌آوریم. سرعتِ اوّلیه در راستای z مؤلّفه ندارد، و تماماً در راستای $+\hat{\theta}$ است. در تمامِ این مسئله فرض می‌کنیم سرعتِ اوّلیه خیلی بزرگ است، طوری که بتوان از توان‌های دوم و بالاترِ $\frac{gR}{v_0^2}$ صرف‌نظر کرد. شکلِ سمتِ راست، نمای مقطعی است و در آن θ و جهتِ سرعتِ اوّلیه برای تصوّر بهتر مشخّص شده است. (برای سهولتِ پی گیری محاسبات، توجّه تان به توان‌های g باشد. توان‌های دوم و بالاتر را صرف‌نظر کنید)





الف) معادلاتِ نیرو را در مختصاتِ استوانه‌ای مشخّص شده $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ بنویسید.

ب) بردارِ سرعت را بر حسبِ زمان بیابید.

پ) θ را بر حسبِ زمان بیابید.

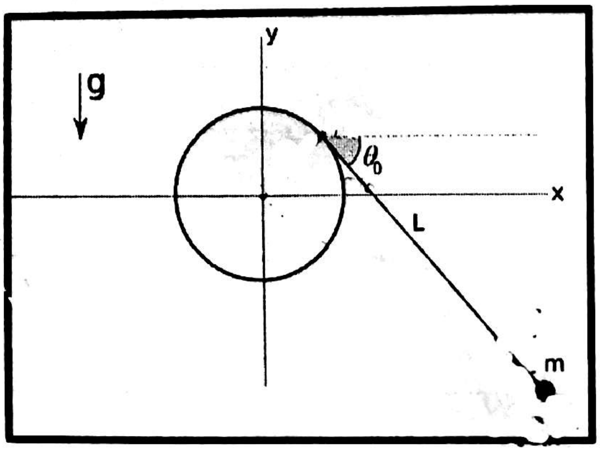
ت) نیروی عمودی سطح را بر حسبِ زمان بیابید.

حالا فرض کنید ضریب اصطکاک بین سطح و ذرّه μ است.

ث) بردارِ نیروی اصطکاک را بر حسبِ زمان بیابید.

ج) حالا فرض کنید μ نیز کوچک است، و هم‌مرتبه‌ی $\frac{gR}{v_0^2}$ است. بردارِ سرعت را بر حسبِ زمان بیابید.

چ) θ را بر حسبِ زمان بیابید.



مسئله ی 2) ذرّه‌ای به جرمِ m به انتهای نخی بی‌جرم وصل شده است. نخ، مطابق شکل، حولِ دایره‌ای به شعاعِ R پیچیده شده و در ابتدا با افق زاویه ی θ_0 می‌سازد. ذرّه را با سرعتِ اولّیه‌ی v_0 به حرکت در می‌آوریم. سرعتِ اولّیه عمود بر راستای نخ است. شتابِ گرانش g و به سمتِ پایین است. طولی از نخ که ابتدا آویزان است با L نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم L از محیطِ دایره بزرگ‌تر است. در هر لحظه، زاویه‌ی نخ با افق را با θ نشان می‌دهیم.

نکته: با دقّتِ زیاد پیش بروید و در همه‌ی قسمت‌های زیر، پاسخ ها را تا حدّ امکان ساده کنید، تا با صحّت به قسمت‌های پایانی مسئله برسید.

الف) بردارِ سرعت و بردارِ شتابِ جسم را بر حسبِ θ و مشتقّاتِ زمانی‌اش و ثوابتِ مسئله بیابید.

ب) معادلاتِ نیروی حاکم بر حرکتِ جسم را در مختصّاتِ دکارتی بنویسید.

پ، مشتق اولِ زمانی θ را به صورتِ تابعی از θ به دست آورید. (توجّه: راهنمایی‌هایی که در پایانِ سوال آمده‌اند ممکن است در محاسباتِ این قسمت مفید باشند.)

از این‌جا به بعد فرض کنید θ_0 صفر است، یعنی نخ در ابتدا افقی قرار گرفته. فرض کنید v_0 هم صفر است، یعنی جسم را از حالت سکون رها می‌کنیم. علاوه بر این‌ها، فرض کنید که L خیلی بزرگ‌تر از محیط دایره است.

ت) مشتقِ دومِ θ نسبت به زمان را به صورتِ تابعی از θ بیابید.

ث. نشان دهید کششِ نخ تا مرتبه ی اوّلِ $\frac{R}{L}$ به صورت $T = mg[\alpha sin^2\theta + (\beta\theta + \gamma \sin\theta\cos\theta)\frac{R}{L}]$ است. ضرایب α ، β، و γ را به دست آورید.

ج) در حدّ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ اوّل، یعنی در بازه‌ی $0 < \theta < \pi$ ، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود؟ این زاویه را با $\hat{\theta}_1$ نشان می‌دهیم. کششِ نخ در این زاویه را با T_1 نشان می‌دهیم. مقدارِ T_1 را نیز حساب کنید.

چ) در حدّ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ دوم، یعنی در بازه‌ی $\pi < \theta < 2\pi$ ، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود. این زاویه را با $\hat{\theta}_2$ نشان می‌دهیم. کششِ نخ در این زاویه را با T_2 نشان می‌دهیم. مقدارِ T_2 را نیز حساب کنید.

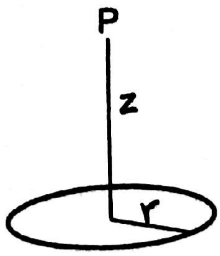
ح) برای L خیلی بزرگ ولی محدود، اوّلین تصحیح بر $\hat{\theta}_1$ را به دست آورید. اوّلین تصحیح بر T_1 را نیز به دست آورید. کشش نسبت به حالت $L \to \infty$ در زاویه‌ی کمتری بیشینه می‌شود یا در زاویه‌ی کمتری؟ کششِ بیشینه نسبت به حالتِ $L \to \infty$ بیشتر است یا کمتر؟

خ) برای L خیلی بزرگ ولی محدود، اوّلین تصحیح بر $\hat{\theta}_2$ را به دست آورید. اوّلین تصحیح بر T_2 را نیز به دست آورید.

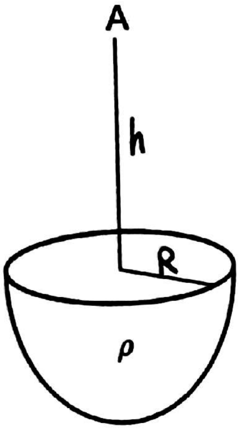
د) همچنان تا اوّلین مرتبه‌ی تصحیحی نسبت به حالتِ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ n اُم، یعنی در بازه‌ی $(n-1)\pi < \theta < n\pi$، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود، و مقدارِ کشش بیشینه را بیابید.

راهنمایی1 : حلّ معادله ی دیفرانسیلی به شکل $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$، به شکل $y = \frac{[C+\int g(x)\mu(x)dx]}{\mu(x)}$ است، که در آن C ثابت است، انتگرال غیرمعیّن است، و $\mu(x) = \exp\int f(x)dx$ تعریف شده است.

راهنمایی2 : این انتگرال ممکن است به درد بخورد: $\int \theta \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\theta}{8} + C$

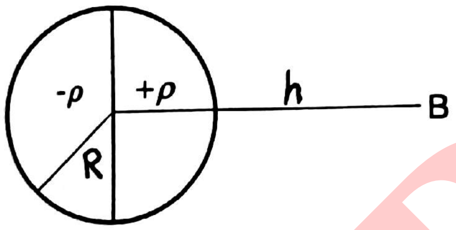


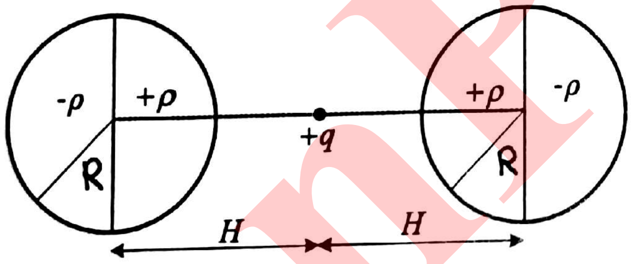
۳- آ) پتانسیل الکتریکی ناشی از قرص باردار نارسانای نازکی به شعاع r و چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نقطه‌ی P روی محور قرص و به فاصله‌ی z از مرکز قرص به دست آورید.



ب) نیم‌کره‌ای نارسانا به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در نقطه‌ی A روی محور نیم‌کره و به فاصله‌ی h از دایره‌ی عظیمه‌ی نیم‌کره به دست آورید.

پ) اکنون دو نیم‌کره‌ی نارسانا به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت $\pm\rho$ مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی B به فاصله‌ی h ($h>R$) از مرکز کره به دست آورید.





ت) حالا فرض کنید دو کره‌ی مشابه به شعاع R داریم که هر کدام دارای آرایش باری هستند که در قسمت پ) توصیف شد. این دو کره را مقابل هم قرار می‌دهیم، طوری که نیم‌کره‌های حاوی $+\rho$ رو به هم قرار گیرند. فاصله‌ی مراکز کره‌ها را $2H$ در نظر بگیرید، به طوری که $H>R$ است. ذره‌ای با بار الکتریکی $+q$ و جرم m را در نقطه‌ی وسط بین دو مرکز قرار می‌دهیم. بنا به تقارن، میدان الکتریکی در این نقطه صفر است، در نتیجه بار ساکن می‌ماند. بسامد نوسانات کوچک ذرّه را حول این نقطه در راستای محور (خط واصل بین مراکز کره‌ها) حساب کنید.

ث) با این فرض که $\frac{R}{H}$ خیلی کوچک است، بسامد نوسانات را ساده کنید. یافتن اوّلین جمله‌ی ناصفرکافی است.

لطفاً نتایج را تا جایی که ممکن است ساده کنید.

۴) $N+2$ سکه در نظر بگیرید. هر سکه پس از پرتاب ممکن است با احتمال p شیر (H) و با احتمال q خط (T) بیاید به طوری که $p+q=1$. دو سکهٔ ابتدایی و انتهایی مطابق شکل روی میز قرار دارند و همواره در حالت خط (T) قرار گرفته‌اند.

T ... T H H H T ... T

N سکهٔ باقیمانده را پرتاب می‌کنیم. سکه‌ها هنگام فرود و افتادن روی میز از یکدیگر مستقل‌اند. همچنین فرض کنید سکه‌ها طوری پرتاب می‌شوند که هنگام افتادن روی میز، روی یک خط و بین دو سکهٔ ابتدایی و انتهایی که همواره در حالت T هستند قرار گیرند. پس از پرتاب N سکه و افتادن آن‌ها روی میز، ممکن است Mتا $(1 \leq M \leq N)$ سکهٔ متوالی شیر (H) بیاید که در دو انتها به وسیله‌ی دو سکه در حالت خط (هر طرف یک سکه) احاطه شده‌اند. به این M سکه یک خوشه به طول M می‌گوییم. مثلاً در شکل فوق یک خوشه به طول $M=3$ نشان داده شده است. روی شکل و جای نقطه‌چین‌ها امکان دارد سکه‌ها در حالت شیر یا خط باشند. فرض کنید پس از پرتاب N سکه و افتادن آن‌ها روی میز هیچوقت به تعداد دو خوشه یا بیشتر، خوشه‌ی با طول یکسان تشکیل نمی‌شود.

آ) احتمال این که یک سکه متعلق به خوشه‌ای به طول M باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

ب) میانگین طول خوشه‌های مختلفی که امکان تشکیل دارند، $\overline{M}$، را محاسبه کنید. (۴ نمره)

پ) جواب قسمت ب) را در حد $N \to \infty$ به دست آورید. (۱ نمره)

می‌دانیم در دمای T و در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، ممان مغناطیسی ذره‌ای که دارای ممان مغناطیسی دائمی $\vec{m}$ است با احتمال‌های زیر موازی یا پاد موازی میدان $\vec{B}$ خواهد بود.

$$P\uparrow = \frac{e^{mB/kT}}{e^{-mB/kT}+e^{mB/kT}}, \qquad P\downarrow = \frac{e^{-mB/kT}}{e^{-mB/kT}+e^{mB/kT}}$$

ت) اگر به جای سکه، ممان‌های مغناطیسی مستقل از هم در حضور میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت در دمای T داشته باشیم که $\uparrow$ نقش H و $\downarrow$ نقش T را دارد پاسخ سؤال قسمت پ) را بر حسب دما به دست آورید. (۱ نمره)

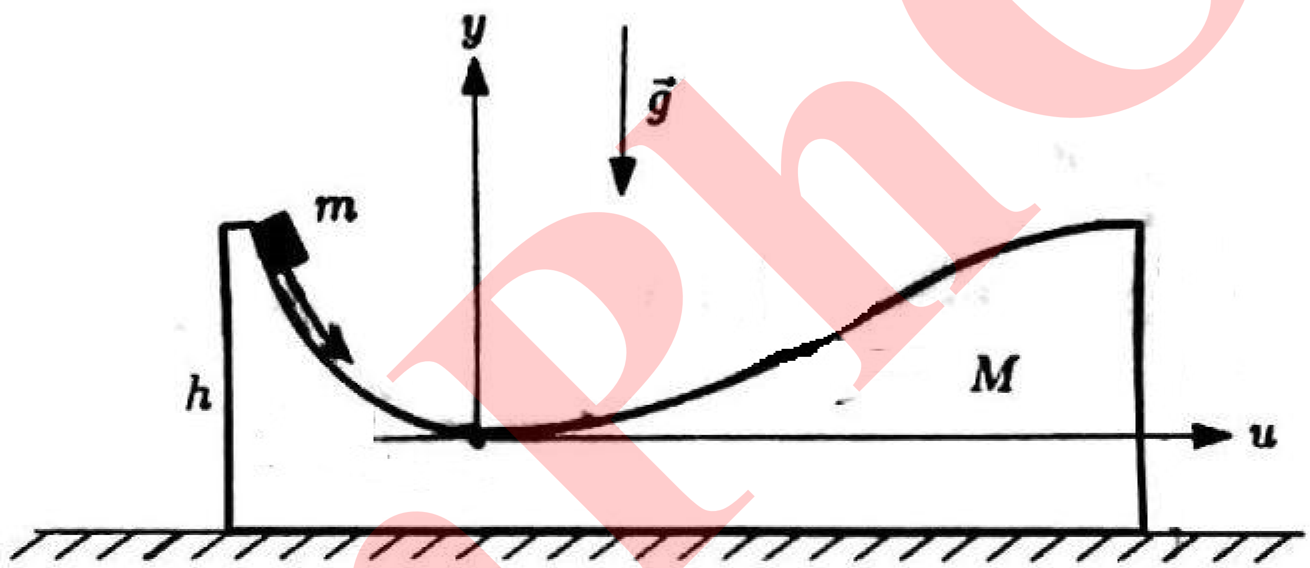
ث) به ازای $N \to \infty$، در حد $T \to 0$ و $T \to \infty$ میانگین طول خوشه را به دست آورید.

(۱ نمره)

نهم شهریور ۹۶ ـ (مدت سه و نیم ساعت)

مسئله ۵ـ

در شکل زیر مقطع عمودی ظرفی به جرم M داده شده است. فرض کنید این مقطع با منحنی $y = f(u)$ داده شده که u مختصه افقی در دستگاه ساکن نسبت به ظرف است که مبدا مختصات آن گودترین نقطه ظرف است. ارتفاع ظرف از هر طرف h است. جرم کوچک m از حال سکون بدون اصطکاک از بالاترین نقطه ظرف در یک سمت سر می خورد و تا نقطه مقابل بالا می رود و بر می گردد. شتاب گرانش در جهت $(-y)$ است و اندازه آن g است. ظرف روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد.



الف) سرعت لحظه ای هر کدام از جرم ها را بر حسب تابع $f(u)$ و مشتقات آن به دست آورید.

ب) نیروی عمودی از طرف ظرف را بر حسب تابع $f(u)$ و مشتقات آن به دست آورید و مقدار آن را در گودترین نقطه ظرف پیدا کنید.

ج) زمان رسیدن از حالت سکون در بالاترین نقطه ظرف در یک سمت به نقطه هم ارتفاع آن در سمت دیگر را به صورت یک انتگرال به دست آورید.

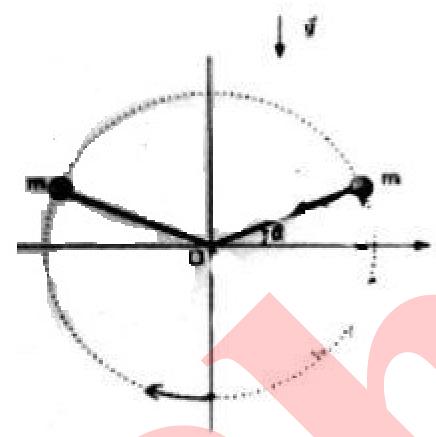
د) برای $f(u) = h\sin^2(\pi u/2l)$ زمان رفتن از $u = -l$ به $u = l$ را حساب کنید. اگر جواب نامتناهی است علت را توضیح دهید.

ه) فرض کنید حرکت از نقطه $u = -l + \epsilon$ تا $u = l - \epsilon$ صورت می گیرد. در این حالت جواب قسمت (د) را بر حسب ϵ به دست آورید.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

مسئله ۶ـ

مطابق شکل دو گلوله به جرم m در انتهای دو نخ به طول l بسته شده اند. انتهای دیگر نخ ها به نقطه O بسته شده اند. گلوله ها در صفحه قائم حول نقطه O بالا و پایین می روند و یک بار در بالاترین نقطه و بار دیگر در پایین ترین نقطه مسیر با هم برخورد می کنند. برخوردها کشسان است به طوری که بعد از هر برخورد فقط جهت سرعت ها عوض می شود. شرایط مسئله به گونه ای است که نخ ها هرگز شل نمی شوند. شتاب گرانش به سمت پایین و مقدار آن g است. موقعیت دستگاه در هر لحظه با زاویه θ که نخ متصل به گلوله سمت راست با افق می سازد، مشخص می شود. نقطه O توسط یک عامل خارجی با معادله $Y = Y(t)$ حرکت داده می شود، که Y مختصه قائم نقطه O از دید ناظر لخت است. فرض کنید در پایین ترین نقطه مسیر هر کدام از دو گلوله بعد از برخورد با هم با سرعت زاویه ای ω_1 به حرکت در می آیند.



الف) معادلات حرکت گلوله سمت راست را از دید ناظر لخت به دست آورید.

ب) فرض کنید در طی مدتی که گلوله سمت راست از $\theta = -\pi/2$ تا $\theta = 0$ حرکت می کند، نقطه O ساکن است. سرعت زاویه ای گلوله ها هنگام رسیدن به وضعیت $\theta = 0$ را ω_0 بنامید و آن را حساب کنید. در ادامه مسئله می توانید این کمیت را جزو داده ها در نظربگیرید.

ج) حال فرض کنید از $\theta = -\theta_0$ تا $\theta = 0$ نقطه O با شتاب ثابت a به سمت پایین کشیده می شود. نیروی عامل خارجی F را به صورت تابعی از θ به دست آورید. سپس عبارت تقریبی $F(\theta)$ را برای $\theta_0 \ll 1$ حساب کنید. دو جمله نخست را در بسط $F(\theta)$ در نظر بگیرید.

د) با توجه به کوچک بودن θ_0 و با فرض آن که $t = 0$ لحظه عبور گلوله سمت راست از موقعیت $\theta = 0$ است، $\theta(t)$ را حساب کنید. دو جمله نخست در بسط $\theta(t)$ را در نظر بگیرید. سپس این رابطه را معکوس کنید و $t(\theta)$ را تا حد دو جمله نخست بسط به دست آورید.

ه) کار نیروی F را در طی مدت حرکت از $\theta = -\theta_0$ تا $\theta = 0$ بر حسب داده ها به دست آورید. دوجمله نخست در بسط جواب بر حسب θ_0 را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

و) حال فرض کنید در طی حرکت از $\theta = 0$ تا $\theta = \theta_1$ عامل خارجی با شتاب ثابت a نقطه O را به موقعیت اولیه بر می گرداند و ساکن می کند. زاویه θ_1 را بر حسب θ_0 و سایر داده ها به دست آورید. سپس کار عامل خارجی را در این بخش از حرکت نیز حساب کنید.

توجه: جواب هر قسمت را تا جایی که ممکن است ساده کنید و در کادر مشخص نمایش دهید.

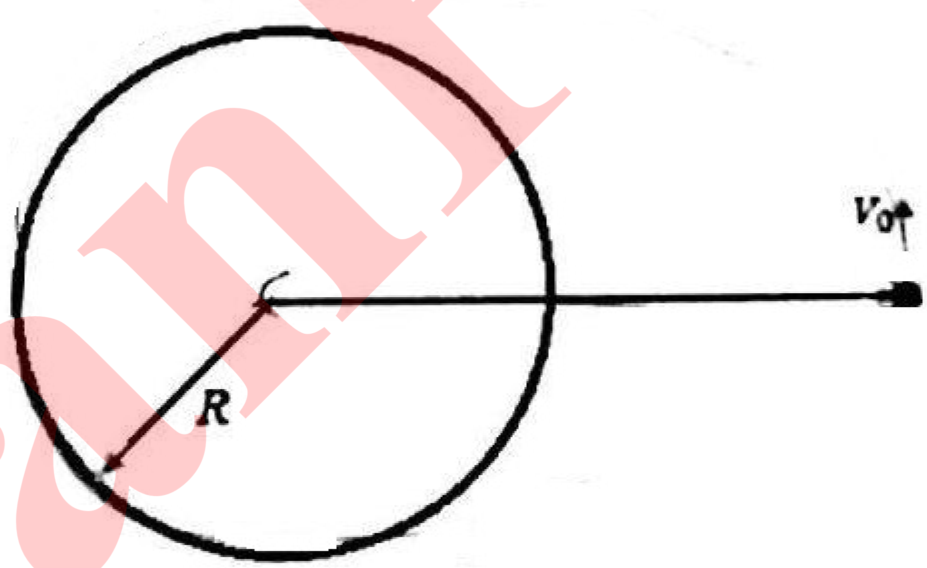
۷- در این مساله می خواهیم یک مدل ساده برای بررسی حرکت ستاره ها ی حاشیه یک کهکشان ارائه دهیم. قبل از شروع مسئله راهنمایی های داده شده در انتهای سوال را بخوانید.

ذره ای به جرم m را در نظر بگیرید که در محیطی سه بعدی، تحت اثر یک منبع نیروی مرکزی و به فرم $\vec{f} = -k\vec{r}$ قرار دارد. در این عبارت k یک ثابت مثبت و $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به مبدا نیرو است. در زمان $t = 0$ بردار مکان و سرعت این ذره نسبت به مبدا نیرو را به ترتیب $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ بگیرید.

الف-	نشان دهید که به ازای تمامی مقادیر $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ حرکت ذره حول مبدا نیرو مقید خواهد بود. به عبارت دیگر اندازه ی فاصله ی ذره از مبدا نیرو همواره مقداری محدود خواهد ماند.

ب-	نشان دهید در حالتی که دو بردار اولیه ی سرعت و مکان ذره موازی نباشند، حرکت ذره حول مبدا نیرو، بر روی یک بیضی خواهد بود که مرکز آن بر مرکز نیرو منطبق است.

اکنون مطابق شکل زیر یک ابر کروی یکنواخت به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. ستاره ای به جرم m و در فاصله اولیه $2R$ از مرکز ابر قرار دارد. این ستاره بردار سرعت اولیه ای به مقدار V_0 و عمود بر بردار شعاع دارد. در تمامی بخش های زیر تنها بر همکنش بین ستاره و ذرات کره را نیروی گرانشی در نظر بگیرید. جرم ستاره در برابر جرم کره بسیار کوچک است به گونه ای که کره را می توان ساکن گرفت و از تغییر توزیع جرم آن صرف نظر کرد(جرم به صورت یکنواخت در کل کره پخش شده است)



پ-	حداقل اندازه ی V_0 (V_m) را به گونه ای تعیین کنید تا ستاره در هیچ زمانی وارد کره نشود.

اکنون فرض کنید که مقدار سرعت اولیه ی ستاره برابر با $\frac{V_m}{3}$ باشد. بنابراین ستاره در یک نقطه وارد این کره خواهد شد.

ت-	بردار سرعت($\vec{v_i}$) و مکان($\vec{r_i}$) ستاره را در لحظه ی ورود به کره تعیین کنید. اندازه زاویه ی بین این دو بردار چه قدر است؟

فرض کنید که حرکت ستاره در داخل کره بدون اصطکاک و بدون برخورد با ذرات کره است.

ث-	حداقل فاصله ی ستاره از مرکز کره (r_m) را تعیین کنید.

ج-	بردار سرعت($\vec{v_f}$) و مکان ($\vec{r_f}$) ستاره را در لحظه ی خروج از کره تعیین کنید. اندازه زاویه ی بین این دو بردار چه قدر است؟

می دانیم که فاصله ی ستاره از مرکز پس از خروج از کره، به بیشینه مقدار $2R$ خواهد رسید.

چ-	- آیا این ستاره در زمانی که مجدد به فاصله ی $2R$ می رسد در مکان اولیه خود ($\vec{r_0}$) قرار دارد؟ در صورت منفی بودن جواب، زاویه ی بین بردار نهایی مکان ستاره و بردار اولیه ی آن ($\vec{r_0}$) را تعیین کنید.

ح	- بردار مکان ستاره در N امین باری که به فاصله ی $2R$ می رسد را تعیین کنید. آیا مقداری برای N وجود دارد که به ازای آن بردار مکان ستاره برابر با $\vec{r_0}$ شود؟ در صورت وجود کوچکترین مقدار آن را بیابید.

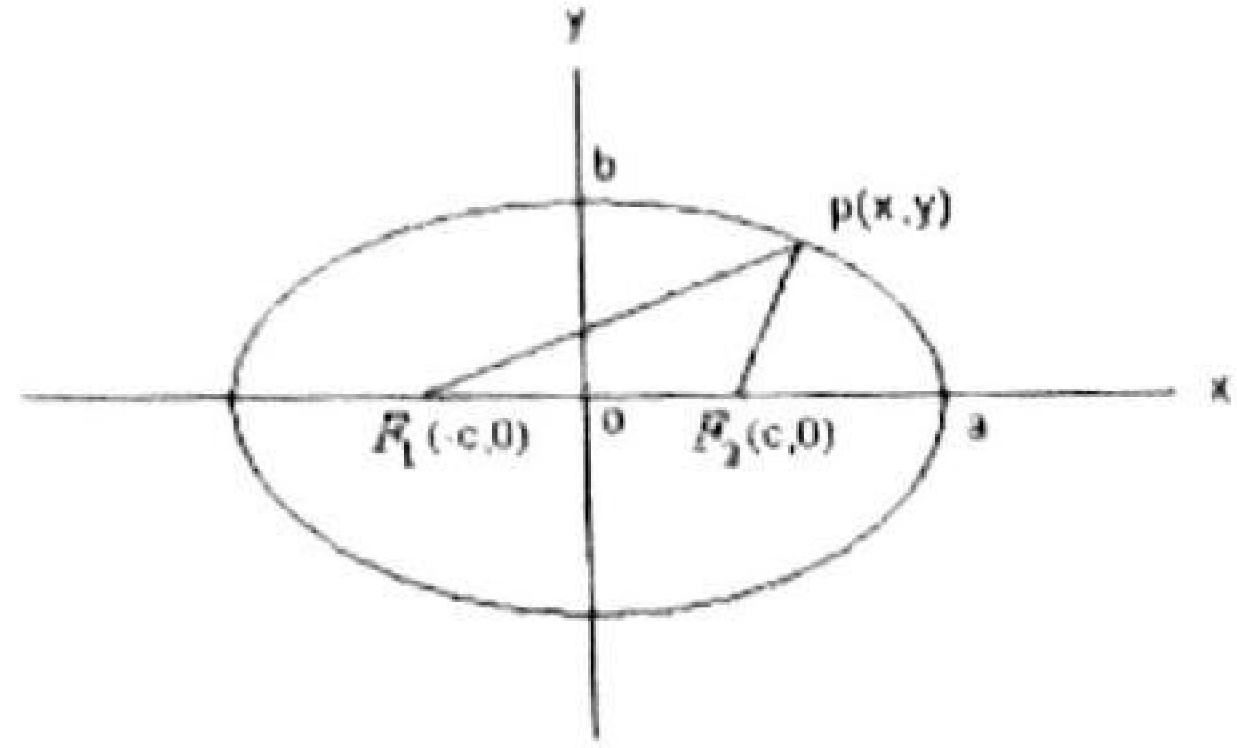
راهنمایی :

- بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت(که آن ها را کانون های بیضی می نامیم) مساوی با ثابتی مثبت است. معادله ی بیضی در دستگاه مختصاتی منطبق بر مرکز بیضی که محور x و y آن به ترتیب در راستای نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی باشند به صورت زیر است.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

که در معادله ی فوق a و b به ترتیب برابر با نیم قطر بزرگ و کوچک بیضی می باشند.

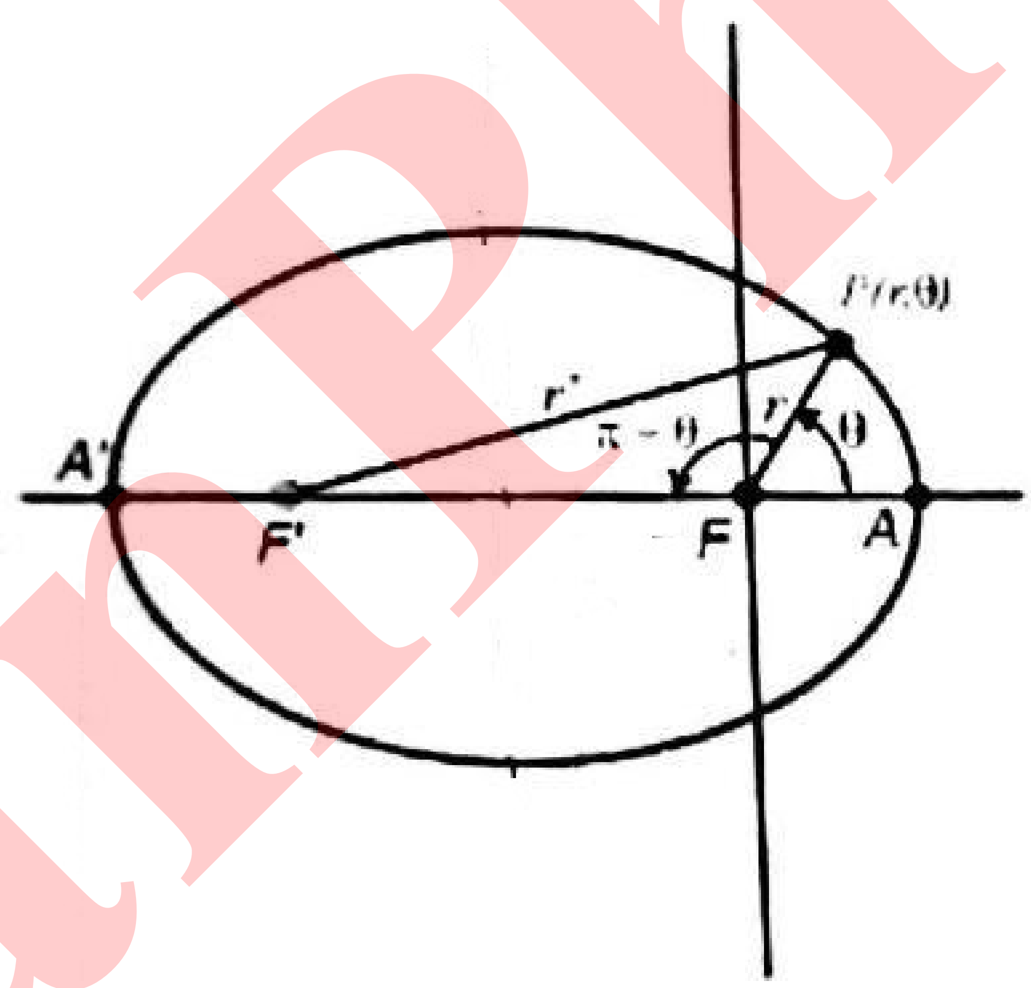
همچنین می دانیم که بین نیم قطر بزرگ، کوچک و خروج از مرکز بیضی (e) رابطه ی $b^2=a^2(1-e^2)$ برقرار است.



• حرکت بسته ی یک جسم تحت اثر نیرویی مرکزی و به فرم عکس مجذوری ($\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$) به صورت یک بیضی خواهد بود که مرکز نیرو منطبق بر یکی از کانون های بیضی خواهد بود. معادله این بیضی در دستگاه مختصاتِ منطبق بر کانون بیضی را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

که در آن θ زاویه ی بین بردار مکان نقطه بر روی بیضی و محور نیم قطر بزرگ بیضی(محور x) است



موفق باشید

باسمه تعالی   فیزیک تئوری نهایی   مدت: ۱۲۰ دقیقه   ۱۲/۶/۹

دکتر سعادت

۸– ذرات ماکروسکوپی کوچک وقتی درون مایعی غوطه‌ور باشند حرکت تصادفی دارند که ناشی از برخورد مولکول‌های مایع به آن‌ها است. این مسئله اولین بار توسط *براون* مشاهده و توسط *لانژون* فرمول‌بندی شد. یک ذره‌ی ماکروسکوپی کوچک کروی به شعاع a و جرم m غوطه‌ور در مایعی با گرانروی μ را در نظر بگیرید. لانژون نیروی وارد بر ذره را دو قسمت کرد: قسمت منظم که ناشی از مقاومت مایع در مقابل حرکت ذره است، $-6\pi a\mu\vec{v}(t)$، که در آن $\vec{v}(t)$ بردار سرعت لحظه‌ای ذره است و قسمتی که دارای افت و خیز است، $\vec{\beta}(t)m$، و متوسطاش صفر است، $\overline{\vec{\beta}(t)} = \vec{0}$. تابع توزیع احتمال در این حرکت تصادفی به متغیرهای t، $\vec{r}$ و $\vec{v}$ بستگی دارد و میانگین گیری‌ها با آن انجام می‌شود. فرض کنید وابستگی به سرعت، ماکسولی است. همچنین افت و خیزهای $\vec{v}$ و $\vec{\beta}$ از هم مستقل‌اند یعنی $\overline{\vec{v}\cdot\vec{\beta}} = \overline{\vec{v}}\cdot\overline{\vec{\beta}}$. دما را T در نظر بگیرید.

آ) قانون دوم نیوتون را برای ذره به جرم m بنویسید. (۱ نمره)

ب) $\overline{\vec{v}}(t)$ را بر حسب سرعت اولیه ذره، $\vec{v}_{\circ}$، به دست آورید. (۱ نمره)

پ) $\overline{r^{2}}(t)$ را به دست آورید که $r^{2} = \vec{r}\cdot\vec{r}$. فرض کنید $r^{2}(\circ) = r_{\circ}^{2}$. (۴ نمره)

ت) با توجه به جوابی که در قسمت ب) به دست آورده‌اید $\vec{v}(t)$ را به دست آورید. (۲ نمره)

راهنمایی: برای تابعی مانند $f(t,t')$:

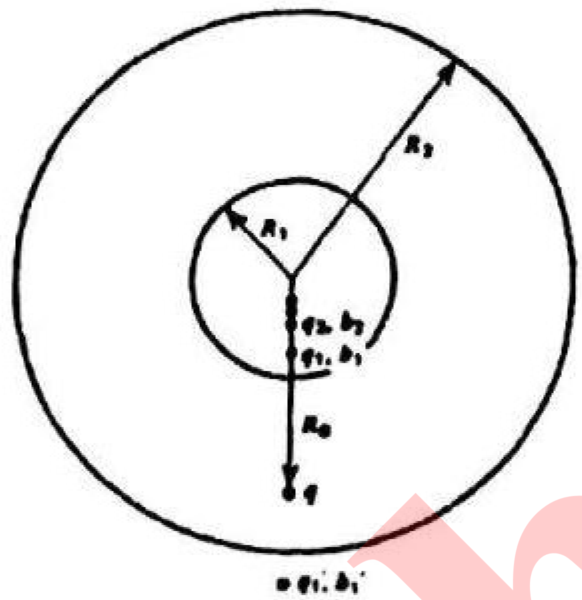
$$\frac{d}{dt}\int_{\circ}^{t} f(t,t')\vec{\beta}(t')dt' = f(t,t)\vec{\beta}(t) + \int_{\circ}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,t')\right]\vec{\beta}(t')dt'$$

ث) فرض کنید $\vec{\beta}(t)$ دارای این خاصیت است که

$$\int_{\circ}^{t}\overline{\vec{\beta}(t')\cdot\vec{\beta}(t'')}f(t',t'')dt'' = f(t',t'), \quad \circ < t', t'' < t$$

$\overline{\vec{v}(t_{1})\cdot\vec{v}(t_{2})}$ را به دست آورید. (۲ نمره)

مسئله ی ۹) مطابق شکل (۱) بار نقطه ای q بین دو کره ی رسانای هم مرکز قرار دارد. کره ها به زمین متصل اند (یعنی پتانسیل صفر دارند) و شعاع آنها R_1 و R_2 است و فاصله ی بار q از مرکز کره ها R_0 است به طوری که $R_1 < R_0 < R_2$. برای این که شرایط مرزی روی دو کره برآورده شود باید بی نهایت بار تصویری در هر دو کره در نظر بگیریم تا پتانسیل روی دو کره صفر شود.



شکل (۱)

اگر بار تصویری n ام در کره ی کوچک تر را با q_n و با فاصله ی b_n از مرکز کره ها، و بار تصویری n ام در کره ی بیرونی را با q'_n و با فاصله ی b'_n از مرکز کره ها باشد، داریم

$$q_{n+1} = -\frac{R_1}{b'_n} q'_n \ , \quad q'_{n+1} = -\frac{R_2}{b_n} q_n$$

$$b_{n+1} = \frac{R_1^{\ 2}}{b'_n} \ , \quad b'_{n+1} = \frac{R_2^{\ 2}}{b_n}$$

که در آن $q'_0 = q_0 = q$ و $b'_0 = b_0 = R_0$ بگیرید.

آ) از رابطه های بالا به رابطه های زیر می توان رسید.

$$q_{n+1} - \alpha q_{n-1} = 0$$

$$b_{n+1} - \beta b_{n-1} = 0$$

مقدارهای α و β را به دست آورید.

ب) جواب های $q_n = A\,\lambda^n$ و $b_n = B\,\gamma^n$ را در نظر بگیرید. اگر این جواب ها، معادله های بخش (آ) را برآورده کنند، دو مقدار برای λ (λ_1, λ_2)، و دو مقدار برای γ (γ_1, γ_2) به دست می آید. مقدارهای λ_1 ، λ_2 ، γ_1 ، و γ_2 را به دست آورید.

ج) با گرفتن ترکیب خطی جواب ها برای q_n و b_n به صورت $q_n = A_1\,\lambda_1{}^n + A_2\,\lambda_2{}^n$ و $b_n = B_1\,\gamma_1{}^n + B_2\,\gamma_2{}^n$ ، دامنه های A_1 ، A_2 ، B_1 ، و B_2 را بر حسب R_1 ، R_2 ، R_0 و q به دست آورید.

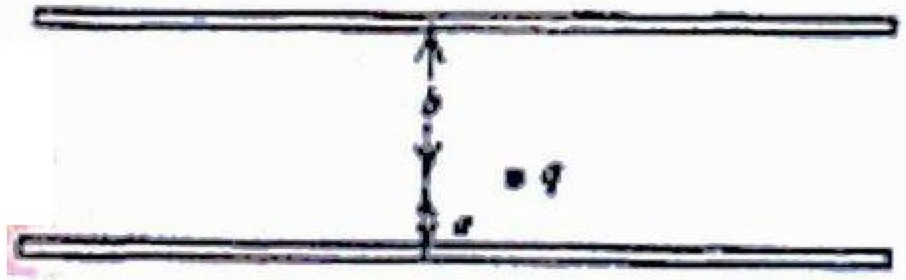
د) از روی مقدارهای به دست آمده در بخش (ج)، q_n ها و b_n ها را بر حسب R_1 ، R_2 ، R_0 و q به دست آورید.

ه) بار کل القا شده روی کره ی داخلی با شعاع R_1 را به ساده ترین شکل ممکن به دست آورید.

و) با توجه به قسمت های قبل مقدارهای q'_n و b'_n را به دست آورید.

ز) بار کل القا شده روی کره ی بیرونی با شعاع R_2 را به دست آورید.

ح) حال فرض کنید مطابق شکل (۲) دو صفحه ی رسانای طویل موازی هم اند و به زمین متصل اند. بار نقطه ای q با فاصله ی a از رسانای پایینی و با فاصله ی b از رسانای بالایی است. با توجه به مقدارهای به دست آمده در قسمت های قبل، بار کل القا شده روی دو صفحه ی رسانا را بر حسب a و b و q به دست آورید.



شکل (۲)