باسمه تعالی

تمرین سری هفتم درس کدگذاری کانال نام استاد: خانی

پرسش های فصل ۴-قسمت دوم (**توجه: تمرین ها با تأخیر پذیرفته نخواهد شد.**)

۱- چند جمله‌ای $X^7+1$ به صورت $X^7+1=(1+X)(1+X+X^3)(1+X^2+X^3)$ قابل تجزیه است. در این صورت الف) کلیه کدهای گردشی با طول ۷ که در آنها k برابر ۳ یا ۴ است را مشخص کرده و چندجمله‌ای‌های مولد و پریتی-چک آنها را مشخص نمایید. (از نتایج پرسش ۱ سری پیشین استفاده نمایید.) ب) قابلیت تشخیص و قابلیت تصحیح هر یک از کدهای قسمت الف چقدر است؟ ج) در مورد قدرت آشکارسازی خطاهای گروهی توسط هر یک از کدهای قسمت الف اظهار نظر کنید. د) در هر کد ماتریس مولد را وقتی کد **سیستماتیک** است مشخص کنید. ه) در هر کد ماتریس مولد را وقتی کد **غیرسیستماتیک** است مشخص کنید. و) با استفاده از شیفت رجیسترها و جمع‌کننده‌های مبنای ۲، مدار کدبردار Meggitt1 را برای هر یک از کدهای قسمت الف رسم کنید. ز) چندجمله‌ای مولد کدهای دوگان را برای کدهای قسمت الف بیابید؟

*راهنمایی ۱: یک کد گردشی $c(n,k)$ می تواند کلیه خطاهای گروهی (شامل خطاهای انتهایی) با طول $n-k$ و کمتر را تشخیص دهد؛ و همچنین تعداد $n(2^{n-k-1}-1)$ خطای گروهی (شامل خطاهای انتهایی) با طول $n-k+1$ و تعداد $n(2^{l-2}-2^{l-(n-k)-2})$ خطای گروهی (شامل خطاهای انتهایی) با طول $l>n-k+1$ را تشخیص دهد. به عبارت دیگر، این کد می تواند همه خطاهای گروهی با طول $n-k$ و کمتر و $2^{-(n-k-1)}$ از خطاهای گروهی با طول $n-k+1$ و $2^{-(n-k)}$ از خطاهای گروهی با طول بیشتر از $n-k+1$ را آشکارسازی کند که این خطاها شامل خطاهای انتهایی نیز می‌باشد.

*راهنمایی ۲: یک کد بلوکی خطی $c(n,k)$ با فاصله کمینه $d_{min}$ می تواند همواره $d_{min}-1$ بیت خطا را در بردار دریافتی تشخیص داده و $\left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$ بیت خطا را در بردار دریافتی تصحیح کند که به $d_{min}-1$ قابلیت تشخیص کد و به $\left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$ قابلیت تصحیح کد گفته می شود. همچنین این کد می تواند $2^{n-k}-1$ بردار خطای غیرصفر متمایز را تصحیح کند و $2^n-2^k$ بردار خطای غیرصفر متمایز را تشخیص دهد.

راهنمایی ۳: چندجمله‌ای مولد کد دوگانِ کدِ $c(n,k)$ با چندجمله‌ای پریتی-چک $h(x)$ برابر است با چندجمله‌ای متقابل $h(x)$ یعنی $x^k h(1/x)$

۲- کد گردشی **سیستماتیک** $C(7,4)$ با چندجمله‌ای مولد $g(X)=1+X^2+X^3$ را در نظر بگیرید. الف) کدگذار این کد را با استفاده از مدارهای منطقی پیاده سازی کنید. ب) بردار پیام $\underline{\boldsymbol{u}}=[1\ 0\ 1\ 0]$ به کدام بردار کدگذاری می‌شود؟ ج) اگر بردار کد $\underline{\boldsymbol{c}}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]$ ارسال شود و بردار $\underline{\boldsymbol{r}}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$ دریافت شود، روند آشکارسازی با کدبردار *Meggit1* را دنبال کنید. (راهنمایی: مشابه شکل *4.10* صفحه ۱۰۸ مرجع عمل کنید.) د) آیا بردار دریافتی به بردار $\underline{\boldsymbol{c}}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]$ کدبرداری می شود؟ ه) بردار خطایی که در کانال

رخ داده است را مشخص کنید؟ و) آیا این بردار خطا قابل تصحیح است؟ چرا؟ ز) بردار پیام کدبرداری شده یعنی $\underline{\hat{u}}$ را مشخص کنید؟

۳- نشان دهید $g(x)=1+x^2+x^4+x^6+x^7+x^{10}$ یک کد گردشی $(21, 11)$ تولید می کند. الف) مدار محاسبه سندروم و تشخیص خطا را برای این کد طراحی کنید. ب) اگر $r(x)=1+x^5+x^{17}$ چندجمله‌ای دریافتی باشد، سندروم آنرا با استفاده از مدار قسمت قبل محاسبه کنید. محتویات رجیستر سندروم را به ازای هر شیفت مشخص کنید.

۴- نشان دهید اگر چندجمله‌ای مولد کد گردشی $c(n,k)$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد، وزن تمامی بردارهای کد زوج خواهد بود.

۵- کد گردشی $c(n,k)$ با چندجمله‌ای مولد $g(x)$ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای متقابل $g(x)$ به صورت $g^*(x)=x^{n-k}g(1/x)$ تعریف می‌شود.
الف) نشان دهید $g^*(x)$ نیز یک کد گردشی مانند $c^*(n,k)$ می‌سازد.
ب) نشان دهید که توزیع وزن کلمات کد $c$ و $c^*$ یکسان است.
(راهنمایی: نشان دهید $v(x)=v_0+v_1x+...+v_{n-1}x^{n-1}$ یک چندجمله‌ای کد در $c$ است اگر و تنها اگر $v^*(x)=x^{n-1}v(1/x)=v_{n-1}+v_{n-2}x+...+v_0x^{n-1}$ یک چندجمله ای کد در $c^*$ باشد.)

۶- نشان دهید اگر چندجمله‌ای خطای $e(x)$ قابل تشخیص (آشکارسازی) باشد، شیفت یافته حلقوی آن به سمت راست به اندازه $i$ موقعیت یعنی $e^{(i)}(x)$ نیز قابل تشخیص است.

۷- کد گردشی $c(n,k)$ با چندجمله ای مولد $g(x)$ را در نظر بگیرید.
الف) نشان دهید $g(x^\lambda)$ یک کد گردشی $c(n^\lambda,k^\lambda)$ تولید می کند.
ب) نشان دهید که وزن کمینه کد تولید شده توسط چندجمله‌ای مولد $g(x^\lambda)$ برابر است با وزن کمینه کد $c$.

۸- فرض کنید $c_1$ و $c_2$ دو کد گردشی با طول $n$ هستند که به ترتیب توسط چندجمله‌ای‌های مولد $g_1(x)$ و $g_2(x)$ تولید شده‌اند.
الف) نشان دهید که اشتراک کلمات کد $c_1$ و $c_2$ نیز یک کد گردشی مثل $c_3$ با طول $n$ درست می‌کند.
ب) چندجمله‌ای مولد $c_3$ چگونه تشکیل می‌شود.
ج) اگر کمینه فاصله کدهای $c_1$ و $c_2$ به ترتیب $d_1$ و $d_2$ باشد، در این صورت در مورد کمینه فاصله $c_3$ چه می‌توان گفت؟

پیروز باشید.