فصل هشتم

مدارهای RL و RC

مفاهیم کلیدی

- ثابت‌های زمانی RL و RC
- پاسخ طبیعی واداشته
- محاسبه پاسخ وابسته به زمان برای محرک DC
- چگونگی تعیین مقادیر اولیه و اثر آنها در پاسخ مدار
- تحلیل مدارها با ورودی پله و با سوئیچ‌ها
- ایجاد امواج پالسی با توابع پله واحد
- پاسخ مدارهایی که به طور متوالی سوئیچ شده‌اند

مقدمه

در فصل ۷ معادلات حاکم بر پاسخ چند مدار حاوی القاگر و خازن را نوشتیم، ولی هیچ‌یک از آن‌ها را حل نکردیم. در این‌جا آماده‌ایم تا با حل معادلات ساده‌تر پیش رفته، توجه خود را به آن‌هایی که حاوی مقاومت و القاگر و یا مقاومت و خازن هستند، معطوف داریم.

گرچه مدارهایی که مایلیم آن‌ها را بررسی کنیم ظاهری ساده دارند، ولی دارای اهمیت عملی هستند. این‌گونه شبکه‌ها در مدارهای تقویت‌کننده الکترونیک سیستم‌های کنترل خودکار، تقویت‌کننده‌های عملیاتی، تجهیزات مخابراتی و بسیاری از کاربردهای دیگر مورد استفاده‌اند. آشنایی با این مدارهای ساده ما را قادر می‌سازد تا پیش‌بینی کنیم که خروجی یک تقویت‌کننده در دنبال‌کردن تغییرات ورودی چه دقتی دارد و یا ببینیم تغییر سرعت یک موتور در پاسخ به تغییر میدان حاصل از جریان چگونه است. درک ما از رفتار مدارهای ساده RC و RL موجب می‌شود تا اصلاحاتی بر تقویت‌کننده یا موتورها صورت دهیم تا پاسخی مطلوب‌تر حاصل گردد.

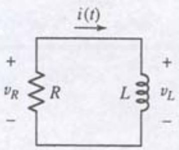
۸ـ۱ مدار RL بدون منبع

تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و یا خازن‌دار به فرمول‌بندی و حل معادله انتگرال ـ مشتق توصیف‌کننده مدار وابسته است. معادله خاصی راکه به دست می‌آوریم، معادله **دیفرانسیل خطی همگن** می‌نامیم و در واقع معادله دیفرانسیلی است که در آن هر جمله مرتبه اول متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن است. برای این مدار هنگامی حلی به‌دست‌می‌آید که برای متغیر مستقل تابعی بیابیم و این تابع در معادله دیفرانسیل صدق کند و نیز توزیع اولیه انرژی در زمان خاصی، مثل $t = 0$ را نیز برآورده نماید.

حل معادله دیفرانسیل معمولاً پاسخ مدار را نشان می‌دهد و نام‌های متعددی برای آن انتخاب شده است. چون این پاسخ به طبیعت کلی مدار (نوع عناصر، ابعاد آن‌ها و اتصالات درونی آن‌ها) بستگی دارد، اغلب آن را **پاسخ طبیعی** می‌خوانند. با این وجود مدارهای واقعی ساخته ما نمی‌توانند انرژی را تا ابد در خود ذخیره کنند و مقاومت ذاتی خازن‌ها و القاگرها نهایتاً همه انرژی را به گرما تبدیل می‌کند. پاسخ نهایتاً از بین می‌رود و به این دلیل غالباً به آن **پاسخ گذرا** هم می‌گویند. باید با اصطلاح به‌کاررفته به وسیله ریاضی‌دانان نیز آشنا شویم. آن‌ها پاسخ یک معادله دیفرانسیل خطی همگن را تابع مکمل می‌نامند.

وقتی منابع مستقلی بر مداری عمل کنند، بخشی از پاسخ به طبیعت منبع خاص (یا تابع محرک) به‌کاررفته بستگی دارد. این بخش از پاسخ را حل خصوصی یا پاسخ ماندگار و یا پاسخ واداشته می‌نامیم که با پاسخ تولیدشده در مدار عادی از منبع ممکن می‌گردد. در این صورت پاسخ کامل مدار از جمع تابع مکمل، حل خصوصی به‌دست‌می‌آید. به بیان دیگر، پاسخ کامل مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته است. پاسخ بی‌منبع را **پاسخ طبیعی**، **پاسخ گذرا**، **پاسخ آزاد** یا **تابع مکمل** هم می‌گویند. ولی به دلیل طبیعت توصیفی‌اش آن را پاسخ طبیعی خواهیم خواند.

برای حل این معادلات دیفرانسیل چندین روش مختلف را ملاحظه خواهیم کرد. با این وجود دستکاری‌های ریاضی، تحلیل مدار نیست. بیشترین توجه ما به خود حل، مفهوم و تفسیر آن است و سعی خواهیم کرد بقدر کافی با فرم پاسخ آشنا شویم تا بتوانیم با کمی تفکر جواب یک مدار جدید را بنویسیم. گرچه به هنگام عدم موفقیت در روش‌های ساده روش‌های تحلیلی پیچیده‌تری لازم است، ولی درکی که بخوبی ایجاد شده باشد منبعی ارزشمند است.



شکل ۸ـ۱ یک مدار ساده RL که $i(t)$ آن باید به ازای شرط اولیهٔ $i(0) = I_0$ تعیین شود.

مطرح‌نمودن وجود جریان متغیر با زمان در مداری بدون منبع خیلی عجیب به‌نظرمی‌رسد! به یاد داشته باشید که فقط جریان در $t = 0$ را می‌دانیم؛ جریان قبل از این زمان مشخص نیست و نیز نمی‌دانیم مدار قبل از $t = 0$ چگونه بوده است. برای وجود جریان باید منبعی وجود داشته باشد، ولی از آن اطلاعی نداریم. خوشبختانه برای تحلیل مدار داده‌شده به این اطلاعات نیازی نیست.

ما مطالعه خود را با تحلیل گذرا و ملاحظه مدار سری شکل ۸ـ۱ آغاز می‌کنیم. بیایید جریان متغیر با زمان را $i(t)$ بخوانیم. ما مقدار $i(t)$ را در $t = 0$ با I_0 نشان می‌دهیم، به بیان دیگر $i(0) = I_0$ است. بنابراین داریم:

$$Ri + v_L = Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

یا

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad (۱)$$

هدف یافتن عبارتی برای $i(t)$ است تا در این معادله صدق کند و نیز در $t = 0$ جریان برابر I_0 باشد. حل را به چند روش می‌توان به‌دست‌آورد.

روند مستقیم

یک روش بسیار سرراست برای حل معادله دیفرانسیل این است‌که متغیرها از یکدیگر جدا شوند و سپس از هر سمت معادله انتگرال بگیریم. متغیرهای موجود در معادله (۱) عبارتند از i و t و واضح است که می‌توان معادله را در dt ضرب، بر i تقسیم و با تفکیک متغیرها آن را مرتب نمود:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \qquad (۲)$$

چون جریان در $t = 0$ برابر I_0 و در زمان t نیز $i(t)$ است، می‌توانیم از دو طرف معادله بین مقادیر متناظر انتگرال بگیریم:

$$\int_{I_0}^{i(t)}\frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt'$$

با اجرای انتگرال‌گیری،

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

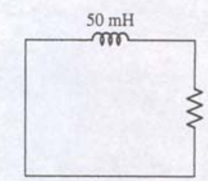
و بنابراین:

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t - 0)$$

پس از کمی دستکاری جریان $i(t)$ مطابق رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L} \qquad (۳)$$

جواب را با گذاشتن معادله (۳) در معادله (۱) و رسیدن به اتحاد $0 = 0$ چک کنید و سپس نشان دهید که جایگزینی $t = 0$ در معادله (۳)، $i(0) = I_0$ را نتیجه می‌دهد. هر دو مرحله الزامی‌اند، جواب هم باید در معادله دیفرانسیل صدق کند و هم شرایط اولیه را تأیید نماید.



شکل ۸ـ۲ یک مدار ساده RL که در آن انرژی در القاگر در $t = 0$ ذخیره شده است.

مثال ۸ـ۱

اگر القاگر شکل ۸ـ۲ دارای جریان $i_L = 2$ A در زمان $t = 0$ باشد، عبارتی برای $i_L(t)$ معتبر در $t > 0$ بیابید و مقدار آن را در $t = 200\ \mu s$ پیداکنید.

این مشابه با مداری است که در قسمت‌های قبل بررسی شد، بنابراین انتظار داریم که جریان القاگر چنین باشد:

$$i_L(t) = I_0e^{-R/Lt}$$

که $R = 200\ \Omega$، $L = 50$ mL و I_0 مقدار اولیه جریان در القاگر در $t = 0$ است. پس:

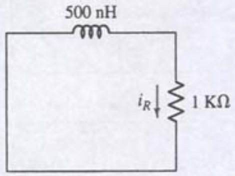
$$i_L(t) = 2e^{-4000t}$$

با جایگزینی $t = 200 \times 10^{-6}$s داریم $i_L(t) = 898.7$ mA که کمتر از نصف مقدار اولیه می‌باشد.

تمرین

۸ـ۱ اگر $i_R(0) = 6$ A باشد جریان i_R را در داخل مقاومت شکل ۸ـ۳ در $t = 1$ ns به دست آورید.

جواب: 812 mA



شکل ۸ـ۳ مدار تمرین ۸ـ۱

روندی دیگر

حل را می‌توان با روشی که کمی با روش بالا تفاوت دارد نیز به‌دست‌آورد. پس از تفکیک متغیرها، می‌توان از طرفین معادله (۲) انتگرال نامعین گرفت و یک ثابت انتگرال‌گیری هم وارد حل کرد. بنابراین:

$$\int\frac{di}{i} = -\int\frac{R}{L}dt + K$$

که نتیجه می‌شود:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \qquad (۴)$$

از جایگزینی معادله (۴) در معادله دیفرانسیل اولیه (۱) نمی‌توان ثابت K را مشخص کرد. البته اتحاد $0 = 0$ حاصل می‌گردد زیرا معادله (۴) حل معادله (۱) در قبال هر مقداری از K است. ثابت انتگرال باید مقدار اولیه $i(0) = I_0$ را تأیید نماید. بنابراین در $t = 0$ معادله (۴) برابر است با:

$$\ln I_0 = K$$

این مقدار K را در معادله (۴) قرار می‌دهیم تا پاسخ مطلوب به‌دست‌آید:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

یا

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L}$$

که مثل قبل است.

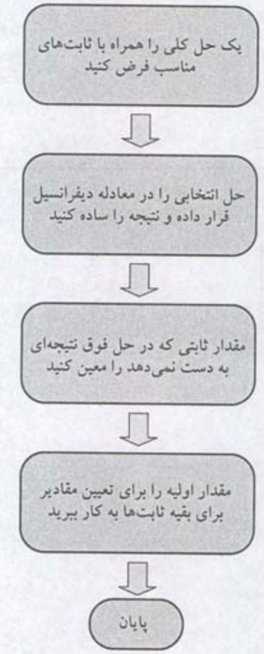
روند کلی‌تر حل

هنگامی‌که متغیرها تفکیک‌پذیر باشند هر یک از روش‌های فوق قابل استفاده‌اند، ولی همواره چنین نیست. در ادامه بحث، ما بر روشی قویتر تکیه خواهیم کرد که موفقیت در آن به بصیرت و تجربه ما وابسته است. در این روش جوابی را حدس می‌زنیم یا فرض می‌کنیم، سپس آن را در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم و آنگاه فرضیات را تست می‌نماییم و این کار را با جایگزینی فرض در معادله دیفرانسیل بعد با اعمال مقادیر اولیه انجام می‌دهیم. چون انتظار نمی‌رود که عبارت عددی دقیقی را برای حل حدس بزنیم حل را حاوی چندین ثابت نامعلوم و انتخاب مقدار برای این ثابت‌ها انتخاب می‌نماییم، تا در معادله دیفرانسیل صدق کرده و مقدار اولیه را تأیید کند. حل بسیاری از معادلات دیفرانسیلی که ما با آن‌ها مواجهیم با تابعی نمایی یا مجموعی از توابع نمایی نشان داده می‌شود. بیایید حل معادله (۱) را با فرم نمایی زیر نشان دهیم:

$$i(t) = Ae^{s_1t} \qquad (۵)$$

که A و s_1 ثابت‌هایی هستند که باید معین شوند. پس از جایگزینی این حل مفروض در معادله (۱) داریم:

$$As_1e^{s_1t} + A\frac{R}{L}e^{s_1t} = 0$$



شکل ۸ـ۴ فلوچارت برای روش کلی. برای حل معادلات مرتبه اول، مبتنی بر تجربه، می‌توان فرم حل را حدس زد.

یا

$$(s_1 + \frac{R}{L})\, Ae^{s_1 t} = 0 \qquad (۶)$$

برای صحت این معادله در همه زمان‌ها، لازم است $A = 0$ یا $s_1 = -\infty$، یا $s_1 = -\frac{R}{L}$ باشد. و اما اگر $A = 0$ یا $s_1 = -\infty$ باشد، آنگاه پاسخ همیشه صفر است، که نمی‌تواند حل مسئله ما باشد. بنابراین باید جواب زیر را انتخاب کنیم:

$$s_1 = -\frac{R}{L} \qquad (۷)$$

و حل مربوط به شکل زیر خواهد بود:

$$i(t) = Ae^{-Rt/L}$$

ثابت باقیمانده باید با اعمال مقدار اولیه $i(0) = I_0$ به‌دست‌آید. بنابراین $A = I_0$ شده و فرم نهایی حل موردنظر مجدداً مطابق زیر است:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

خلاصه‌ای از روش اصلی در شکل ۸ـ۴ ارائه شده است.

در واقع راه مستقیم‌تری برای انتخاب وجود دارد. با معادله (۷) داریم:

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \qquad (۸)$$

که به معادله مشخصه معروف است. ما می‌توانیم معادله مشخصه را مستقیماً از معادله دیفرانسیل به دست آوریم بدون آن‌که به جایگزینی حل فرضی در معادله نیاز باشد. معادله دیفرانسیل زیر را درنظربگیرید:

$$a\frac{df}{dt} + bf = 0$$

که a و b مقادیر ثابت‌اند. ما s^1 را به جای $\frac{df}{dt}$ و s^0 را به جای f به کار می‌بریم که نتیجه چنین است:

$$a\frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

از این رابطه مستقیماً معادله مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$as + b = 0$$

که یک ریشه در $s = -\frac{b}{a}$ دارد. آنگاه حل معادله دیفرانسیل چنین خواهد شد:

$$f = Ae^{-bt/a}$$

این روش ساده به راحتی به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل توسعه است، و ما آن را در فصل ۹ خواهیم دید.

مثال ۸ـ۲

برای مدار شکل ۸ـ۵ (الف)، جریان داخل القاگر 5H را در $t = 200ms$ بیابید.

- **هدف مسئله را شناسایی کنید.**

شماتیک شکل ۸ـ۵ (الف) در واقع دو مدار مختلف را نشان می‌دهد: یکی با کلید بسته و دیگری با کلید باز. برای اجرای تحلیل، لازم است تا دو مدار طبق شکل‌های ۸ـ۵ (ب) و (ج) ترسیم شود. می‌خواهیم جریان i_L را طبق شکل ۸ـ۵ (ج) در $t = 200ms$ بیابیم.

- **اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.**

هرگاه مدار را ترسیم کردیم، باید مطمئن شویم که کار را صحیح انجام داده‌ایم. ما مقادیر عناصر و جریان i را روی هر مدار به دقت مشخص کرده‌ایم. باید فرض کنیم که مدار

شکل ۸ـ۵ (ب) مدت‌ها به همین فرم وصل بوده و هر تأثیرگذاری حاصل از منبع 24V که هنگام روشن‌شدن وجود دارد، مدت‌ها است که از بین رفته است.

- **ارائه طرح.**

با نوشتن معادله KVL می‌توان شکل ۸ـ۵ (ج) را تحلیل کرد. نهایتاً ما معادله دیفرانسیلی می‌خواهیم با v و t به‌عنوان متغیر؛ این خود معادلاتی اضافی همراه با جایگزینی‌ها را لازم دارد. آنگاه معادله را برای $v(t)$ حل می‌کنیم.

- **معادلات مناسب را بنویسید.**

با مراجعه به شکل ۸ـ۵ (ج) می‌توان نوشت:

$$-v + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

از جایگزینی $i_L = -v/40$ داریم:

$$\frac{5}{40}\frac{dv}{dt} + (\frac{10}{40} + 1)\, v = 0$$

یا ساده‌تر

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \qquad (۹)$$

- **آیا اطلاعات دیگری لازم است.**

با توجه به تجربه قبلی می‌دانیم که یک عبارت کامل برای v نیاز به شناخت v در یک لحظه خاص از زمان دارد که $t = 0$ بهترین آن است. ما می‌توانیم به شکل ۸ـ۵ (ب) نگاه کرده و $v(0) = 24$ را بنویسیم، ولی این فقط برای قبل از بازشدن سوئیچ صحیح است. ولتاژ مقاومت در لحظه تعویض وضعیت کلید هر چیزی می‌تواند باشد و تنها چیزی که تغییر نمی‌کند جریان القاگر است.

در مدار شکل ۸ـ۵ (ب) $i_L = \frac{24}{10} = 2.4$ A است، زیرا القاگر مثل یک اتصال کوتاه به یک جریان dc عمل می‌کند. بنابراین $i_L(0) = 2.4$ A در مدار شکل ۸ـ۵ (ج) خواهد بود ـ که نقطه کلیدی در تحلیل این نوع مدار است. بنابراین در مدار شکل ۸ـ۵ (ج) $v(0) = (40)(-2.4) = -9.6$ V است.

- **اقدام به حل.**

هر یک از سه روش حل را می‌توان انتخاب کرد. بر اساس تجربه، اجازه بدهید با نوشتن معادله مشخصه متعلق به معادله (۹) شروع کنیم:

$$s + 10 = 0$$

با حل آن داریم $s = -10$، یا

$$v(t) = Ae^{-10t} \qquad (۱۰)$$

که پس از جایگزینی در سمت چپ معادله (۹) داریم:

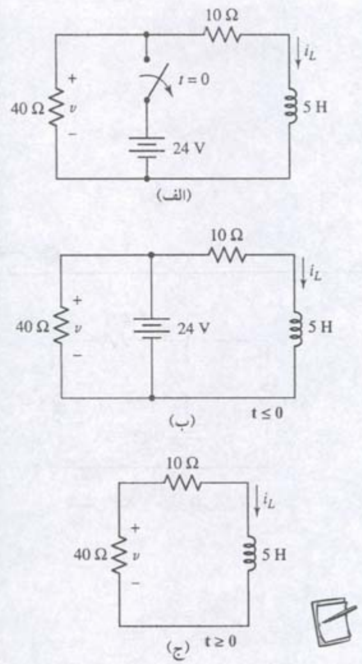
$$-10Ae^{-10t} + 10Ae^{-10t} = 0$$

(که انتظار آن را داریم).

ما A را با $t = 0$ در معادله (۱۰) و این‌که $v(0) = -96$ V است، به دست می‌آوریم. بنابراین:

$$v(t) = -96e^{-10t} \qquad (۱۱)$$

و بنابراین $v(0.2) = -12.99$ V می‌باشد که از -96 V به آن رسیده است.



شکل ۸ـ۵ (الف) یک مدار ساده RL که در $t = 0$ سوئیچ در آن باز شده است. (ب) مدار قبل از $t = 0$ و (ج) مدار پس از قطع کلید.

- **صحت حل را تحقیق کنید.**

ما می‌توانیم جریان القاگر را با توجه به این حقیقت که القاگر مقاومتی $50\ \Omega$ را در شکل ۸ـ۵(ج) دارد، ببینیم. بنابراین یک ثابت زمانی $\tau = 50/5 = 10\ \text{s}$ را خواهیم داشت.
اکنون با توجه به این‌که $i_L(0) = 2.4\ \text{A}$ است می‌توان نوشت:

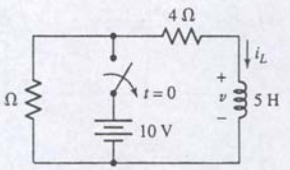
$$i_L(t) = 2.4e^{-10t}A \qquad t > 0$$

از قانون اهم $v(t) = -40i_L(t) = -96e^{-10t}$ خواهد شد که همان معادله (۱۱) را داریم.
این یک اتفاق نیست که جریان القاگر و ولتاژ مقاومت دارای وابستگی نمایی یکسانی هستند.

تمرین

۸ـ۲ ولتاژ القاگر v را در مدار شکل ۸ـ۶ برای $t > 0$ معین کنید.

پاسخ: $-25e^{-2t}\text{V}$.



شکل ۸ـ۶ مدار تمرین ۸ـ۲

محاسبه انرژی

قبل از این‌که به تفسیر پاسخ بپردازیم، بگذارید به شکل ۸ـ۱ برگردیم و رابطه توان و انرژی را در این مدار چک کنیم. توان تلف‌شده در مقاومت برابر است با:

$$p_R = i^2R = I_0^2 Re^{-2Rt/L}$$

و انرژی کل تبدیل‌شده در مقاومت به گرما با انتگرال توان از لحظه صفر تا زمان معین حاصل می‌گردد:

$$w_R = \int_0^\infty p_R\,dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L}\,dt$$
$$= I_0^2 R\left(\frac{-L}{2R}\right) e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}L\,I_0^2$$

این جوابی است که انتظار آن را داریم، زیرا انرژی کل ذخیره‌شده اولیه در القاگر $\frac{1}{2}\text{L}\,\text{I}_0^2$ است و پس از گذشت زمان طولانی هیچ انرژی در القاگر باقی نمی‌ماند. بنابراین تمام انرژی اولیه در مقاومت مصرف خواهد شد.

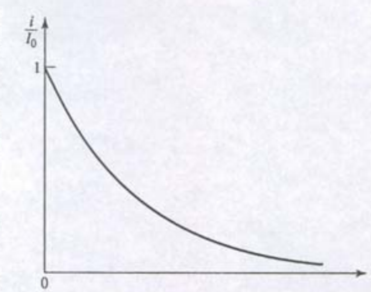
۸ـ۲ خواص پاسخ نمایی

اکنون بیایید طبیعت پاسخ را در مدار RL سری ملاحظه کنیم. دیدیم که جریان القاگر فرم زیر را دارد:

$$i(\text{t}) = \text{I}_0\text{e}^{-\text{Rt/L}}$$

در $\text{t} = 0$، جریان مقدار I_0 را داراست، ولی با گذشت زمان، جریان به صفر کاهش می‌یابد. این کاهش نمایی با رسم $i(\text{t})/\text{I}_0$ در برابر t در شکل ۸ـ۷ نشان داده شده است. چون تابع ترسیمی $\text{e}^{-\text{Rt/L}}$ است، اگر R/L بدون تغییر باشد منحنی تغییر نخواهد کرد، بنابراین برای هر مدار RL سری که نسبت R/L یا L/R ثابتی داشته باشد، منحنی یکسانی به‌دست خواهد آمد. بگذارید نشان دهیم که چگونه این کسر روی شکل منحنی تأثیر می‌گذارد.

اگر نسبت L به R را دو برابر کنیم، و اگر t نیز دوبرابر شود، آن‌گاه نما تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر پاسخ اصلی در مدت طولانی‌تری رخ می‌دهد و در منحنی جدید باید هر نقطه منحنی قبل را به اندازه دوبرابر فاصله تا محور عمودی به سمت راست ببریم، با این نسبت بزرگ‌تر L/R، جریان زمان بیشتری را لازم خواهد داشت تا به کسری از مقدار اولیه خود برسد. دلمان می‌خواهد بگوییم که عرض منحنی زیاد شده است یا این‌که عرض متناسب با L/R است. با این وجود طرح تعریف عرض مشکل است زیرا هر منحنی از $\text{t} = 0$ تا بی‌نهایت طول می‌کشد! به‌جای این‌کار زمان لازم برای رسیدن جریان به صفر را اگر با همان آهنگ اولیه کاهش یابد، به‌دست می‌آوریم.



شکل ۸ـ۷ نمودار $\text{e}^{-\text{Rt/L}}$ برحسب t.

آهنگ اولیه کاهش جریان را با ارزیابی مشتق در زمان صفر به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\frac{i}{\text{I}_0}\Big|_{t=0} = -\frac{\text{R}}{\text{L}}\,\text{e}^{-\text{Rt/L}}\Big|_{t=0} = -\frac{\text{R}}{\text{L}}$$

زمان لازم برای این‌که i/I_0 با آهنگ کاهش ثابت، از 1 به صفر برسد را با حرف یونانی τ نشان می‌دهیم. به‌این‌ترتیب:

$$\left(\frac{\text{R}}{\text{L}}\right)\tau = 1$$

یا

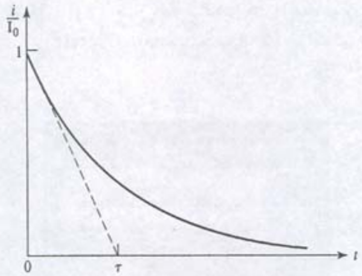
$$\boxed{\tau = \frac{\text{L}}{\text{R}}} \tag{۱۲}$$

کسر L/R دارای واحد ثانیه است زیرا Rt/L- باید بدون بعد باشد. این زمان τ را ثابت زمانی می‌نامند و در شکل ۸ـ۸ به تصویر کشیده شده است، ثابت زمانی یک مدار RL سری را می‌توان به‌طور گرافیکی از منحنی پاسخ هم به‌دست‌آورد. برای این‌کار فقط کافی است که خط مماس را بر منحنی در $\text{t} = 0$ رسم کرده و محل تقاطع آن با محور زمان را به‌دست‌آوریم. معمولاً این بهترین راه به‌دست‌آوردن ثابت زمانی تقریبی از صفحه‌نمایش اسیلوسکپ است.

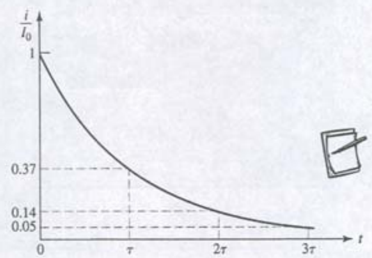
تعبیر هم‌ارزشی از ثابت زمانی τ را می‌توان از $i(\text{t})/\text{I}_0$ در $\text{t} = \tau$ به‌دست‌آورد. داریم:

$$\frac{i(\tau)}{\text{I}_0} = \text{e}^{-1} = 0.3679 \quad \text{یا} \quad i(\tau) = 0.3679\ \text{I}_0$$

بنابراین در یک ثابت زمانی، پاسخ به %36.8 مقدار اولیه‌اش افت می‌کند. τ را می‌توان با استفاده از این تعبیر هم طبق شکل ۸ـ۹ به‌دست‌آورد. بهتر است افت جریان را در فواصل یک ثابت زمانی اندازه بگیریم. با مراجعه به یک ماشین حساب یا جدول نماهای منفی می‌بینیم که نسبت $i(\text{t})/\text{I}_0$ در $\text{t} = \tau$ برابر است با 0.3679، در $\text{t} = 2\tau$ برابر 0.1353 و در $\text{t} = 3\tau$ برابر است با 0.04979، در $\text{t} = 4\tau$ برابر 0.01832 و در $\text{t} = 5\tau$ هم 0.006738 است. اغلب قبول داریم در زمانی بین 3 الی 5 ثابت زمانی جریان به کسر کوچکی از مقدار اولیه‌اش می‌رسد. بنابراین سوال ممکن است چنین باشد "چقدر طول می‌کشد تا جریان به صفر برسد؟" پاسخ شاید چنین باشد، "حدود پنج ثابت زمانی". دراین‌جا جریان حدود %1 مقدار اولیه‌اش خواهد بود.



شکل ۸ـ۸ ثابت زمانی t برای مدار RL سری، L/R است و آن زمانی است که طی آن اگر نمودار با همان آهنگ کاهش اولیه نزول کند، مقدار به صفر می‌رسد.



شکل ۸ـ۹ جریان در مدار سری RL در زمان τ، 2τ و 3τ به ترتیب 37، 14 و 5 درصد مقدار اولیه خود را دارد.

تمرین

۸ـ۳ در یک مدار بدون منبع RL سری، مقدار عددی کسرهای زیر را به‌دست‌آورید:

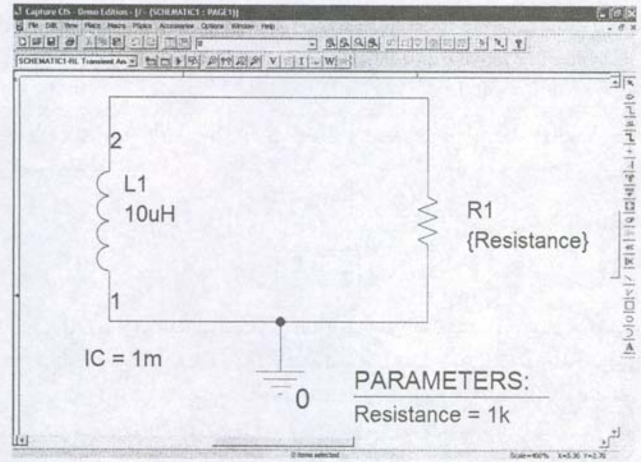
(الف) $i(2\tau)/i(\tau)$، (ب) $i(0.5\tau)/i(0)$، (ج) t/τ اگر $i(\text{t})/i(0) = 0.2$ باشد، (د) t/τ اگر $i(0) - i(\text{t}) = i(0)\ \ln 2$ باشد.

جواب: 0.368، 0.607، 1.609 و 1.181.

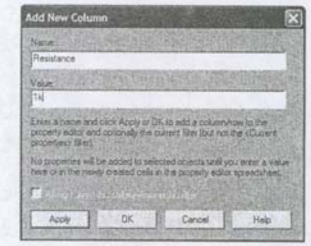
تحلیل کامپیوتری

توانمندی تحلیل گذرای PSpice هنگام توصیف مدارهای بدون منبع بسیار مفید است. در این مثال، از امکان خاصی استفاده می‌کنیم که به ما اجازه می‌دهد تا پارامتر قطعه را مثل تغییر ولتاژ dc در دیگر شبیه‌سازی‌ها تغییر دهیم. به این منظور عنصر PARAM را به شماتیک می‌افزاییم. ما آن را در هر جایی قرار می‌دهیم ولی به مدار وصل نمی‌کنیم. مدار کامل RL در شکل ۸ـ۱۰ نشان داده شده است، که شامل جریان اولیه 1mA در القاگر است.

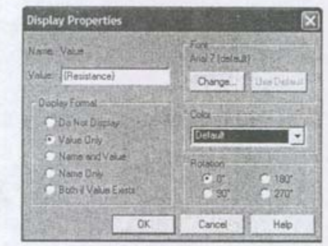
برای این‌که مقدار مقاومت را به پارامتر مرتبط سازیم، باید دو کار انجام دهیم. ابتدا این‌که اسمی برای پارامتر خود انتخاب کنیم، که ما آن را به خاطر سادگی "مقاومت" می‌خوانیم. این کار با دو بار کلیک بر روی :PARAMETERS صورت می‌گیرد، یعنی برچسبی در شماتیک که Property Editor را برای این شبه‌قطعه باز می‌کند. کلیک بر روی New Column سبب



شکل ۱۰ـ۸ مدار RL ساده‌ای که با استفاده از ابزار Schematic Capture طراحی شده است.



(الف)



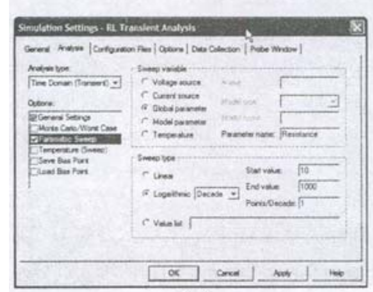
(ب)

شکل ۱۱ـ۸ (الف) کادر محاوره New Column را در Property Editor برای PARAM اضافه کنید. (ب) کادر محاوره مقادیر مقاومت.

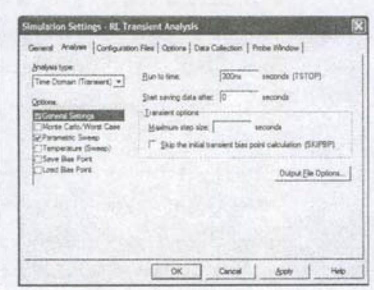
می‌شود تا کادر محاوره شکل ۱۱ـ۸ (الف) به دست آید، که ما مقاومت را تحت Name وارد می‌کنیم و یک مقدار 1k را در Value قرار می‌دهیم. کار دوم ما متشکل از ارتباط مقاومت R_1 در Parameter Sweep است، که با دو کلیک روی مقدار پیش‌فرض R_1 در شماتیک انجام شده و کادر محاوره شکل ۱۱ـ۸ (ب) به دست می‌آید. تحت Value، فقط {Resistance} را وارد می‌نماییم (دقت کنید که کروشه لازم است).

وظیفه سوم ما متشکل از برپایی شبیه‌سازی است که شامل تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا و نیز مقادیر موردنظر R_1 است. تحت PSpice، New Simulation Profile را انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۲ـ۸ (الف))، که در آن Time Domain (Transient) برای Analysis type، 300 ns برای Run to time انتخاب می‌شود و Parametric Sweep box در زیر Options تیک می‌خورد. این آخرین عمل کادر محاوره (جعبه دیالوگ) شکل ۱۲ـ۸ (ب) را به دست می‌دهد و ما Global parameter را برای Sweep variable انتخاب و Resistance را برای Parameter name وارد می‌کنیم. آخرین گام در تنظیم لازم دارد تا Logarithmic را در زیر Sweep type برگزینیم، Start value را 10 بدهیم، مقدار 1000 را به End value تخصیص دهیم و نیز Points/Decade هم 1 باشد. به همین ترتیب می‌توانیم مقادیر مقاومت موردنظر را با استفاده از Value list لیست کنیم.

پس از اجرای شبیه‌سازی جعبه محاوره شکل ۱۳ـ۸ ظاهر می‌گردد که مجموعه داده‌های مختلف را برای ترسیم در اختیار می‌گذارد (در این مسئله مقادیر مقاومت 10، 100 و 1000). ما همه مجموعه را انتخاب خواهیم کرد. خروجی در شکل ۱۴ـ۸ دیده می‌شود.

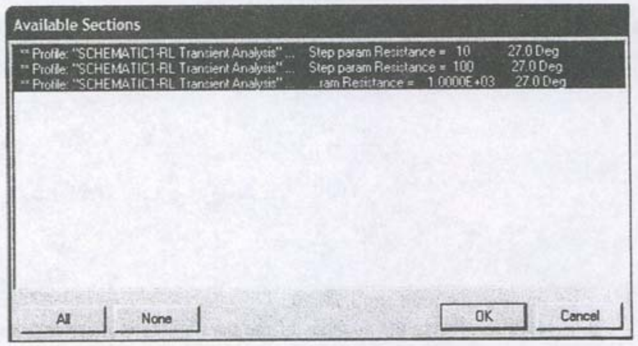


(ب)



(الف)

شکل ۱۲ـ۸ (الف) کادر محاوره شبیه‌سازی. (ب) کادر محاوره Parameter sweep.

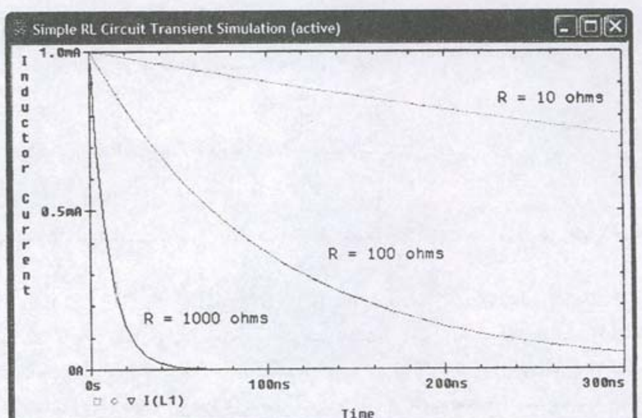


شکل ۱۳ـ۸ جعبهٔ محاوره بخش‌های داده.

چرا با مقادیر بزرگ‌تر L/R، منحنی پاسخ افول آهسته‌تری را دارد؟ اجازه بدهید تا تأثیر هر عنصر را ببینیم. پاسخ مدار RL سری برحسب ثابت زمانی τ فرم زیر را دارد:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

افزایشی در L امکان ذخیره انرژی بیشتری را با جریان اولیه یکسان به ما می‌دهد و زمان بیشتری طول می‌کشد تا این انرژی در مقاومت مصرف شود. با کاهش R هم می‌توان نسبت L/R را افزایش داد. در این حالت، توان انتقالی به مقاومت برای جریان اولیه یکسان بیشتر است. مجدداً زمان بیشتری برای مصرف انرژی ذخیره شده لازم است. این اثر به وضوح در نتیجه شبیه‌سازی ما در شکل ۱۴ـ۸ قابل ملاحظه است.



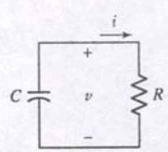
شکل ۱۴ـ۸ خروجی probe برای سه مقاومت مختلف.

۳ـ۸ مدار RC بدون منبع

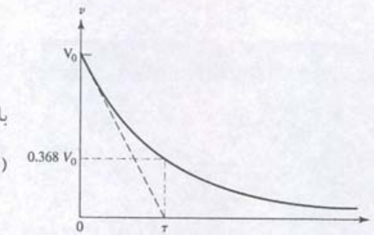
مدارهای مبتنی بر ترکیب مقاومت ـ خازن رایج‌تر از نوع مشابه مقاومت ـ القاگر می‌باشند. دلیل اصلی این توجه، اتلاف کمتر انرژی در خازن واقعی، قیمت پایین‌تر، شباهت نزدیک‌تر مدل ریاضی و قطعه فیزیکی و نیز ابعاد کوچک‌تر و سبکی می‌باشند که هر دو آن‌ها در کاربردهای مدار مجتمع مورد استفاده‌اند.

بگذارید ببینیم که تحلیل مدار RC موازی شکل ۱۵ـ۸ چقدر با مدار RL شباهت دارد. با انتخاب رابطه زیر انرژی اولیه ذخیره‌شده‌ای را در خازن فرض می‌کنیم:

$$v(0) = V_0$$



شکل ۱۵ـ۸ مدار RC موازی که $v(t)$ آن باید با شرط اولیهٔ $v(0) = V_0$ به‌دست آید.



شکل ۸ـ۱۶ منحنی ولتاژ $v(t)$ خازن در یک مدار RC موازی برحسب زمان. مقدار اولیهٔ $v(t)$، V_0 است.

جریان کل خارج‌شده از گره بالایی مدار باید صفر باشد، پس چنین می‌توان نوشت:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0$$

با تقسیم بر C داریم:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=0 \qquad (۱۳)$$

معادله (۱۳) فرم آشنایی دارد، مقایسه با معادله (۱):

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \qquad (۱)$$

نشان می‌دهد که از جایگزینی i با v و L/R با RC، همان معادله قبلی به‌دست‌می‌آید. اکنون ما مدار RC یعنی مدار دوگان RL را که قبلاً ملاحظه کردیم، تحلیل می‌کنیم. به علت این دوگانگی $v(t)$ از RC و $i(t)$ از RL عبارات یکسانی دارند. به‌شرطی‌که مقاومت یکی با رسانایی مدار دیگر و L با C از لحاظ عددی برابر باشند. بنابراین پاسخ مدار RL چنین است:

$$i(t)=i(0)e^{-Rt/L}=I_0e^{-Rt/L}$$

که می‌توانیم بلافاصله برای مدار RC چنین بنویسیم:

$$v(t)=v(0)e^{-t/RC}=V_0e^{-t/RC} \qquad (۱۴)$$

در این‌جا تصور کنید که به عنوان مجهول جریان i را در مدار RC به‌جای v انتخاب کرده‌ایم. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v(t_0)+Ri=0$$

که در این حالت برخلاف دیفرانسیل، یک معادله انتگرال به‌دست‌آورده‌ایم. در هر صورت با مشتق‌گیری از هر دو طرف معادله نسبت به زمان داریم:

$$\frac{i}{C}+R\frac{di}{dt}=0 \qquad (۱۵)$$

از جایگزینی i با v/R، مجدداً معادله (۷) را خواهیم داشت:

$$\frac{v}{RC}+\frac{dv}{dt}=0$$

معادله (۱۵) می‌توانست به‌عنوان نقطه شروع تلقی شود، ولی دراین حال دوگانگی چهره خود را نشان نمی‌داد.

بیایید طبیعت فیزیکی پاسخ ولتاژ مدار RC را که با معادله (۱۴) بیان شده مورد بحث قرار دهیم. در $t = 0$ مقدار اولیه صحیحی را خواهیم داشت و با میل t به سمت بی‌نهایت، ولتاژ به سمت صفر میل می‌کند. نتیجه اخیر با تفکر ما مبنی بر این‌که اگر ولتاژی روی خازن باشد به مقاومت انرژی می‌دهد و این انرژی به صورت گرما تلف می‌شود، صحیح است. پس باید ولتاژ نهایی صفر شود. ثابت زمانی RC را با اعمال دوگانگی روی RL می‌توان به‌دست‌آورد و یا ببینیم چه موقعی مقدار پاسخ به 36.8% مقدار اولیه آن می‌رسد:

$$\frac{\tau}{RC}=1$$

و بنابراین:

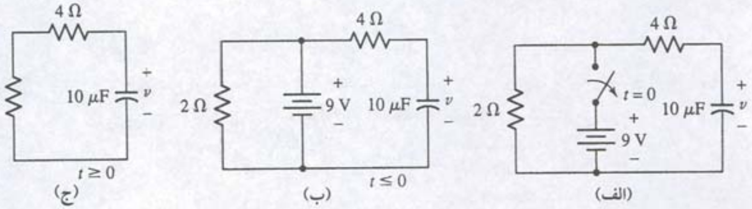
$$\boxed{\tau=RC} \qquad (۱۶)$$

به‌دلیل آشنایی با نمای منفی و اهمیت ثابت زمانی τ می‌توانیم منحنی پاسخ را به راحتی بکشیم (شکل ۸ـ۱۶). مقادیر بزرگ R و یا C ثابت‌های زمانی بزرگتر و لذا اتلاف انرژی ذخیره‌شده طولانی‌تری را سبب می‌شوند. مقاومت بزرگ‌تر توان کمتری را با ولتاژ دو سرش

مصرف می‌کند و بنابراین به زمان بیشتری برای مصرف و تبدیل انرژی ذخیره‌شده به گرما نیازداریم، و باز هم می‌بینیم که برای از دست‌دادن انرژی اولیه زمان طولانی‌تری لازم است.

مثال ۸ـ۳

برای مدار شکل ۸ـ۱۷ (الف) ولتاژ v را در $t = 200\ \mu s$ بیابید.



شکل ۸ـ۱۷ (الف) مدار ساده RC که کلید در لحظه $t = 0$ پرتاب شده است. (ب) مدار آنطوری که در $t = 0$ وجود دارد. (ج) مدار پس از پرتاب سوئیچ و حذف منبع 9 V.

برای یافتن ولتاژ مورد تقاضا ما باید دو مدار را رسم کرده و تحلیل کنیم: یکی مربوط به قبل از پرتاب سوئیچ (شکل ۸ـ۱۷(ب)) و دیگری پس از پرتاب آن (شکل ۸ـ۱۷(ج)).

هدف اصلی تحلیل مدار شکل ۸ـ۱۷ (ب) تهیه ولتاژ اولیه خازن است؛ ما فرض می‌کنیم هر دوران گذرایی مدت‌ها قبل از بین رفته است، و لذا یک مدار dc محض باقی مانده است.

بدون وجود جریان در خازن یا مقاومت 4 Ω، داریم:

$$v(0) = 9\ V \qquad (۱۷)$$

آنگاه توجه خود را به مدار شکل ۸ـ۱۷(ج) معطوف می‌نماییم که داریم:

$$\tau = RC = (2+4)(10\times10^{-6}) = 60\times10^{-6}\ s$$

بنابراین از معادله (۱۴) داریم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = v(0)e^{-t/60\times10^{-6}} \qquad (۱۸)$$

ولتاژ خازن باید در $t = 0$ در هر دو مدار یکسان باشد. چنین قیدی در هیچ جای دیگر برای ولتاژ یا جریان وجود ندارد. از جایگزینی معادله (۱۷) در معادله (۱۸) داریم:

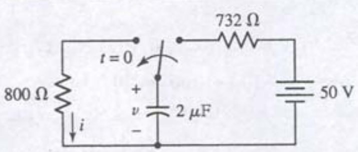
$$v(t) = 9e^{-t/60\times10^{-6}}\,V$$

بنابراین $v(200\times10^{-6}) = 321.1\ mV$ است (4%کمتر از حداکثر مقدار).

تمرین

۸ـ۴ برای مدار شکل ۸ـ۱۸، $v(0)$ و $v(2ms)$ را بیابید. در حل این مسئله باید دو مدار متفاوت ترسیم گردد که یکی مربوط به قبل از بازشدن و دیگری مربوط به بعد از بازشدن کلید مربوطه است. ولتاژ خازن در $t = 0$ باید در هر دو مدار یکسان باشد.

جواب: 50V و 14.33V.



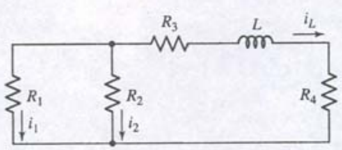
شکل ۸ـ۱۸

۸ـ۴ تعمیم دیدگاه

همان‌طور که به وسیله مثال‌های ۸ـ۲ و ۸ـ۳ دیدیم تعمیم نتایج حاصل برای مدار RL به مداری حاوی چند مقاومت و القاگر چندان مشکل نیست. به همین ترتیب می‌توان نتایج را برای مدار RC با تعدادی خازن و مقاومت عمومیت داد. حتی می‌توان مطلب را برای مدارهای حاوی منابع وابسته هم تعمیم داد.

مدارهای RL کلی

در آغاز توجه خود را به دو پایانه القاگر معطوف کرده و مقاومت معادل دو سر این پایانه‌ها را به دست می‌آوریم. بنابراین مدار به حالت سری ساده کاهش می‌یابد. مدار شکل ۸ـ۱۹ را در نظر بگیرید.



شکل ۸ـ۱۹ این مدار بدون منبع، یک القاگر و چند مقاومت دارد. برای تحلیل مدار ثابت زمانی را به صورت $\tau = L/R_{eq}$ می‌یابیم.

مقاومت معادل همراه القاگر چنین است:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

و بنابراین ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \qquad (۱۹)$$

ما می‌توانیم این رابطه را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}}$$

که R_{TH}، مقاومت معادل تونن از دید القاگر L است.

همچنین توجه داریم که اگر چندین القاگر در مداری وجود داشته باشد و قابل ترکیب سری یا موازی باشند، آنگاه معادله (۱۹) به صورت کلی‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \qquad (۲۰)$$

که L_{eq}، القاکنایی معادل را نشان می‌دهد.

برش نازک: تفکیک میان 0^+ و 0^-

به شکل ۱۹ـ۸ بازمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که مقدار معینی از انرژی در $t = 0$ در القاگر ذخیره شده باشد به نحوی که $i_L(0) \neq 0$ باشد.

جریان i القاگر عبارت است از:

$$i_L = i_L(0)\, e^{-t/\tau}$$

که به آن جواب اساسی مسئله می‌گوییم. کاملاً محتمل است که مقداری از ولتاژها یا جریان‌ها به‌جز i_L، مانند i_2 در R_2 را لازم داشته باشیم. می‌توان قوانین کیرشهف و اهم را برای بخش مقاومت مدار بدون هر مشکلی به کاربرد، ولی تقسیم جریان پاسخ سریع‌تری را در این مدار فراهم می‌سازد:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[i_L(0)\, e^{-t/\tau}\right]$$

همچنین گاهی ممکن است مقدار اولیه جریانی به‌جز جریان القاگر را بدانیم. چون جریان در یک مقاومت آناً تغییر می‌کند، ما هر تغییری که بلافاصله پس از لحظه تغییر $t = 0$ رخ دهد را با 0^+ یا $i(0^+)$ نشان می‌دهیم که حد $i_1(t)$ در میل t به سمت صفر است. دقت کنید که این تنها یک قرارداد است. وقتی که در معادله‌ای با $t = 0^+$ مواجه می‌شویم، به جای آن‌ها مقدار صفر را می‌گذاریم. این علامت اجازه می‌دهد تا لحظه قبل و بعد از باز یا بسته‌شدن کلید و یا قطع و وصل انرژی را از یکدیگر تفکیک کنیم. بنابراین اگر مقدار اولیه i_1 به صورت $i_1(0^+)$ داده شده باشد، آن‌گاه مقدار اولیه i_2 برابر است با:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}$$

توجه کنید که $i_L(0^+)$ همیشه برابر با $i_L(0^-)$ است. این رابطه برای ولتاژ القاگر یا هر ولتاژ یا جریان مقاومت صحت ندارد، زیرا آن‌ها می‌توانند در مدت زمان صفر تغییر کنند.

با توجه به این مقادیر، مقدار اولیه $i_L(0)$ لازم (یا $i_L(0^-)$ یا $i_L(0^+)$) را به‌دست‌می‌آوریم:

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} + i_1(0^+)$$

و لذا عبارت i_2 چنین خواهد شد:

$$i_2 = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}\, e^{-t/\tau}$$

بگذارید ببینیم آیا می‌توان آخرین عبارت را مستقیم‌تر به‌دست‌آورد. چون جریان القاگر به صورت نمایی $e^{-t/\tau}$ کاهش می‌یابد، هر جریان در مدار باید رفتاری یکسان داشته باشد. این مطلب با بررسی جریان القاگر به‌عنوان منبع که به شبکه مقاومتی اعمال می‌شود، آشکارتر می‌گردد. هر جریان یا ولتاژ در شبکه مقاومتی باید وابستگی زمانی یکسانی را دارا باشد. با به کارگیری این ایده جریان i_2 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

که

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

است، مقدار A باید از مقدار اولیه i_2 به‌دست‌آید. چون $i_1(0^+)$ معلوم است ولتاژ دو سر R_1 و R_2 معلوم خواهد بود:

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

که به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}$$

بنابراین:

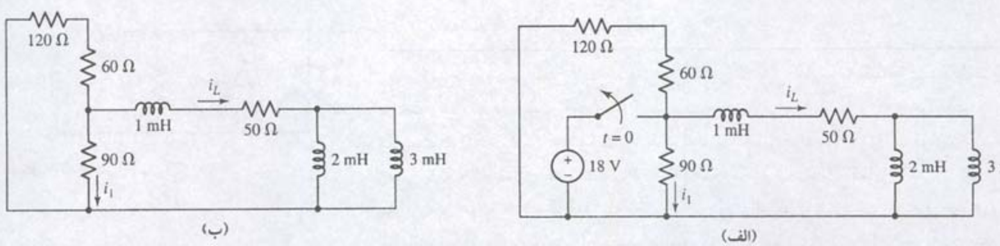
$$i_2 = i_1(0^+)\,\frac{R_1}{R_2}\, e^{-t/\tau}$$

با طی گام‌های مشابهی می‌توان حل سریعی را برای بسیاری از مسائل فراهم نمود. ما ابتدا وابستگی زمانی پاسخ را به صورت نمایی میرا شناسایی می‌کنیم، با ترکیب مقاومت‌ها ثابت زمانی را معین می‌نماییم، حل را با دامنه مجهول می‌نویسیم و سپس دامنه را از مقدار اولیه مفروض به‌دست‌می‌آوریم.

تکنیک مشابهی را می‌توان به هر مدار با یک القاگر و هر تعداد مقاومت و نیز دو و یا چند القاگر اعمال کرد و در آن‌ها القاگرها و مقاومت‌ها را به فرم ساده یک القاگر و یک مقاومت درآورد.

مثال ۴ـ۸

در مدار شکل ۲۰ـ۸ (الف)، i_1 و i_L را معین کنید.



شکل ۲۰ـ۸ (الف) مداری با چند مقاومت و چند القاگر. (ب) پس از $t = 0$ مدار به یک مقاومت 110Ω سری با $L_{eq} = 2.2mH$ کاهش می‌یابد.

پس از $t = 0$، که در آن طبق شکل ۲۰ـ۸ (ب) منبع ولتاژ قطع می‌شود به سادگی القاگر معادل محاسبه می‌گردد.

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2mH$$

و مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110\Omega$$

و ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu s$$

بنابراین فرم پاسخ طبیعی $Ke^{-50.000t}$ می‌باشد و K مقداری ثابت است. با ملاحظه مدار قبل از بازشدن سوئیچ ($t = 0^-$)، $i_L = 18/50\ A$ می‌باشد. چون $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ است، می‌دانیم که $i_L = 18/50\ A$ یا $360\ mA$ در $t = 0^+$ است و لذا:

$$i_L = \begin{cases} 360\text{ mA} & (t < 0) \\ 360e^{-50,000t}\text{ mA} & (t \ge 0) \end{cases}$$

قیدی برای تغییر آنی i_1 در $t = 0$ وجود ندارد بنابراین مقدار آن در $t = 0^-$ (18/90 A یا 200 mA) مناسب برای یافتن i_1 در $t > 0$ نیست، در عوض باید $i_1(0^+)$ را بر اساس اطلاعمان از $i_L(0^+)$ پیدا کنیم. با به‌کارگیری روش تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120 + 60}{120 + 60 + 90} = -240\text{ mA}$$

از این‌رو:

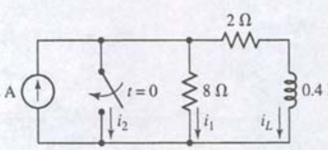
$$i_1 = \begin{cases} 200\text{ mA} & (t < 0) \\ -240e^{-50,000t}\text{ mA} & (t \ge 0) \end{cases}$$

ما می‌توانیم صحت تحلیل خود را با به‌کارگیری PSpice و مدل سوئیچ Sw-tOpen تحقیق کنیم. هرچند که این بخش در واقع دو مقاومت دارد: یکی متعلق به قبل از بازشدن کلید در زمان معین‌شده (مقدار پیش‌فرض 10 Ω است) و یکی پس از بازشدن کلید (مقدار پیش‌فرض 1 MΩ است). اگر مقاومت معادل باقیمانده مدار سازگار با هر کدام باشد مقادیر باید با دو بار کلیک روی سمبل سوئیچ در مدار شماتیک اصلاح شود. توجه کنید که مدل سوئیچی هم وجود دارد که در زمان خاص بسته می‌شود: یعنی Sw_tClose.

تمرین

۸ـ۵ در زمان $t = 0.15$، در شکل ۸ـ۲۱، مقدار (الف) i_L، (ب) i_1 و (ج) i_2 را به‌دست‌آورید.

جواب: 0.756 A، 0 و 1.244 A.



شکل ۸ـ۲۱

تا این‌جا ما روش یافتن پاسخ طبیعی هر مداری که قابل نمایش با یک القاگر معادل سری با یک مقاومت معادل است را ملاحظه کردیم. در حالت کلی مدارهایی را که چند القاگر و چند مقاومت دارند نمی‌توان به صورت بالا ساده کرد. پاسخ این‌گونه مدارها را نمی‌توان با یک ثابت زمانی یا یک تابع نمایی منفی نشان داد، بلکه پاسخ، مجموع چند تابع نمایی با نمای منفی است. در این مدارها تعداد القاگرهایی که بعد از ساده‌کردن القاگرها با ترکیب سری و موازی باقی می‌مانند تعداد جملات نمایی را معلوم می‌کند. ما این وضعیت را در فصل ۹ خواهیم دید.

مدارهای RC کلی

بسیاری از مدارهای RC که می‌خواهیم پاسخ طبیعی آن‌ها را بیابیم بیش از یک مقاومت و یک خازن دارند. همان‌طور که برای مدارهای RL مشاهده شد، ابتدا حالاتی را درنظر می‌گیریم که در آن‌ها مدار ممکن‌است به مدار معادلی متشکل از فقط یک مقاومت و یک خازن، کاهش یابد.

ابتدا تصور کنید با مداری که فقط یک خازن ولی چند مقاومت دارد مواجه هستیم. می‌توان شبکه مقاومتی دو پایانه دو سر خازن را با یک مقاومت معادل جایگزین کرد و سپس بلافاصله عبارتی برای ولتاژ خازن نوشت. در این گونه موارد مدار دارای یک ثابت زمانی موثر است که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\tau = R_{eq}C$$

که R_{eq} مقاومت معادل شبکه است. دیدگاه دیگر این‌است‌که R_{eq} در واقع مقاومت معادل تونن از دید خازن است.

اگر مدار بیش از یک خازن داشته باشد، ولی قابل جایگزینی به وسیله ترکیب سری / موازی‌اش باشد، C_{eq}، آنگاه مدار دارای ثابت زمانی موثر زیر است:

$$\tau = RC_{eq}$$

در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\tau = R_{eq}C_{eq}$$

با این وجود لازم به ذکر است که خازن‌های موازی جایگزین‌شده با معادل باید دارای مقادیر اولیه یکسان باشند.

مثال ۸ـ۵

برای مدار شکل ۸ـ۲۲ (الف) اگر $v(0^-) = V_0$ باشد، $v(0^+)$ و $i(0^+)$ را بیابید.

ابتدا مدار شکل ۸ـ۲۲(الف) را به شکل ۸ـ۲۲(ب) ساده می‌کنیم، پس می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$v = V_0e^{-t/R_{eq}C}$$

که

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \quad \text{و} \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}$$

هر جریان یا ولتاژی در بخش مقاومتی شبکه باید فرم $Ae^{-t/R_{eq}C}$ را داشته باشد، که در آن A مقدار اولیه جریان یا ولتاژ است. مثلاً جریان در R_1 را می‌توان چنین بیان کرد:

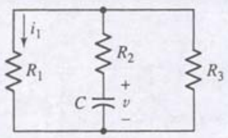
$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

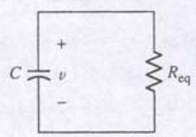
که

$$\tau = (R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3})C$$

و $i_1(0^+)$ باقی می‌ماند تا از مقدار اولیه معین شود. هر جریانی که در $t = 0^+$ جریان یابد باید از خازن سرچشمه بگیرد. بنابراین چون v نمی‌تواند ناگهان عوض شود، $v(0^+) = v(0^-) = V_0$ و بنابراین:

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1R_3/(R_1 + R_3)}\,\frac{R_3}{R_1 + R_3}$$



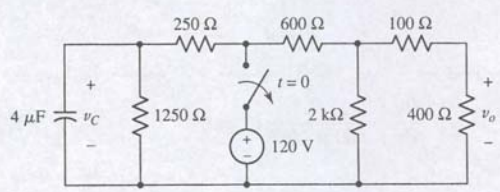


شکل ۸ـ۲۲ (الف) یک مدار شامل یک خازن و چند مقاومت. (ب) به‌جای مقاومت‌ها، مقاومت معادل را گذاشته‌ایم. اکنون به سادگی می‌توان ثابت زمانی را به‌دست‌آورد.

تمرین

۸ـ۶ مقادیر v_C، v_o را در شکل ۸ـ۲۳ برای (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$ و (ج) $t = 1.3\text{ms}$ به‌دست‌آورید.

جواب: 100V، 38.4V، 100V، 25.6V، 59.5V و 15.22V.

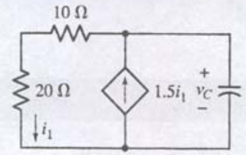


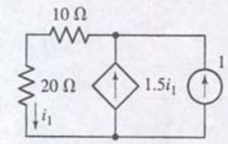
شکل ۸ـ۲۳

روش ما می‌تواند به مدارهای حاوی یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی و یک یا چند منبع وابسته هم إعمال گردد. در این موارد، ما می‌توانیم یک معادله KCL یا KVL همراه با هر تعداد معادله پشتیبان بنویسیم و آن را به یک معادله دیفرانسیل تقلیل داده و معادله مشخصه را برای یافتن ثابت زمانی استخراج نماییم. به طریقی دیگر ممکن‌است با یافتن مقاومت معادل تونن شبکه متصل به خازن یا القاگر شروع کرده و آن را در محاسبه ثابت زمانی RL یا RC به کار ببریم ـ مگر این‌که منبع وابسته به وسیله ولتاژ یا جریان یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی کنترل گردد که در این حالت روش تونن قابل استفاده نیست. ما این مطلب را در مثال ۸ـ۶ می‌شکافیم.

مثال ۶ـ۸

برای مدار شکل ۲۴ـ۸ (الف) ولتاژ v_C را برای $t > 0$ حساب کنید به شرطی که $v_C(0^-) = 2$ V باشد.





شکل ۲۴ـ۸ (الف) یک مدار ساده RC حاوی یک منبع وابسته که با ولتاژ یا جریان خازن کنترل نشده است. (ب) مدار معادل تونن شبکه متصل به خازن.

منبع وابسته به وسیله جریان یا ولتاژ خازن کنترل نشده است، بنابراین می‌توانیم معادل تونن شبکه سمت چپ خازن را پیدا کنیم. با اتصال یک منبع مرجع 1 A به شکل ۲۴ـ۸(ب) داریم:

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

که

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right)\frac{20}{10+20}V_x = \frac{V_x}{30}$$

با اجرای کمی عملیات جبری داریم $V_x = -60$ V، لذا شبکه دارای مقاومت معادل تونن $-60\ \Omega$ است (غیرعادی است ولی هنگام بررسی منبع وابسته غیرممکن نیست). لذا مدار دارای ثابت زمانی منفی خواهد بود:

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60\ \mu s$$

پس ولتاژ خازن برابر است با:

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

که $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$ V است. بنابراین:

$$\boxed{v_C(t) = 2e^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}} \qquad (۲۱)$$

که به قدر کافی ناپایدار است: این ولتاژ با زمان به‌طور نمایی رشد می‌کند. این حالت نمی‌تواند تا ابد ادامه یابد؛ یعنی یک یا چند عنصر در مدار بالاخره خراب خواهد شد.

به طریقی دیگر، ما می‌توانیم یک معادله KCL برای گره بالایی در شکل ۲۴ـ۸(الف) بنویسیم:

$$v_C = 30\left(1.5i_1 - 10^{-6}\frac{dv_C}{dt}\right) \qquad (۲۲)$$

که

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \qquad (۲۳)$$

از جایگزینی معادله (۲۳) در معادله (۲۲) و کمی عملیات جبری داریم:

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60\times10^{-6}}v_C = 0$$

که معادله مشخصه زیر را دارد:

$$s - \frac{1}{60\times10^{-6}} = 0$$

بنابراین:

$$s = \frac{1}{60\times10^{-6}}$$

و لذا:

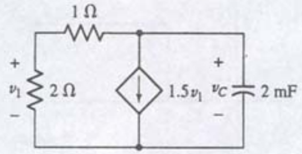
$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

که همان رابطه قبلی است. از جایگزینی $A = v_C(0^+) = 2$ در معادله (۲۱) به دست می‌آید که عبارت ولتاژ خازن برای $t > 0$ است.

تمرین

۷ـ۸ (الف) با توجه به مدار شکل ۲۵ـ۸، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t > 0$ با $v_C(0^-) = 11$ V بیابید.
(ب) آیا مدار پایدار است؟

جواب: (الف) $v_C(t) = 11e^{-2\times10^3 t/3}$ V برای $t > 0$ و (ب) بله زیرا میرا است و با زمان رشد نمی‌کند.



شکل ۲۵ـ۸ مدار تمرین ۷ـ۸

بعضی از مدارهایی که دارای تعداد زیادی مقاومت و خازن هستند قابل جایگزینی با مداری هستند که فقط یک مقاومت و یک خازن دارد. لازمه این کار این است که مدار قابل تفکیک به دو بخش، یکی فقط شامل مقاومت و دیگری حاوی فقط خازن‌ها باشد. به نحوی که این دو بخش با دو سیم رابط ایده‌آل به هم وصل شوند. البته همیشه این‌طور نیست. بنابراین ثابت‌های زمانی متعددی برای توصیف مدار چند مقاومتی، چند خازنی، لازم است.

به‌عنوان پیشنهادی در جداسازی، باید محتاط بود که فقط عناصر ایده‌آل به یکدیگر وصل شوند. مثلاً می‌توان تصور کرد که دو خازن ایده‌آل سری با ولتاژ نابرابری در $t = 0$ به یکدیگر وصل گردند. معهذا این کار مشکلی را در مدل ریاضی خازن ایده‌آل به‌وجود می‌آورد، زیرا خازن‌های واقعی به همراه خود مقاومتی دارند که انرژی در آن‌ها تلف می‌شود.

۵ـ۸ تابع پله واحد

در مدارهای RL و RC مورد مطالعه ما هیچ منبع یا تابع تحریکی وجود نداشت. ما این پاسخ را **پاسخ طبیعی** نامیدیم، زیرا فرم آن فقط به طبیعت مدار وابسته است. به‌طورکلی دلیل آن وجود انرژی ذخیره‌شده در القاگر یا عناصر خازنی مدار است. در بعضی موارد با مدارهای متشکل از کلید و منابع مواجه هستیم و نیز دیدیم که برای حذف منابع از مدار باید اعمال سوئیچینگی صورت پذیرد و ضمن آن انرژی‌های ذخیره‌شده در این‌جا و آن‌جا باقی می‌ماندند. به بیان دیگر ما مسائلی را حل کردیم که در آن‌ها منابع انرژی ناگهان از مدار خارج می‌شوند. اکنون می‌خواهیم نوعی از پاسخ را که حاصل اعمال ناگهانی منابع به مدار است، ملاحظه نماییم.

در این بخش بر پاسخی توجه خواهیم داشت که از اعمال ناگهانی منابع dc حاصل می‌شود. چون هر وسیله الکتریکی حداقل یک بار تحریک می‌شود و نیز تقریباً همه وسایل در طول عمرشان به دفعات روشن و خاموش می‌شوند، مطالعه ما موارد عملی بسیاری را شامل می‌شود. گرچه ما در حال حاضر خود را به منابع dc محدود می‌کنیم ولی در موارد متعددی این مثال‌های ساده به عملکرد وسایل فیزیکی متعلقند. مثلاً اولین مثالی را که مطرح خواهیم کرد، مربوط به چگونگی ایجاد جریان هنگام روشن‌شدن یک موتور dc است. تولید و استفاده از پالس‌های ولتاژ مربعی برای نمایش یک عدد یا فرمان در یک کامپیوتر، مثال‌های دیگری را در الکترونیک و مدارهای ترانزیستوری دارد. مدارهای مشابهی در هم‌گام‌کردن و مدارهای جاروب گیرنده‌های تلویزیون، سیستم‌های مخابراتی که مدولاسیون را به‌کار می‌گیرند و در سیستم‌های رادار، مثال‌های اندکی از کاربرد این پالس‌هاست.

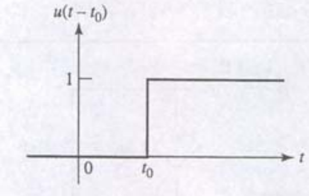
راجع‌به "کاربرد ناگهانی" یک منبع انرژی صحبت می‌کردیم و منظور ما از این عبارت این است که کاربرد در زمان صفر صورت می‌گیرد•. بنابراین عملکرد یک کلید سری با یک باطری معادل است با یک تابع تحریک که تا لحظه بسته‌شدن کلید صفر است و پس از آن با ولتاژ باطری برابر است. تابع تحریک در لحظه بسته‌شدن کلید شکست یا عدم پیوستگی دارد. توابع تحریک خاصی که شکست در تابع یا مشتقات خود دارند را توابع یگانه یا یکتا می‌نامند. دو تابع یکتای مهم عبارتند از تابع **پله واحد** و تابع **ضربه واحد**.

• البته در عمل چنین چیزی ممکن نیست. اگر زمان وقوع این واقعه در مقایسه با دیگر مقیاس‌های زمانی توصیف مدار کم باشد، این تقریب ریاضی بسیار مناسب است.

ما تابع تحریک پله واحد را به صورت تابعی از زمان تعریف می‌کنیم که برای همه زمان‌های کمتر از آرگومانش صفر بوده و در زمان‌های بزرگ‌تر مقدار آن مثبت است. اگر آرگومان $(t - t_0)$ و تابع پله واحد u باشد، آنگاه $u(t - t_0)$ برای همه مقادیر t کمتر از t_0 برابر صفر و برای همه مقادیر t بزرگ‌تر از t_0 برابر واحد است. در $t = t_0$، تابع $u(t - t_0)$ ناگهان از 0 به 1 تغییر پیدا می‌کند. مقدار آن در $t = t_0$ تعریف نشده است ولی در همه زمان‌های اختیاری نزدیک به $t = t_0$ مقدار آن معلوم است. ما اغلب مقدار آن را با $u(t_0^-) = 0$ و $u(t_0^+) = 1$ نشان می‌دهیم.

تعریف ریاضی تابع واداشته پله واحد چنین است:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



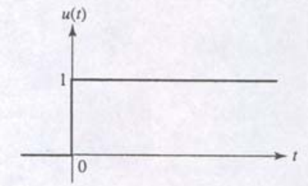
شکل ۸ـ۲۶ تابع تحریک پلهٔ واحد $u(t - t_0)$.

این تابع به صورت گرافیکی در شکل ۸ـ۲۶ نشان داده شده است. توجه کنید که یک خط عمودی به طول واحد در $t = t_0$ رسم شده است. گرچه این قسمت بخشی از تعریف پله واحد نیست، ولی معمولاً در شکل‌ها ترسیم می‌شود.

همچنین دقت کنید که تابع پله لزومی ندارد که تابعی از زمان باشد. مثلاً $u(x - x_0)$ را می‌توان برای تابع پله واحد به‌کاربرد و در آن x ممکن‌است فاصله به متر یا مثلاً فرکانس باشد.

در بسیاری از موارد در تحلیل مدار در یک لحظه که آن را $t = 0$ می‌نامیم، عمل سوئیچینگ یا کلیدزنی رخ می‌دهد. دراین حال $t_0 = 0$ و بنابراین تابع تحریک پله واحد با $u(t - 0)$ یا ساده‌تر، $u(t)$، نشان داده می‌شود. این تابع در شکل ۸ـ۲۷ نشان داده شده است. بنابراین:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



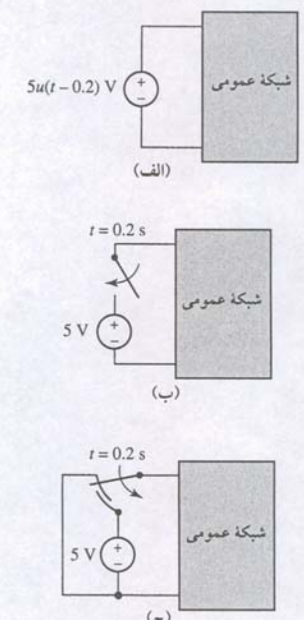
شکل ۸ـ۲۷ تابع تحریک پله واحد $u(t)$ بر حسب زمان.

تابع پله واحد خود بدون بعد است. اگر بخواهیم آن را برای ولتاژ به‌کاربریم باید $u(t - t_0)$ را در ولتاژ ثابتی مثلاً 5V ضرب کنیم. بنابراین $u(t) = 5u(t - 0.2)$V منبع ولتاژی است که قبل از $t = 0.2$ صفر بوده و پس از $t = 0.2$s، برابر ثابت 5V شده است. این تابع به یک شبکه کلی در شکل ۸ـ۲۸ (الف) وصل شده است.

منابع واقعی و تابع پله واحد

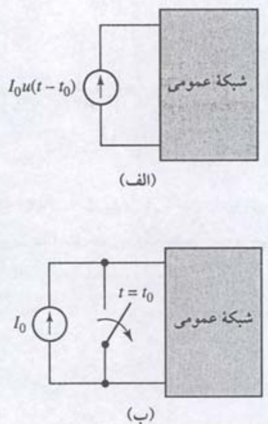
منطقی است بپرسیم که این تابع تحریک گسسته با چه منبع فیزیکی یا واقعی معادل است. منظورمان از **معادل** این‌است‌که مشخصه‌های دو شبکه یکسان باشند. برای منبع ولتاژ پله‌ای شکل ۸ـ۲۱ (الف) مشخصه ولتاژ ـ جریان کاملاً روشن است: ولتاژ قبل از $t = 0.2$s، صفر است و پس از $t = 0.2$s، برابر 5V می‌باشد، ضمن این‌که جریان در تمامی لحظات هر مقداری می‌تواند باشد. ذهنیت اولیه ما ممکن‌است مدار معادل شکل ۸ـ۲۸ (الف) را مجسم کند که در آن یک منبع dc 5V، با یک کلید در $t = 0.2$s به‌طور سری بسته شده است. با این وجود این شبکه برای $t < 0$ معادل نیست زیرا ولتاژ دو سر باطری و کلید در این فاصله زمانی به کلی تعریف نشده است. منبع معادل یک مدار باز است و ولتاژ دو سر آن هر چیزی ممکن‌است باشد. پس از $t = 0.2$s، شبکه‌ها معادلند و اگر این تنها فاصله زمانی مطلوب ما باشد و اگر جریان‌های اولیه جاری‌شده از دو شبکه در $t = 0.2$s یکسان باشند، آنگاه شکل ۸ـ۲۸ (ب) معادل مناسبی برای شکل ۸ـ۲۸ (الف) خواهد بود.

برای تهیه یک معادل دقیق تابع تحریک پله ولتاژ، می‌توان از یک سوئیچ دو حالته تک‌قطب استفاده کرد. قبل از $t = 0.2$s سوئیچ ولتاژ صفر را در دو سر پایانه‌های ورودی ایجاد می‌کند. پس از $t = 0.2$s، کلید برای ایجاد ولتاژ 5V به حالت دیگر پرتاب می‌شود. در $t = 0.2$s، ولتاژ نامشخص است و باطری برای یک لحظه اتصال کوتاه می‌شود (خوشبختانه ما راجع‌به مدل ریاضی صحبت می‌کنیم). این مدار معادل دقیق در شکل ۸ـ۲۸ (ج) ملاحظه می‌گردد.



شکل ۸ـ۲۸ (الف) یک منبع تحریک که راه‌انداز یک شبکه کلی است. (ب) یک مدار ساده که گرچه کاملاً معادل منبع مدار (الف) نیست ولی در بسیاری از حالات به‌عنوان معادل آن به کار می‌رود. (ج) معادل دقیق (الف).

در شکل ۸ـ۲۹ (الف) یک منبع جریان پله‌ای دیده می‌شود که شبکه‌ای کلی را راه‌اندازی می‌کند. اگر سعی در جایگزینی این مدار با یک منبع dc موازی با یک سوئیچ کنیم (که در $t = t_0$ باز می‌شود) باید توجه داشته باشیم که مدارها پس از $t = t_0$ معادلند ولی پاسخ‌ها بشرطی یکسان خواهند بود که مقادیر اولیه یکسانی حکمفرما باشد. شکل ۸ـ۲۹ (ب) نشان می‌دهد که برای $t < t_0$ هیچ ولتاژی در دو سر پایانه‌های منبع جریان وجود ندارد. برای شکل ۸ـ۲۹ (الف) چنین چیزی صحیح نیست. معهذا ما اغلب مدارهای شکل ۸ـ۲۹ (الف) و شکل ۸ـ۲۹ (ب) را با هم تعویض می‌کنیم. معادل دقیق شکل ۸ـ۲۹ (الف) دوگان مدار شکل ۸ـ۲۸ (ج) است. معادل دقیق مدار شکل ۸ـ۲۹ (ب) را نمی‌توان به تنهایی با توابع تحریک ولتاژ ـ جریان پله‌ای ساخت.



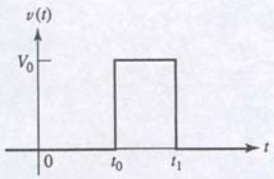
شکل ۸ـ۲۹ (الف) اعمال یک جریان پله‌ای به یک شبکهٔ کلی. (ب) مداری که هرچند معادل دقیق (الف) نیست ولی می‌توان در بسیاری از حالات آن را به‌کاربرد.

تابع پالس مربعی

با دستکاری تابع تحریک پله واحد می‌توان بعضی از توابع تحریک مفید را تولید کرد. بیایید تا پالس ولتاژ مربعی را با شرایط زیر تعریف کنیم:

$$v(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

پالس مذکور در شکل ۸ـ۳۰ ترسیم شده است. آیا این پالس می‌تواند برحسب تابع تحریک پله واحد بیان شود؟ اجازه بدهید تا اختلاف دو پله واحد $u(t - t_0) - u(t - t_1)$ را بررسی کنیم. دو تابع پله در شکل ۸ـ۳۱ (الف) نشان داده شده‌اند که اختلاف آن‌ها یک پالس مربعی است. منبع $V_0u(t - t_0) - V_0u(t - t_1)$ که ولتاژ مطلوب ما را فراهم می‌کند نیز در شکل ۸ـ۳۱ (ب) نمایش داده شده است.



شکل ۸ـ۳۰ یک تابع تحریک مفید، پالس ولتاژ مربعی.

اگر یک ولتاژ سینوسی $V_m \sin\omega t$ ناگهان در $t = t_0$ به شبکه‌ای وصل شود، آنگاه نیروی محرکه، ولتاژ $u(t) = V_m u(t - t_0)\sin\omega t$ خواهد بود. اگر بخواهیم یک انرژی ناگهانی از فرستنده یک اتومبیل کنترل‌شده را نشان دهیم که با 47MHz (295 Mrad/s) کار می‌کند، باید $\frac{1}{10}\mu s$ بعد با دومین تابع تحریک پله واحد، آن را خاموش کنیم. بنابراین پالس ولتاژ برابر است با:

$$v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-8})]\sin(295 \times 10^6 t)$$

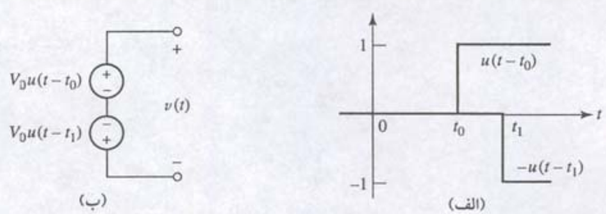
این تابع تحریک در شکل ۸ـ۳۲ ترسیم شده است.

تمرین

۸ـ۸ هر یک از توابع زیر را در $t = 0.8$ ارزیابی کنید:

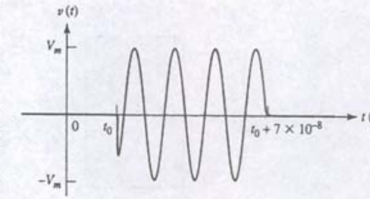
(الف) $3u(t) - 2u(-t) + 0.8u(1 - t)$، (ب) $[4u(t)]\ u(-t)$ و (ج) $2u(t)\sin\pi t$.

جواب: 3.8، 0 و 1.176.



شکل ۸ـ۳۱ (الف) تابع پلهٔ واحد $u(t - t_0)$ و $-u(t - t_1)$. (ب) منابعی که پالس مربعی شکل ۸ـ۳۰ را تولید می‌کنند.

۸ـ۶ مدارهای RL واداشته



شکل ۸ـ۳۲ یک پالس فرکانس رادیویی، که به صورت حاصل‌ضرب یک تابع سینوسی و یک تابع پالسی تعریف شده است.

اکنون آماده‌ایم تا یک شبکه ساده را ناگهان به یک منبع dc وصل کنیم. مدار شامل یک باطری است که ولتاژ V_0 آن با یک کلید، یک مقاومت R و یک القاگر سری L است. کلید طبق شکل ۸ـ۳۳ (الف) در $t = 0$ بسته است. واضح است که قبل از $t = 0$ جریان $i(t)$ برابر صفر می‌باشد، بنابراین می‌توانیم باطری و کلید را با یک تابع تحریک پله ولتاژ $V_0u(t)$ جایگزین کنیم که این یکی هم قبل از $t = 0$ پاسخ را فراهم نمی‌کند. پس از $t = 0$، دو مدار دقیقاً یکسانند. از این رو جریان $i(t)$ را در مدار شکل ۸ـ۳۳ (الف) و یا مدار معادل ۸ـ۳۳ (ب) می‌توانیم بیابیم.

فعلاً جریان $i(t)$ را با نوشتن معادله‌ای مناسب و حل آن با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری حل می‌کنیم. پس از یافتن پاسخ و تحقیق دو بخش تشکیل‌یافته آن، خواهیم دید که برای هر یک از این بخش‌ها اهمیتی فیزیکی وجود دارد. با آگاهی بیشتر از چگونگی تولید آن‌ها، خواهیم توانست حل سریع‌تر و مفهوم‌تری را برای هر مسئله‌ای که منبعی را ناگهان وارد مدار کند، بیابیم. بگذارید با روش اساسی‌تری حل را دنبال کنیم.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف به مدار شکل ۸ـ۳۳ (ب) داریم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0u(t)$$

چون تابع تحریک پله واحد در $t = 0$ ناپیوستگی دارد، ابتدا حل در $t < 0$ را بررسی می‌کنیم، و سپس آن را در $t > 0$ مطالعه خواهیم کرد. به‌کارگیری ولتاژ صفر در $t = -\infty$ پاسخ صفری را تحمیل می‌کند، به نحوی که

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

در زمان مثبت، $u(t)$ برابر واحد بوده و باید معادله زیر را حل کنیم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \qquad t > 0$$

متغیرها را می‌توان طی چند گام جبری به صورت زیر جدا کرد:

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

و هر سمت می‌تواند مستقلاً انتگرال‌گیری شود:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

برای ارزیابی k، یک مقدار اولیه باید تعریف شود. قبل از $t = 0$، $i(t) = 0$ است و بنابراین $i(0^-) = 0$ می‌باشد. چون جریان در یک القاگر نمی‌تواند در زمان صفر به مقدار معینی بدون منبع ولتاژ بی‌نهایت تغییر کند، بنابراین $i(0^+) = 0$ خواهد بود. با $i = 0$ در $t = 0$ داریم:

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

و بنابراین:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

خواهیم داشت:

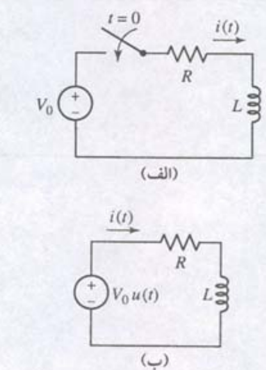
$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

و یا

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L} \qquad t > 0 \tag{۲۴}$$

بنابراین، عبارت پاسخ معتبر در همه زمان‌های t چنین خواهد بود.

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \tag{۲۵}$$



شکل ۸ـ۳۳ (الف) مدار مفروض؛ (ب) مدار معادل (الف) که $i(t)$ آن در تمام زمان‌ها با مدار قبل برابر است.

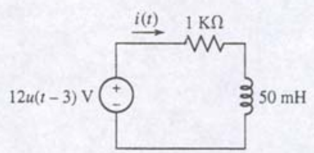
روندی مستقیم‌تر

حل فوق حلی مطلوب است، ولی به روشی ساده به‌دست نیامد. برای پی‌ریزی روش ساده‌تر، بگذارید دو عبارت معادله (۲۵) را تفسیر کنیم. جمله نمایی فرم پاسخ طبیعی مدار RL را دارد. یعنی یک تابع نمایی منفی است که با گذشت زمان با ثابت زمانی $\frac{L}{R}$ به سمت صفر میل می‌کند. پس شکل تابع این قسمت از پاسخ، مشابه پاسخ بدون منبع است. با این وجود دامنه این بخش نمایی به منبع ولتاژ V_0 وابسته است. این مطلب را به این ترتیب تعمیم می‌دهیم که پاسخ مجموع دو جمله است، یک جمله شکل پاسخ مدار بدون منبع را دارا است که دامنه‌اش به تابع تحریک وابسته است و اما جمله دیگر چگونه است؟ معادلهٔ (۲۵) حاوی یک جمله ثابت V_0/R نیز هست. جواب ساده است: به دلیل اتلاف تدریجی انرژی در مقاومت، پاسخ طبیعی به صفر میل می‌نماید ولی انرژی کل به صفر نمی‌رود. در نهایت این مدار مثل یک مقاومت و یک القاگر سری با یک باطری عمل می‌کند. چون القاگر در dc مثل اتصال کوتاه عمل می‌نماید، تنها جریان جاری V_0/R است. این جریان بخشی از پاسخ است که مستقیماً به تابع تحریک وابسته می‌باشد و ما آن را پاسخ واداشته می‌نامیم. این پاسخ حتی مدت‌ها بعد از بسته‌شدن کلید وجود دارد.

پاسخ کامل از دو بخش پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته تشکیل شده است. پاسخ طبیعی نشان‌دهنده مشخصات مدار است و مستقل از منبع می‌باشد. شکل آن را از روی مدار بدون منبع و دامنه آن را از دامنه اولیه منبع و انرژی ذخیره‌شده اولیه می‌توان یافت. پاسخ واداشته ویژگی‌های تابع تحریک را دارا است، و می‌توان آن را با این فرض که همه کلیدها مدت‌ها قبل تغییر حالت داده‌اند به‌دست‌آورد. چون فعلاً با منابع dc و کلیدها سروکار داریم، پاسخ واداشته چیزی جز حل یک مدار dc ساده نیست.

مثال ۸ـ۷

برای مدار شکل ۸ـ۳۴، $i(t)$ را برای $t = \infty$، 3^-، 3^+ و $100\ \mu s$ پس از تغییر مقدار منبع به دست آورید.



شکل ۸ـ۳۴ یک مدار ساده RL راه‌اندازی‌شده با تابع تحریک ولتاژ پله‌ای.

مدت‌ها پس از میراشدن بخش گذرا ($t \to \infty$) مدار، یک مدار ساده dc رانده‌شده با منبع ولتاژ 12 V است. القاگر به صورت اتصال کوتاه درمی‌آید، پس:

$$i(\infty) = \frac{12}{1000} = 12\text{ mA}$$

منظور از $i(3^-)$ چیست؟ این به معنی لحظه‌ای قبل از تغییر ولتاژ منبع است. برای $t < 3$، $u(t - 3) = 0$ است. پس $i(3^-) = 0$ می‌باشد.

در $t = 3^+$ تابع تحریک $12u(t - 3) = 12$ V است. با این وجود، چون جریان القاگر در مدت‌زمان 0 تغییر نمی‌کند، پس $i(3^+) = i(3^-) = 0$ است.

سرراست‌ترین روش تحلیل مدار برای $t > 3$ s، نوشتن مجدد معادله (۲۵) به صورت زیر است:

$$i(t') = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt'/L}\right)u(t')$$

و توجه کنید که این معادله به مدار ما هم قابل اِعمال می‌باشد، به شرطی که محور زمان را طوری جابه‌جا کنیم که:

$$t' = t - 3$$

بنابراین با $V_0/R = 12$ mA و $R/L = 20{,}000\ s^{-1}$:

$$i(t - 3) = \left(12 - 12e^{-20{,}000(t-3)}\right)u(t - 3)\text{ mA} \tag{۲۶}$$

که می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$i(t) = \left(12 - 12e^{-20{,}000(t-3)}\right)u(t - 3)\text{ mA} \tag{۲۷}$$

زیرا تابع پله واحد یک 0 را برای $t > 0$ اجبار می‌کند که با جایگزینی $t = 3.0001$ در معادله (۲۶) یا (۲۷) درمی‌یابیم که $i = 10.38$ mA در زمان $t = 100\ \mu s$ پس از تغییر مقدار منبع است.

تمرین

۸ـ۹ منبع ولتاژ $60 - 40u(t)$ V با مقاومت 10Ω و القاگر 50mH سری است. اندازه جریان و یا ولتاژ القاگر را در t، (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (هـ) 3ms به‌دست‌آورید.

جواب: 6A و 0V، 6A و 40V، 2A و 0V، 4.20A و 22.0V.

پایه‌ریزی درک شهودی

دلیل وجود دو پاسخ طبیعی و واداشته را از مباحث فیزیکی هم می‌توان دریافت. می‌دانیم که مدار ما نهایتاً پاسخ واداشته خواهد داشت. با این وجود، در لحظه پرتاب کلید به وضع دیگر، جریان‌های اولیه در القاگرها (یا در مدار RC، ولتاژ دو سر خازن‌ها) مقادیری که به انرژی ذخیره‌شده در آن‌ها وابسته است، را خواهند داشت. نباید انتظار داشته باشیم که این جریان‌ها و ولتاژها در پاسخ واداشته یکسان باشند. از این رو باید دوره گذرایی وجود داشته باشد که طی آن جریان‌ها و ولتاژها از مقدار اولیه مفروض به مقدار نهایی خود برسند. بخشی از پاسخ که گذر از مقادیر اولیه تا نهایی را فراهم می‌کند، **پاسخ طبیعی** می‌گوییم (اغلب به آن **پاسخ گذرا** می‌گویند). اگر بخواهیم پاسخ یک مدار RL بدون منبع را هم به همین نحو بررسی کنیم، باید بگوییم که پاسخ واداشته صفر است و پاسخ طبیعی، پاسخ اولیه ناشی از انرژی ذخیره‌شده در عنصر را به مقدار نهایی صفر می‌رساند.

این توصیف برای مدارهایی که در نهایت پاسخ طبیعی آن‌ها صفر می‌شود صادق است. پاسخ طبیعی مدارهای فیزیکی که عناصر آن‌ها همیشه با مقاومتی همراه است، میرا است ولی مدارهایی وجود دارند که در آن‌ها پاسخ طبیعی میرا نیست. مثال‌هایی که در آن‌ها جریان در یک حلقه متشکل از القاگرها و یا ولتاژ در یک رشته خازن سری حبس شده‌اند، نمونه‌هایی از اینگونه مدارها هستند.

۸ـ۷ پاسخ طبیعی و واداشته

برای ملاحظه پاسخ کامل به صورت دو بخش، واداشته و طبیعی پشتوانه ریاضی محکمی وجود دارد. دلیل مبتنی بر این واقعیت است که حل هر معادله دیفرانسیل خطی به صورت جمع دو بخش بیان می‌شود: با حل مکمل (پاسخ طبیعی و حل ویژه یا مخصوص) پاسخ واداشته. بدون درگیری با تئوری کلی معادلات دیفرانسیل، بگذارید با یک حل کلی از نوع آن‌چه در بخش قبل دیدیم شروع کنیم:

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

یا

$$di + Pi\ dt = Q\ dt \qquad (۲۸)$$

که Q را می‌توان تابع تحریک تصور کرده و آن را با $Q(t)$ نشان می‌دهیم تا بر وابستگی آن به زمان تأکید گردد. بگذارید بحث را با فرض این‌که P مقدار ثابتی است ساده کنیم. بعداً هم فرض خواهیم کرد که Q ثابت باشد و به این ترتیب خود را به تابع تحریک dc محدود می‌کنیم.

در هر کتاب معادلات دیفرانسیل مقدماتی، نشان داده شده است که با ضرب دو طرف معادله (۲۸) در یک عامل انتگرال‌گیری، دو طرف معادله مشتق کاملی می‌شود و با انتگرال‌گیری می‌توان حل معادله دیفرانسیل را به‌دست‌آورد. متغیرها را از هم جدا نمی‌کنیم،

بلکه فقط آن‌ها را طوری جابه‌جا می‌کنیم که انتگرال‌گیری امکان‌پذیر باشد. برای این معادلات فاکتور انتگرال‌گیری $e^{\int P dt}$ یا ساده‌تر e^{Pt} است زیرا P ثابت فرض شده است. ما هر طرف معادله را در این فاکتور انتگرال‌گیری ضرب می‌کنیم:

$$e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt = Qe^{Pt}dt \qquad (۲۹)$$

با توجه به این‌که سمت چپ رابطه فوق مشتق ie^{Pt} است می‌توان آن را ساده کرد:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt$$

و بنابراین:

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}dt$$

با انتگرال‌گیری از هر سمت:

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}dt + A$$

که A ثابت انتگرال‌گیری است. ضرب طرفین در e^{-Pt} حل $i(t)$ را نتیجه می‌دهد:

$$i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt} \qquad (۳۰)$$

اگر تابع تحریک $Q(t)$ معلوم باشد، آنگاه می‌توانیم فرم $i(t)$ را با ارزیابی انتگرال به‌دست‌آوریم. با این وجود حل چنین انتگرالی را برای هر مسئله تکرار نخواهیم کرد. بلکه علاقمندیم از آن چند نتیجه کلی بگیریم.

پاسخ طبیعی

توجه دارید که برای یک مدار عاری از منبع باید Q برابر صفر باشد و حل هم پاسخ طبیعی زیر است:

$$i_n = Ae^{-Pt} \qquad (۳۱)$$

می‌بینیم که ثابت P هرگز برای مداری شامل تنها مقاومت، القاگر و خازن منفی نمی‌شود. مقدار آن فقط به عناصر غیرفعال و اتصالات آن‌ها در مدار بستگی دارد*. بنابراین پاسخ طبیعی با گذشت زمان به سمت صفر میل خواهد کرد. البته در یک مدار ساده RL باید هم این‌طور باشد، زیرا انرژی اولیه به تدریج در مقاومت مصرف می‌شود و به فرم گرما مدار را ترک می‌کند. مدارهای فیزیکی ایده‌آلی با P مساوی صفر هم موجودند. در این مدارها پاسخ طبیعی هرگز از بین نمی‌رود.

* اگر مدار منبع وابسته یا مقاومت منفی داشته باشد، P می‌تواند منفی باشد.

پس دریافتیم که یکی از دو عبارت تشکیل‌دهنده پاسخ کامل، همان پاسخ طبیعی است که دامنه‌اش به مقدار اولیه پاسخ کامل بستگی دارد و بنابراین به مقدار اولیه تابع تحریک هم وابسته است.

پاسخ واداشته

حال دقت کنید که جمله اول معادله (۳۰) به فرم $Q(t)$، یعنی تابع تحریک بستگی دارد. هرگاه مداری با پاسخ طبیعی میرا داشته باشیم، این جمله پس از ناپدیدشدن کامل پاسخ طبیعی، کل پاسخ را تشکیل خواهد داد. این جمله را معمولاً **پاسخ واداشته** می‌نامند. به آن **پاسخ حالت ماندگار**، **حل ویژه** یا **مخصوص** یا **انتگرال ویژه** هم می‌گویند.

فعلاً فقط به مسائلی خواهیم پرداخت که منبع dc دفعتاً به مدار اعمال شود و پس از آن $Q(t)$ مقداری ثابت است. در صورت تمایل می‌توان انتگرال معادله (۳۰) را محاسبه و پاسخ واداشته را به‌دست‌آورد:

$$i_f = \frac{Q}{P} \qquad (۳۲)$$

و به این ترتیب:

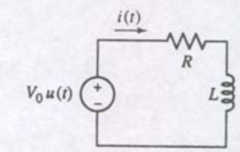
$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} \qquad (۳۳)$$

برای مدار RL سری، $\frac{Q}{P}$ همان جریان ثابت V_0/R و $1/P$ ثابت زمانی τ است. خواهیم دید که پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه انتگرال هم به‌دست‌آورد. چون این پاسخ با گذشت زمان تبدیل به **پاسخ کامل** می‌شود، مقدار آن برابر است با منبع ولتاژ تقسیم بر مقاومت سری. پس پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه به‌دست‌آورد.

تعیین پاسخ کامل

بیایید مدار سری RL ساده را درنظرگرفته و ببینیم چگونه پاسخ کامل را از جمع پاسخ طبیعی واداشته می‌توان به‌دست‌آورد. قبلاً مدار شکل ۸ـ۳۵ تحلیل شد، ولی روش طولانی بود. پاسخ موردنظر جریان $i(t)$ است و ما ابتدا این جریان را به صورت مجموع جریان‌های طبیعی و واداشته بیان می‌کنیم:

$$i = i_n + i_f$$



شکل ۸ـ۳۵ مدار RL سری که برای نشان‌دادن روش تعیین پاسخ به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌کار رفته است.

نمایش تابع پاسخ طبیعی باید مشابه پاسخ بدون منبع باشد. بنابراین منبع ولتاژ پله را با اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم و همان حلقه سری قبلی را به‌دست‌می‌آوریم. بنابراین:

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$

که هنوز دامنه A باید محاسبه شود. چون مقدار اولیه مربوط به پاسخ کامل است، ما نمی‌توانیم به سادگی $A = i(0)$ را فرض کنیم.

حال به سراغ پاسخ واداشته می‌رویم. در این مسئله خاص، پاسخ واداشته باید ثابت باشد، زیرا منبع همواره مقدار ثابت V_0 می‌باشد. پس از مردن پاسخ طبیعی ولتاژی در دو سر القاگر وجود نخواهد داشت و لذا ولتاژ V_0 در دو سر مقاومت R ظاهر می‌گردد و بنابراین پاسخ واداشته چنین است:

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

توجه کنید که پاسخ واداشته به‌طور کامل معین شده است و دامنه مجهولی در آن وجود ندارد. اکنون با ترکیب دو پاسخ داریم:

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

و برای ارزیابی A مقدار اولیه را اعمال می‌کنیم. قبل از $t = 0$ جریان صفر است و نمی‌تواند مقدار آن ناگهان عوض شود زیرا جریان از القاگر می‌گذرد. بنابراین جریان بلافاصله پس از $t = 0$ برابر صفر است و

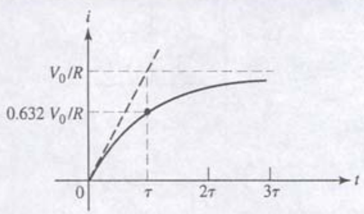
$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

و بالاخره:

$$i = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad (۳۴)$$

دقیقاً توجه کنید که A مقدار اولیه i نیست، زیرا $A = -\frac{V_0}{R}$ و $i(0) = 0$ است. در بررسی مدارهای بدون منبع دیدیم که A مقدار اولیه پاسخ بود. وقتی که توابع تحریک وجود دارند، ما ابتدا باید مقدار اولیه پاسخ را به‌دست‌آوریم و سپس آن را در معادله پاسخ کامل برای یافتن A جایگزین کنیم.

این پاسخ در شکل ۸ـ۳۶ ترسیم شده است و ما می‌توانیم چگونگی ایجاد جریان را از مقدار اولیه صفرش به مقدار نهایی $\frac{V_0}{R}$ ملاحظه نماییم. گذر دقیقاً 3t طول می‌کشد. اگر مدار سیم‌پیچ میدان یک موتور dc را نشان دهد، ممکن‌است $L = 10H$ و $R = 20\Omega$ باشد و لذا $\tau = 0.5s$ به‌دست‌می‌آید. پس جریان میدان در کمتر از 0.5s برقرار می‌شود. در یک ثابت زمانی، جریان حدود 63.2 درصد مقدار نهایی خود خواهد بود.



شکل ۸ـ۳۶ جریان القاگر مدار شکل ۸ـ۳۵. اگر شیب اولیهٔ منحنی را ادامه دهیم پاسخ واداشته ثابت را در $t = \tau$ قطع می‌کند.

مثال ۸ـ۸

$i(t)$ را برای تمام مقادیر زمان در شکل ۸ـ۳۷ معین کنید.

مدار دارای یک منبع ولتاژ dc و یک منبع ولتاژ پله است. می‌توانیم در سمت چپ القاگر را با معادل تونن جایگزین نماییم، ولی بیایید آن مدار معادل را تنها به صورت یک منبع سری با یک مقاومت تصور کنیم. این مدار فقط دارای یک عنصر ذخیره کننده انرژی، القاگر می‌باشد. پس ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2 \text{ s}$$

و به یاد داریم:

$$i = i_f + i_n$$

بنابراین پاسخ طبیعی مانند قبل یک نمایی منفی است:

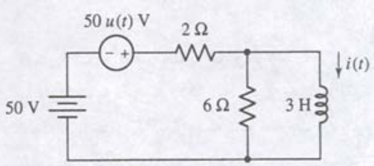
$$i_n = Ke^{-t/2} \text{ A} \qquad t > 0$$

چون تابع تحریک یک منبع dc است، پاسخ واداشته جریان ثابتی خواهد بود. القاگر در برابر dc مثل یک مدار اتصال کوتاه عمل می‌کند. به‌طوری‌که:

$$i_f = \frac{100}{2} = 50 \text{ A}$$

بنابراین:

$$i = 50 + Ae^{-0.5t} \text{ A} \qquad t > 0$$



شکل ۸ـ۳۷ مدار مثال ۸ـ۸

برای ارزیابی K، باید مقدار اولیه‌ای را برای جریان القاگر حساب کنیم. قبل از $t = 0$ جریان برابر 25A بوده و نمی‌تواند آناً تغییر کند. بنابراین:

$$25 = 50 + K$$

یا

$$K = -25$$

از این رو:

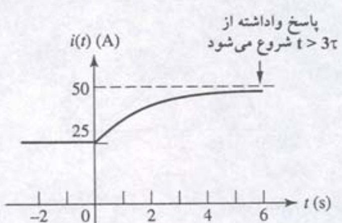
$$i = 50 - 25e^{-0.5t} \text{ A} \qquad t > 0$$

با بیان جریان زیر حل را کامل می‌کنیم:

$$i = 25 \text{ A} \qquad t < 0$$

و با رابطه زیر جریان در همه زمان‌ها به‌دست‌می‌آید:

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})\, u(t) \text{ A}$$



شکل ۸ـ۳۸ پاسخ $i(t)$ مدار شکل ۸ـ۳۷ که برای زمان‌های کمتر و بیشتر از صفر ترسیم شده است.

پاسخ کامل در شکل ۸ـ۳۸ ترسیم شده است. ببینید چگونه پاسخ طبیعی، پاسخ در $t < 0$ را به پاسخ واداشته ثابت وصل می‌کند.

تمرین

۸ـ۱۰ منبع ولتاژ $v_s = 20u(t)$ V با مقاومت 200Ω و القاگر 4H سری است. جریان القاگر را در زمان t، (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) 8 mA و (د) 15 ms به‌دست‌آورید.

جواب: 0، 0، 33.0 mA و 52.8 mA.

به‌عنوان آخرین مثال از کاربرد این روش که به کمک آن می‌توان پاسخ کامل هر مدار را در معرض یک تغییر ناگهانی به‌طور ذهنی نوشت، دوباره یک مدار RL سری را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۹ـ۸

پاسخ جریان را در یک مدار RL سری ساده وقتی که تابع تحریک یک پالس ولتاژ مربعی با دامنه V_0 و دوره t_0 باشد را پیدا کنید.

ما تابع تحریک را به‌صورت مجموعی از دو منبع ولتاژ پله $V_0u(t)$ و $-V_0u(t - t_0)$ طبق شکل ۳۹ـ۸ (الف) و (ب) نشان می‌دهیم و برای به‌دست‌آوردن پاسخ از اصل تجمیع استفاده خواهیم کرد. فرض کنید که $i_1(t)$ بخشی از جریان $i(t)$ بدلیل فقط منبع بالایی $V_0u(t)$ و i_2 مربوط به بخش پایینی $V_0u(t - t_0)$ به تنهایی باشد. آنگاه:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

اکنون هدف ما نوشتن هر یک از پاسخ‌های جزئی i_1 و i_2 به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته است. پاسخ $i_1(t)$ آشنا به نظر می‌رسد. این مسئله به صورت معادله (۱۵) حل شد:

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad t > 0$$

توجه کنید که این حل فقط برای $t > 0$ معتبر است.

اکنون توجه خود را به منبع دیگر و پاسخ آن یعنی $i_2(t)$ معطوف می‌کنیم. تنها پلاریته یا قطبیت منبع و زمان اعمال آن متفاوت است. بنابراین لزومی ندارد که فرم پاسخ طبیعی واداشته آن را معین کنیم. پس به کمک حل $i_1(t)$ می‌توانیم این پاسخ را هم بنویسیم:

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t - t_0)/L}] \qquad t > t_0$$

که محدوده مجاز t، $t > t_0$ باید مجدداً ذکر شود.

اکنون دو جواب را با هم جمع می‌کنیم ولی این کار باید با دقت انجام شود زیرا هر یک در فاصله زمانی متفاوتی معتبر است. بنابراین:

$$i(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (۳۵)$$

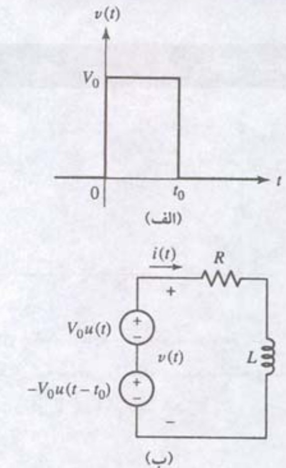
$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad 0 < t < t_0 \qquad (۳۶)$$

و

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t - t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

یا

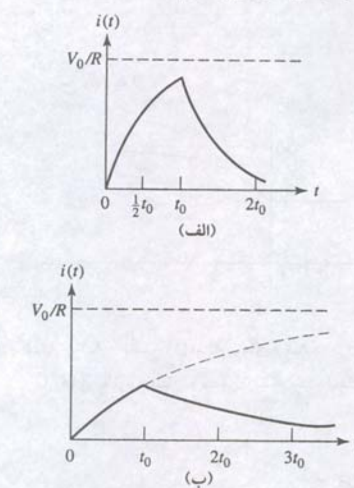
$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{-Rt_0/L} - 1) \qquad t > t_0 \qquad (۳۷)$$



شکل ۳۹ـ۸ (الف) یک پالس ولتاژ مربعی که به‌عنوان تابع تحریک مدار RL سری به‌کار رفته است. (ب) مدار RL سری که تابع تحریک آن به صورت ترکیب سری دو منبع ولتاژ مستقل است. می‌خواهیم $i(t)$ را پیدا کنیم.

گرچه معادلات (۳۵) تا (۳۷) به‌طور کامل پاسخ مدار را در شکل ۳۹ـ۸ (ب) به پالس شکل ۳۹ـ۸ (الف) توصیف می‌کند، خود جریان به هر دو ثابت زمانی τ و دوره کاری t_0 وابسته است. این دو منحنی در شکل ۴۰ـ۸ نشان داده شده‌اند.

منحنی (الف) برای حالتی است که ثابت زمانی فقط نصف عرض پالس است. بخش صعودی آن که نمایی است قبل از نزول به V_0/R می‌رسد. حالت دیگر در نمودار (ب) نشان داده شده است و ثابت زمانی آن دو برابر t_0 است و بنابراین پاسخ هرگز شانس رسیدن به دامنه‌های بیشتر را ندارد.



شکل ۴۰ـ۸ دو منحنی پاسخ برای مدار شکل ۳۹ـ۸ (ب). در شکل (الف) τ برابر $t_0/2$ است. (ب) τ برابر $2t_0$ می‌باشد.

روند به‌کاررفته در یافتن پاسخ مدار RL به هنگام اعمال ناگهانی منبع dc که با قطع و وصل کلید انجام می‌شود در زیر خلاصه شده است. فرض می‌کنیم که مدار قابل کاهش به یک

مقاومت معادل سری R_{eq} با یک القاگر معادل L_{eq} است که در آن همه منابع مستقل صفر شده‌اند. پاسخی که به جست‌وجوی آن هستیم با $f(t)$ نشان داده می‌شود.

۱. تمام منابع را بکُشید، مدار را برای تعیین R_{eq} و L_{eq} ساده کنید. ثابت زمانی $\tau = L_{eq}/R_{eq}$ را بیابید.

۲. با فرض اتصال کوتاه‌بودن L_{eq}، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن $i_L(0^-)$، یعنی جریان القاگر قبل از قطع، به‌کاربگیرید.

۳. مجدداً با فرض اتصال کوتاه‌بودن L_{eq}، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن پاسخ واداشته به‌کارببرید. این مقدار $f(t)$ به ازای میل t به بی‌نهایت است و ما آن را با $f(\infty)$ نشان می‌دهیم.

۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌دست‌آورید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$

۵. $f(0^+)$ را با استفاده از شرط $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ بیابید. در صورت تمایل می‌توانید L_{eq} را با منبع جریان $i_L(0^+)$ (اگر مدار باز باشد $i(0^+) = 0$ است) در این محاسبات جایگزین کنید. به استثنا جریان القاگر (و ولتاژ خازن) دیگر جریان‌ها و ولتاژهای مدار می‌توانند ناگهان عوض شوند.

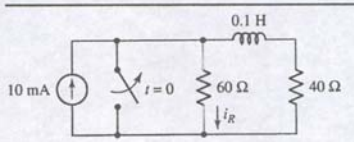
۶. $f(0^+) = f(\infty) + A$ و $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ یا

(مقدار نهایی − مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل $e^{-t/\tau}$

تمرین

۱۱ـ۸ مدار شکل ۴۱ـ۸ مدت‌ها به همان شکل بوده است. کلید در $t = 0$ باز می‌شود. i_R را در زمان (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 1.5ms به‌دست‌آورید.

جواب: 0، 10mA، 4mA و 5.34mA.



شکل ۴۱ـ۸

۸ـ۸ مدارهای RC واداشته

پاسخ کامل هر مدار RC را نیز می‌توان از جمع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته به‌دست‌آورد. چون رویه نهایتاً مشابه با چیزی است که قبلاً در مدارهای RL دیدیم بهترین روش در این مرحله توضیح مثالی به صورت کامل است که هدف تنها کمیت مرتبط با خازن نیست بلکه جریان در یک مقاومت هم هست.

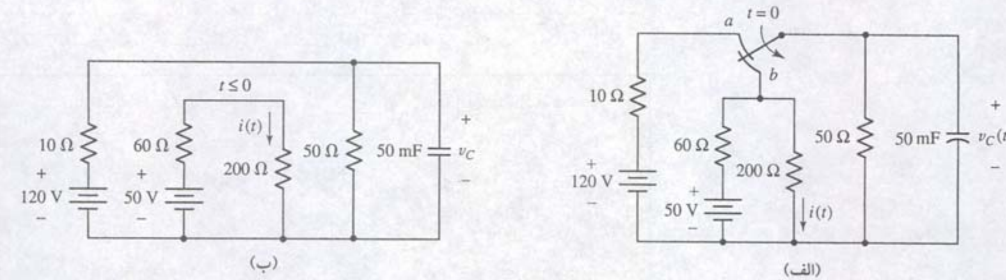
مثال ۱۰ـ۸

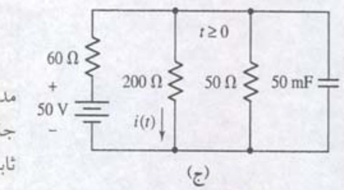
ولتاژ خازن $v_C(t)$ و جریان $i(t)$ را در مقاومت 200Ω شکل ۴۲ـ۸ برای همه زمان‌ها بیابید.

با حالت مدار در $t < 0$ که متعلق به سوئیچ درحالت a است، طبق شکل ۴۲ـ۸ (ب) شروع می‌کنیم. ما فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا ناپدید شده باشد، و تنها پاسخ واداشته حاصل از منبع 120V را داشته باشیم که مربوط به یافتن $v_C(0^-)$ است. سپس ولتاژ اولیه را با یک تقسیم ولتاژ ساده به‌دست‌می‌آوریم:

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10}(120) = 100 \text{ V}$$

چون ولتاژ خازن آناً تغییر نمی‌کند، این ولتاژ در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ معتبر است.





شکل ۸ـ۴۲ (الف) یک مدار RC که در آن پاسخ کامل v_C و i با جمع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌دست‌می‌آید. (ب) مدار در $t \le 0$. (ج) مدار در $t \ge 0$.

اکنون سوئیچ به حالت b پرتاب می‌گردد، پاسخ کامل چنین است:

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

مدار مربوطه در شکل ۸ـ۴۲(ج) برای سهولت کار ترسیم شده است. فرم پاسخ طبیعی با جایگزینی منبع توسط 50V به وسیله مدار اتصال کوتاه و ارزیابی مقاومت معادل برای یافتن ثابت زمانی به‌دست‌می‌آید (به بیان دیگر مقاومت معادل تونن نظاره شده با خازن):

$$R_{eq} = \frac{1}{1/50 + 1/200 + 1/60} = 24\,\Omega$$

بنابراین:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C} = Ae^{-t/1.2}$$

برای یافتن پاسخ واداشته برای کلید در وضعیت b، آنقدر صبر می‌کنیم تا ولتاژها و جریان‌ها دیگر تغییر نکنند، بنابراین خازن به صورت مدار باز خواهد بود. با روش تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_{C_f} = 50\left(\frac{200 \parallel 50}{50 + 200 \parallel 50}\right) = 50\left(\frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250}\right) = 20 \text{ V}$$

بنابراین:

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2} \text{ V}$$

و از مقدار اولیه حاصل قبلی:

$$100 = 20 + A$$

یا

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} \text{ V} \qquad t \ge 0$$

و

$$v_C = 100 \text{ V} \qquad t < 0$$

این پاسخ در شکل ۸ـ۴۳(الف) کشیده شده است و دوباره پاسخ طبیعی فرم گذرایی را از مقدار اولیه به پاسخ نهایی دارا است.

اکنون به سراغ $i(t)$ می‌رویم. لزومی ندارد که این پاسخ حین کلیدزنی ثابت باشد. هنگامی که اتصال در a باشد، واضح است که $i = 50/260 = 192.3$ mA. وقتی‌که کلید به b می‌رود، پاسخ واداشته برابر است با:

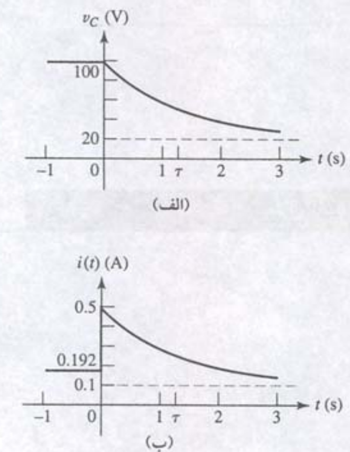
$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)}\left(\frac{50}{50 + 200}\right) = 0.1 \text{ A}$$

فرم پاسخ طبیعی همان فرم ولتاژ خازن است که قبلاً به دست آمد:

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

از ترکیب پاسخ طبیعی و واداشته داریم:

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} \text{ A}$$



شکل ۸ـ۴۳ (الف) پاسخ v_C و (ب) پاسخ i مدار شکل ۸ـ۴۲ برحسب زمان.

برای محاسبه A باید $i(0^+)$ را بدانیم. این مقدار با توجه به عنصر ذخیره‌کننده انرژی خازن حاصل می‌گردد. این حقیقت که v_C حین کلیدزنی متوالی باید در 100V ثابت بماند شرط تعیین‌کننده دیگر جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^+$ است. چون $v_C(0^+) = 100$ V است و نیز خازن با مقاومت 200Ω موازی است، می‌بینیم که $i(0^+) = 0.5$A، $A = 0.4$A و بنابراین:

$$i(t) = 0.1923 \text{ A} \qquad t < 0$$
$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \text{ A} \qquad t > 0$$

یا

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4^{-t/1.2})\,u(t) \text{ A}$$

که آخرین عبارت برای همه زمان‌های t صحیح است.

پاسخ کامل فوق را با $u(-t)$ که در $t < 0$ برابر واحد و در $t > 0$ برابر صفر است هم می‌توان نوشت. بنابراین:

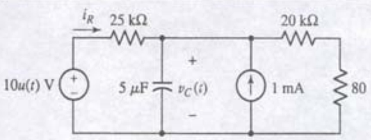
$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})\,u(t) \text{ A}$$

این پاسخ در شکل ۸ـ۴۳(ب) ترسیم شده است. توجه کنید که برای نوشتن فرم تابعی پاسخ این مدار با تک‌عنصر ذخیره‌ساز انرژی، تنها چهار عدد لازم است تا رسم شود: یکی مقدار ثابت قبل از کلیدزنی (0.1923 A)، مقدار لحظه‌ای پس از کلیدزنی (0.5A)، پاسخ واداشته ثابت (0.1A) و ثابت زمانی (1.2s). سپس تابع نمایی منفی به راحتی نوشته می‌شود.

تمرین

۸ـ۱۲ برای مدار شکل ۸ـ۴۴، $v_C(t)$ را در t (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 0.08s بیابید.

جواب: 20V، 20V، 28V و 24.4V.



شکل ۸ـ۴۴

با توجه به دوگان عبارات انتهایی بخش ۸.۷ نتیجه‌گیری لازم را انجام می‌دهیم.

روالی که برای یافتن پاسخ یک مدار RC پس از قطع یا وصل منابع dc در درون یا بیرون مدار در زمانی مثل $t = 0$ به کارمی‌رود، در زیر خلاصه شده است. ما فرض می‌کنیم که با صفرکردن همه منابع، مدار قابل کاهش به یک R_{eq} موازی با یک خازن C_{eq} باشد. پاسخی که در جست‌وجوی آن هستیم با f(t) نشان داده شده است.

۱. با کشتن همه منابع مستقل، مدار را ساده کنید تا R_{eq} و C_{eq} و ثابت زمانی $\tau = R_{eq}C_{eq}$ به‌دست‌آید.

۲. با فرض C_{eq} به صورت مدار باز، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن $v_C(0^-)$ که ولتاژ خازن درست قبل از قطع است به‌کاربرید.

۳. دوباره C_{eq} را مدار باز فرض کنید، از تحلیل dc استفاده کرده پاسخ واداشته را به دست آورید. این مقداری از f(t) است که با $t \to \infty$ به‌دست‌می‌آید. ما آن را f(∞) می‌نامیم.

۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های واداشته و طبیعی بنویسید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$

۵. با استفاده از شرط $v_C(0^+) = v_C(0^-)$، $f(0^+)$ را بیابید. اگر مایلید، C_{eq} در این‌جا ممکن‌است با منبع ولتاژ $v_C(0^+)$ (اتصال کوتاه اگر $v_C(0^+) = 0$ باشد) جایگزین شود. به استثنا ولتاژ خازن (و جریان القاگر)، دیگر ولتاژها و جریان‌های مدار ممکن‌است ناگهان تغییر کنند.

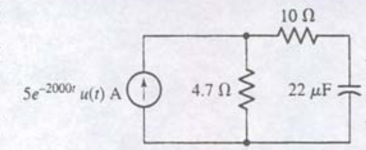
۶. $f(0^+) = f(\infty) + A$ و $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ یا

پاسخ کامل = مقدار نهایی + (مقدار اولیه − مقدار نهایی)$e^{-t/\tau}$

آنچنانکه هم‌اکنون دیدیم، گام‌های یکسانی که به تحلیل مدارهای RL اِعمال شد، قابل اِعمال به مدارهای RC هم می‌باشد. تاکنون خود را به تحلیل مدارها با توابع تحریک dc محدود کردیم، غافل از این‌که معادله (۳۰) برای توابع عمومی‌تری مثل $Q(t) = 9\cos(5t - 7°)$ یا $Q(t) = 2e^{-5t}$ هم صحیح است. قبل از نتیجه‌گیری این بخش ما یک چنین منبع غیر dc را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۸ـ۱۱

در شکل ۸ـ۴۵ عبارتی برای $v(t)$ در $t > 0$ معین کنید.



شکل ۸ـ۴۵ یک مدار ساده RC که با یک تابع نمایی میرا راه‌اندازی شده است.

بر اساس تجربه، یک پاسخ کاملی به فرم زیر مورد انتظار است:

$$v(t) = v_f + v_n$$

که v_f تابع تحریک و v_n فرم $Ae^{-t/\tau}$ را دارد.

اما ثابت زمانی مدار چقدر است؟ ما منبع خود را با یک بار جایگزین کرده و مقاومت معادل تونن را موازی با خازن می‌یابیم:

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7\ \Omega$$

بنابراین ثابت زمانی ما برابر است با:

$$\tau = R_{eq}C = 323.4\ \mu s$$

یا

$$1/\tau = 3.092\times10^3\ s^{-1}$$

برای پیش‌رفتن چندین راه وجود دارد و شاید سرراست‌ترین آن‌ها انجام تبدیل منبع است، و نتیجه‌اش $23.5e^{-2000t}u(t)$ V است که سری با مقاومت 14.7 Ω و 22 μF می‌باشد (دقت کنید که ثابت زمانی تغییر نمی‌کند).

با نوشتن معادله KVL برای $t > 0$ داریم:

$$23.5e^{-2000t} = (14.7)(22\times10^{-6})\frac{dv}{dt} + v$$

با کمی دستکاری داریم:

$$\frac{dv}{dt} + 3.092\times10^3 v = 72.67\times10^3 e^{-2000t}$$

که در مقایسه با معادلات (۲۸) و (۳۰) اجازه می‌دهد تا پاسخ کامل را بنویسیم:

$$v(t) = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

که در حالت ما $P = 1/\tau = 3.092\times10^3$ و $Q(t) = 72.67\times10^3e^{-2000t}$ است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-3092t}\int 72.67\times10^3 e^{-2000t}e^{3092t}dt + Ae^{-3092t}\ \text{V}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$v(t) = 66.55e^{-2000t} + Ae^{-3092t}\ \text{V} \qquad (۳۸)$$

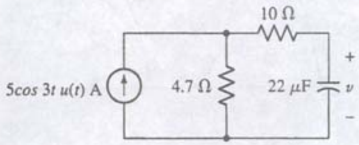
تنها منبع ما با تابع پله و مقدار صفر برای $t < 0$ کنترل می‌شود، بنابراین $v(0^-) = 0$. چون v ولتاژ یک خازن است، $v(0^-) = v(0^+)$، و بنابراین مقدار اولیه $v(0) = 0$ است. با جایگزینی در معادله (۳۸) داریم $A = -66.55$ V و لذا:

$$v(t) = 66.55(e^{-2000t} - e^{-3092t})\ \text{V},\qquad t > 0$$

تمرین

۸ـ۱۳ ولتاژ خازن v را در مدار شکل ۸ـ۴۶ برای $t > 0$ معین کنید.

جواب: $23.5\cos 3t + 22.8\times10^{-3}\sin 3t - 23.5e^{-3092t}$ V



شکل ۸ـ۴۶ یک مدار RC راه‌اندازی‌شده به وسله تابع تحریک سینوسی.

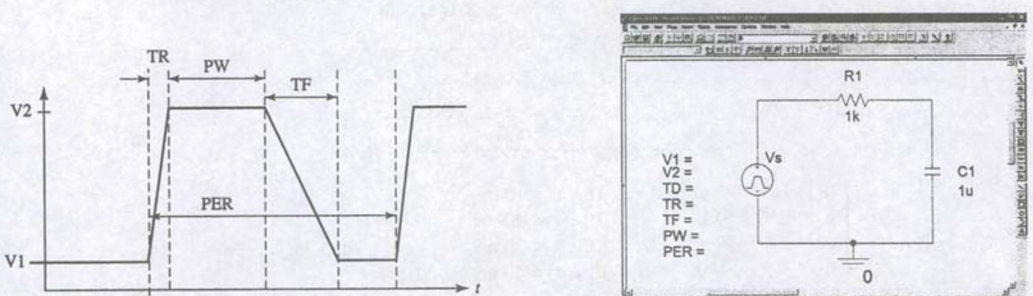
۸ـ۹ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی[1]

در مثال ۸ـ۹ ما به‌طور خلاصه پاسخ یک مدار RL را به موج پالسی بررسی کردیم که در آن یک منبع به‌طور موثر در خارج از مدار به صورت متوالی سوئیچ می‌گردد. این نوع در عمل خیلی رایج است، درحالی‌که به بعضی از مدارها فقط یک بار انرژی داده می‌شود (مثلاً مدارهای تریگر ایربگ اتومبیل). در پیش‌بینی پاسخ یک مدار RL یا RC که به پالس‌ها و سری‌هایی از پالس متصل است ـ بعضی اوقات به آن مدارهای سوئیچ‌شده متوالی می‌گویند ـ کلید موضوع سایز نسبی ثابت زمانی مدار به زمان‌های متفاوتی است که رشته پالس تعریف می‌کند. اساس کار در پشت تحلیل این است که عنصر ذخیره‌ساز انرژی زمان کافی برای شارژ قبل از انتهای پالس دارد و آیا زمان دشارژ آن قبل از شروع پالس بعدی کافی است.

مدار شکل ۸ـ۴۷ (الف) را درنظر بگیرید، که به یک منبع ولتاژ پالسی‌شده وصل است و به وسیله هفت پارامتر در شکل ۸ـ۴۷ (ب) توصیف شده است. موج بین دو مقدار **V1** و **V2** محدود است. زمان t_r لازم برای تغییر از **V1** به **V2** را زمان صعود (**TR**) و زمان t_f لازم برای تغییر از **V2** به **V1** را زمان نزول (**TF**) گویند. دوره کاری W_P پالس را پهنای پالس (**PW**)، و پریود T شکل موج (**PER**) زمانی است که موج برای تکرار لازم دارد. توجه کنید که SPICE زمان تأخیر (**TD**) را قبل از شروع رشته پالس اجازه می‌دهد که می‌تواند در میرایی پاسخ گذرا در بعضی آرایش‌ها مفید باشد.

به‌خاطر بحث، ما زمان تأخیر را صفر، V1 = 0 و V2 = 9 V انتخاب می‌کنیم. ثابت زمانی مدار τ = RC = 1 ms است، لذا زمان صعود و نزول را در 1 ns تنظیم می‌نماییم. گرچه SPICE اجازه تغییر ولتاژ در زمان صفر را نمی‌دهد زیرا با استفاده از فواصل زمانی گسسته معادلات دیفرانسیل را حل می‌کند، ولی در مقایسه با ثابت زمانی مدار، 1 ns به‌طور موثر آنی است.

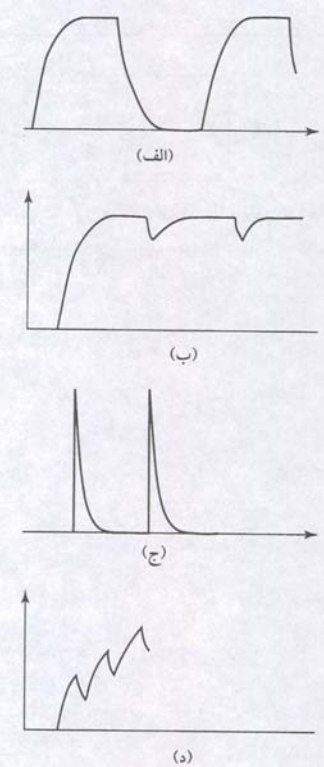
ما چهار حالت اصلی را که در جدول ۸ـ۱ خلاصه شده است، ملاحظه خواهیم کرد. در دو حالت اول، پهنای پالس W_P خیلی طولانی‌تر از ثابت زمانی τ است، بنابراین انتظار داریم که پاسخ‌های گذرا از شروع پالس قبل از اتمام پالس از بین برود. در دو حالت بعد عکس آن صحیح است: پهنای پالس آنقدر کوتاه است که خازن زمانی کافی برای شارژ کامل قبل از پایان پالس ندارد. موضوع مشابهی زمانی حادث می‌شود که ما پاسخ مدار را در هنگامی که زمان بین پالس‌ها $(T - W_P)$ در مقایسه با ثابت زمانی یا کوتاه (حالت II) یا طولانی (حالت III) باشد، به دست آوریم.



(ب) (الف)

شکل ۸ـ۴۷ (الف) شماتیک یک مدار RC ساده متصل به موج ولتاژ پالسی. (ب) نمودار تعریف پارامترهای VPULSE.

1. sequentially switched circuits



شکل ۴۸ـ۸ ولتاژ خازن مدار RC با پهنای پالس و پریود در (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.

جدول ۸ـ۱ چهار حالت جداگانه پهنای باند و پریود نسبت به ثابت زمانی 1 ms.

حالت	پهنای پالس W_P	پریود T
I	10 ms $(\tau \ll W_p)$	20 ms $(\tau \ll T - W_p)$
II	10 ms $(\tau \ll W_p)$	10.1 ms $(\tau \gg T - W_p)$
III	0.1 ms $(\tau \gg W_p)$	10.1 ms $(\tau \ll T - W_p)$
IV	0.1 ms $(\tau \gg W_p)$	0.2 ms $(\tau \gg T - W_p)$

ما به صورت کیفی پاسخ مدار را برای هر چهار حالت در شکل ۴۸ـ۸ کشیده‌ایم و به‌طور اختیاری ولتاژ خازن را به عنوان کمیت موردنظر برگزیده‌ایم، چون هر ولتاژ یا جریانی وابستگی زمانی یکسانی دارد. در حالت I، خازن زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل دارد (شکل ۴۸ـ۸ (الف))، درحالی‌که در حالت II (شکل ۴۸ـ۸ (ب)) که زمان بین پالس‌ها کاهش یافته، زمان لازم برای دشارژ کامل وجود ندارد. برعکس خازن در حالات III (شکل ۴۸ـ۸ (ج)) یا حالت IV (شکل ۴۸ـ۸ (د)) وقت کافی برای شارژ کامل ندارد.

حالت I: زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل

ما می‌توانیم مقادیر دقیقی را برای پاسخ در هر حالت به دست آوریم که البته با یک سری پاسخ امکان‌پذیر است. ما ابتدا حالت I را بررسی می‌کنیم. چون خازن فرصت شارژ کامل را دارد، پاسخ واداشته متعلق به ولتاژ راه‌انداز dc 9 V است. پس پاسخ کامل به پالس اول عبارت‌است‌از:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V}$$

با $v_C(0) = 0$، $A = -9$ V است و بنابراین:

$$v_C(t) = 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V} \qquad (۳۹)$$

در فاصله زمانی $0 < t < 10$ ms است. در $t = 10$ mA منبع ناگهان به 0 V افت می‌کند، و خازن شروع به دشارژ در مقاومت می‌نماید. در این فاصله زمانی ما با یک مدار ساده RC بی‌منبع مواجه هستیم و می‌توانیم پاسخ را چنین بنویسیم:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-0.01)}, \quad 10 < t < 20\ \text{ms} \qquad (۴۰)$$

که $B = 8.99959$ V است که از جایگزینی $t = 10$ ms در معادله (۳۹) حاصل می‌شود. ما مقدار فوق را به 9 V گرد می‌کنیم، توجه داریم که مقدار محاسبه‌شده با فرض ما مبنی بر این‌که گذر اولیه قبل از پایان پالس تلفات دارد، توافق دارد.

در $t = 20$ ms، منبع ولتاژ بلافاصله به 9 V پرش می‌کند، درست قبل از این پدیده ولتاژ خازن از جایگزینی $t = 20$ ms در معادله (۴۰) به دست می‌آید که $v_C(20\ \text{ms}) = 408.6\ \mu\text{V}$ است و در مقایسه با مقدار پیک 9 V در واقع صفر است.

اگر به‌خاطر سادگی چهار رقم باارزش‌تر را نگه داریم، ولتاژ خازن در آغاز پالس دوم صفر است که مثل نقطه شروع ماست. بنابراین معادلات (۳۹) و (۴۰) مبنای پاسخ را برای همه پالس‌های بعدی فراهم می‌کنند و می‌توانیم بنویسیم:

$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V}, & 0 \le t \le 10\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.01)}\ \text{V}, & 10 < t \le 20\ \text{ms} \\ 9(1 - e^{-1000(t-0.02)})\ \text{V}, & 20 < t \le 30\ \text{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.03)}\ \text{V}, & 30 < t \le 40\ \text{ms} \end{cases}$$

و به همین ترتیب.

حالت II: زمان شارژ کامل وجود دارد ولی زمان دشارژ چنین نیست

اینک حالتی را بررسی می‌کنیم که ببینیم اگر خازن نتواند کاملاً دشارژ شود (حالت II) چه پیش می‌آید. معادله (۳۹) هنوز وضعیت بین $0 < t < 10$ ms را توصیف می‌کند، و معادله (۴۰) ولتاژ خازن را در فاصله بین پالس‌ها توصیف می‌کند، که به $10 < t < 10.1$ ms تقلیل یافته است.

درست قبل از ایجاد پالس دوم در $t = 10.1$ ms، اکنون v_C برابر با 8.144 V است؛ خازن تنها 0.1 ms زمان برای دشارژ دارد، و بنابراین هنوز 82 درصد از حداکثر انرژی آن باقی است و پالس بعدی هم می‌رود که آغاز شود. بنابراین در فاصله بعدی:

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \quad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

که $v_C(10.1\ \text{ms}) = 9 + C = 8.144$ V، بنابراین $C = -0.856$ V و

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 20.1\ \text{ms}$$

که خیلی سریع‌تر از پالس قبلی در رسیدن به 9 V است.

حالت III: زمان شارژ کافی نیست ولی دشارژ کامل انجام می‌شود

اما اگر روشن نباشد که دوران گذرا قبل از پایان پالس ولتاژ تمام است یا خیر چه می‌شود؟ در واقع این وضعیت در حالت III رخ می‌دهد. درست همان‌طور که برای حالت I نوشتیم:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V} \qquad (۴۱)$$

رابطه فوق به این حالت می‌تواند اِعمال شود، ولی این بار فقط در فاصله $0 < t < 0.1$ ms خواهد بود. شرط اولیه ما عوض نشده است، لذا مثل قبل $A = -9$ V است. اکنون، قبل از اتمام اولین پالس در $t = 0.1$ ms، می‌بینیم که $v_C = 0.8565$ V است. با این وجود اگر اجازه دهیم خازن کاملاً شارژ شود، با مقدار 9 V ممکن خیلی فاصله دارد که حاصل مستقیم از یک دهم ثابت زمانی است که طول می‌کشد.

اکنون خازن شروع به دشارژ می‌کند، بنابراین:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1 < t < 10.1\ \text{ms} \qquad (۴۲)$$

ما قبلاً معین کردیم که $v_C(0.1^-\text{ms}) = 0.8565$ V، بنابراین $v_C(0.1^+\text{ms}) = 0.8565$ V و جایگزینی در معادله (۴۲) داریم $B = 0.8565$ V. درست در پالس دوم در $t = 10.1$ ms ولتاژ خازن به 0 V افول کرده است؛ این خود مقدار اولیه‌ای در آغاز پالس دوم است و لذا می‌توان معادله (۴۱) را برای پاسخ مربوطه چنین نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \text{V}, \qquad 10.1 < t < 10.2\ \text{ms} \qquad (۴۳)$$

حالت IV: زمان کافی برای شارژ و دشارژ موجود نیست

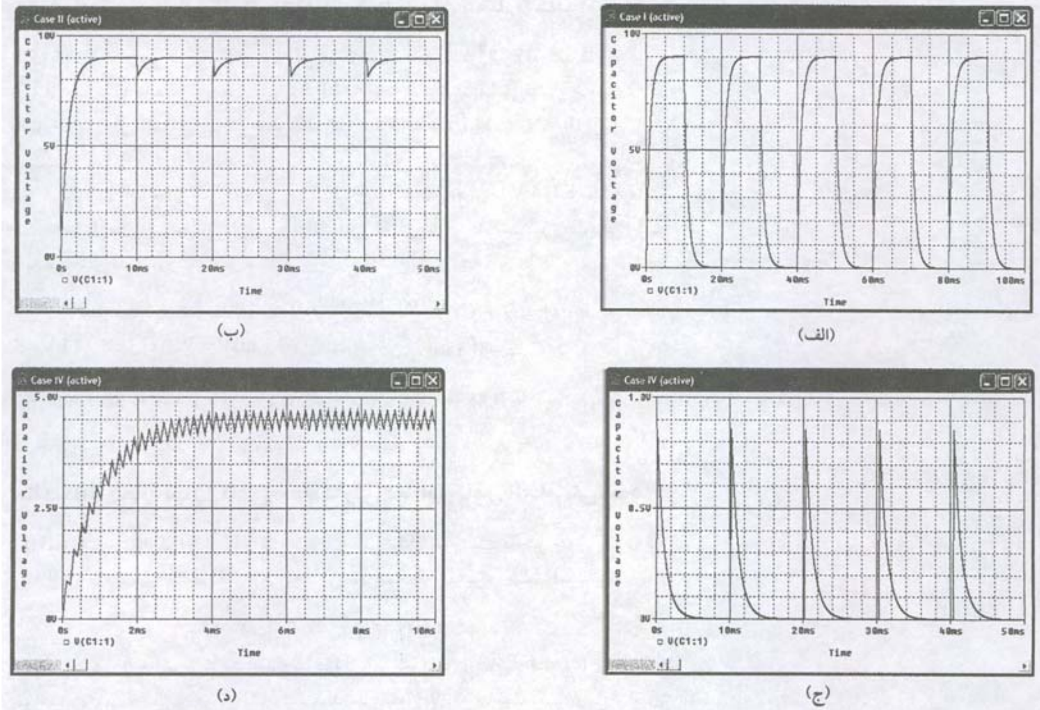
در آخرین حالت ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن عرض پالس و پریود آنقدر کوتاه‌اند که خازن نمی‌تواند در یک پریود کاملاً شارژ یا کاملاً دشارژ گردد. بر اساس تجربیت قبل می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000t}\ \text{V}, \qquad 0 < t < 0.1\ \text{ms} \qquad (۴۴)$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1 < t < 0.2\ \text{ms} \qquad (۴۵)$$

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-2\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.2 < t < 0.3\ \text{ms} \qquad (۴۶)$$

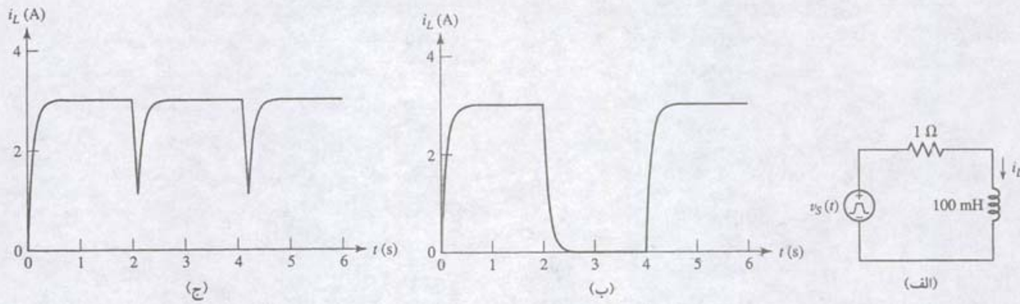
$$v_C(t) = De^{-1000(t-3\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.3 < t < 0.4\ \text{ms} \qquad (۴۷)$$



شکل ۸ـ۴۹ نتایج شبیه‌سازی PSpice متناظر با: (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.

درست قبل از پالس دوم در $t = 0.2$ ms، ولتاژ خازن به $v_C = 0.7750$ V افت می‌کند؛ و زمان برای دشارژ آن موجود نیست. خازن بخش بزرگی از یک انرژی کم را که در آغاز وقت داشته نگه داشته است. برای فاصله زمانی $0.2 < t < 0.3$ ms جایگزینی $v_C(0.2^+) = v_C(0.2^-) = 0.7750$ V در معادله (۴۶) منجر به $C = -8.225$ V می‌گردد. در ادامه، ما معادله (۴۶) را در $t = 0.3$ ms ارزیابی می‌کنیم و $v_C = 1.558$ V را درست قبل از پایان پالس دوم محاسبه می‌نماییم. بنابراین $D = 1.558$ V است و خازن ما به آهستگی ولتاژ خود را طی چندین پالس بالا می‌برد. در این مرحله شاید ترسیم پاسخ‌های مشروح مفید باشد لذا ما نتایج شبیه‌سازی حالت I تا IV را در شکل ۸ـ۴۹ ترسیم کرده‌ایم. دقت کنید که در شکل ۸ـ۴۹(د)، پاسخ گذرای شارژ/دشارژ از نظر شکل مشابه با شکل‌های ۸ـ۴۹(الف) و (ج) است که بر روی یک پاسخ شارژ مانند به فرم $(1 - e^{-t/\tau})$ سوار شده است. بنابراین حدود 3 تا 5 ثابت زمنی برای خازن زمان لازم است تا به مقدار حداکثر شارژ شود و تنها یک پریود جوابگوی شارژ یا دشارژ آن نیست.

چیزی که تاکنون انجام نداده‌ایم، پیش‌بینی رفتار پاسخ برای $t >> 5\tau$ است، هرچند که به انجام آن تمایل داریم، خصوصاً اگر نخواهیم یک رشته طولانی از پالس‌ها را و هر بار یکی بررسی نماییم. توجه دارید که پاسخ شکل ۸ـ۴۹(د) دارای متوسط مقدار 4.50 V از حدود 4 ms به بعد است. این دقیقاً نصف مقداری است که ما انتظار داریم اگر عرض پالس منبع ولتاژ به خازن اجازه شارژ کامل می‌داد. در واقع این متوسط طولانی با ضرب ولتاژ dc خازن در نسبت پهنای پالس به پریود به دست می‌آید.



شکل ۸ـ۵۰ (الف) مدار مسئله ۸ـ۱۴. (ب) حل بخش (الف). (ج) حل بخش (ب).

تمرین

۸ـ۱۴ $i_L(t)$ را در محدوده $0 < t < 6$ s برای

(الف) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-4) - 3u(t-6) + \dots$

(ب) $v_S(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-2.1) - 3u(t-4.1) + \dots$

به دست آورید.

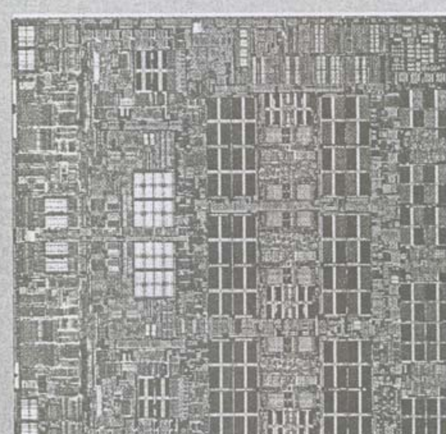
جواب: (الف) شکل ۸ـ۵۰(ب) را ببینید. (ب) شکل ۸ـ۵۰(ج) را ببینید.

کاربرد عملی

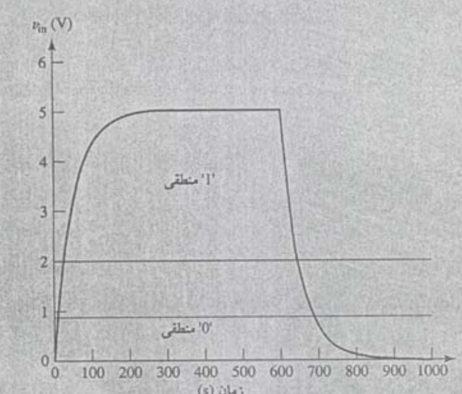
محدودیت‌های فرکانسی در مدارهای مجتمع

مدارهای مجتمع دیجیتال مدرن، مانند آرایه‌های برنامه‌پذیر منطقی (PAL) و ریزپردازنده‌ها (شکل ۸ـ۵۱) متشکل از مدارهای ترانزیستوری بهم وصل شده‌ای به‌نام گیت می‌باشد.

سیگنال‌های دیجیتال به‌طور سمبلیک با صفرها و یک‌ها نشان داده می‌شوند و می‌توانند داده یا دستورالعمل (مانند "add" یا "subtract") باشد. به لحاظ الکتریکی، ما "1" منطقی را با ولتاژ بالا و "0" منطقی را با ولتاژ پایین نشان می‌دهیم. در عمل به هر یک، محدوده ولتاژی اختصاص یافته است. مثلاً در مدارهای منطقی TTL سری 7400، هر ولتاژ بین 2 تا 5V به‌عنوان منطق 1 و هر ولتاژی بین 0 تا 0.8 به‌عنوان منطق 0 تفسیر می‌گردد. ولتاژهای بین 0.8 تا 2V به هیچ‌یک از حالات منطقی متعلق نیستند (شکل ۸ـ۵۲).

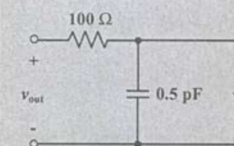


شکل ۸ـ۵۱ IBM Power Chip.



شکل ۸ـ۵۲ تعیین ظرفیت خازنی شارژ/دشارژ مسیر که به ترتیب محدوده ولتاژ TTL را برای "1" منطقی و "0" منطقی تعیین می‌نماید.

یک پارامتر کلیدی در مدارهای دیجیتال سرعت آن‌ها است. در این‌جا منظور از سرعت توانایی واکنش یک گیت از یک حالت منطقی به حالت منطقی دیگر (مثل 0 به 1 و بالعکس) و زمان تأخیر لازم برای حمل خروجی یک گیت به ورودی گیت دیگر است. گرچه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی‌اند و لذا سرعت آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد، مسیرهای درونی آن‌ها هم سرعت مدارهای مجتمع سریع را تحت تأثیر قرار می‌دهد. ما می‌توانیم مسیر بین دو گیت منطقی را با استفاده از مدار ساده RC مدل‌سازی نماییم (با کاهش سایز در طرح‌های جدید، مدل‌های دقیق‌تری برای پیش‌بینی رفتار مدارها لازم است). مثلاً مسیری به طول $2000\mu m$ و عرض $2\mu m$ را درنظربگیرید. می‌توانیم این مسیر را در یک نمونه مدار مجتمع سیلیکانی به صورت ظرفیت 0.5pF و مقاومت 100Ω مدل‌سازی کنیم (شکل ۸ـ۵۳).



شکل ۸ـ۵۳ مدل مداری یک مسیر مداری.

بیایید تصور کنیم که v_{out} نمایش ولتاژ خروجی یک گیت باشد که از منطق "0" به حالت "1" تغییر می‌کند. ولتاژ v_{in} در ورودی گیت دیگر ظاهر می‌شود و ما مایلیم بدانیم چقدر طول می‌کشد تا v_{in} به v_{out} برسد.

با فرض ظرفیت 0.5 pF و خالی‌بودن مسیر اتصال (یعنی $v_{in}(0) = 0$) با محاسبه ثابت زمانی RC برای مسیر به صورت $\tau = RC = 50$ ps، تعریف $t = 0$ به‌عنوان زمان تغییر v_{out}، عبارت زیر را به‌دست‌می‌آوریم:

$$v_{in}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{out}(0)$$

با تنظیم $v_{in}(0) = 0$، می‌بینیم $A = -v_{out}(0)$ است و بنابراین:

$$v_{in}(t) = v_{out}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

خواهد شد. با بررسی این معادله، می‌بینیم که v_{in} پس از 5τ یا 250 ps به $v_{out}(0)$ می‌رسد. اگر ولتاژ v_{out} دوباره قبل از این زمان گذرا عوض شود، آن‌گاه خازن زمان کافی برای تغییر ندارد. در این صورت v_{in} کوچک‌تر از v_{out} خواهد شد. اگر مثلاً فرض شود $v_{out}(0)$ حداقل مقدار خود را داشته باشد، آن‌گاه v_{in} منطق 1 را نخواهد داشت. اگر v_{out} ناگهان به 0 تغییر کند (منطق 0) خازن شروع به تخلیه خواهد کرد به‌طوری‌که v_{in} بیش از حد خالی می‌شود. بنابراین با سوئیچ‌کردن سریع حالات منطقی، قادر نخواهیم بود اطلاعاتی را به گیت دیگر انتقال دهیم. بنابراین سریع‌ترین سرعت تغییر حالات منطقی $(5\tau)^{-1}$ است. این سرعت را می‌توان به وسیله فرکانس کاری مطابق زیر نشان داد:

$$f_{max} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2 \text{ GHz}$$

که ضریب 2 پریود شارژ ـ دشارژ را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم مدار مجتمع ما در فرکانس‌های بالاتر کار کند تا به این ترتیب محاسبات سریع‌تر انجام شود، باید ظرفیت و مقاومت اتصالات درونی را کاهش دهیم.

۸ـ۱۰ خلاصه فصل و مرور

- پاسخ مداری که منابعش ناگهان در داخل یا بیرون مدار حاوی خازن یا القاگر تغییر کند از دو بخش تشکیل شده است: یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته.
- فرم پاسخ طبیعی (که به آن پاسخ گذرا هم می‌گویند) فقط به مقدار قطعات و نحوه اتصال آن‌ها وابسته است.
- فرم پاسخ واداشته آینه‌ای از تابع تحریک است. بنابراین یک تابع dc همواره به پاسخ واداشته ثابت منجر می‌شود.
- مداری که به یک القاکنایی معادل L و یک مقاومت معادل R کاهش یابد، پاسخ طبیعی $i(t) = I_0e^{-t/\tau}$ را دارد، که در آن $\tau = L/R$ ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- مداری که به یک ظرفیت معادل C و یک مقاومت معادل R کاهش یابد، پاسخ طبیعی $v(t) = V_0e^{-t/\tau}$ را دارد که در آن $\tau = RC$ ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- پاسخ پله واحد راهی مفید برای مدل‌سازی باز و بسته‌شدن یک کلید است، ضمن این‌که نیم‌نگاهی هم باید به مقادیر اولیه داشت.
- پاسخ کامل مدار RL و یا RC که با یک منبع dc تحریک شود فرم $f(0^+) = f(\infty) + A$ و
$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$$
یا $e^{-t/\tau}$ (مقدار نهایی − مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل، را دارد.

- پاسخ کامل یک مدار RL یا RC را می‌توان با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای کمیت موردنظر و حل آن میسر می‌شود.
- در مدارهایی که به‌طور متوالی سوئیچ می‌شوند یا به یک موج پالسی وصل هستند، موضوع مرتبط این است که عنصر ذخیره‌کننده زمان کافی برای شارژ یا دشارژ کامل در مقایسه با ثابت زمانی مدار دارد یا نه.

۸ـ۱۱ خواندنی‌های کمکی

A guide to solution techniques for differential equations can be found in:

W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7th ed. New York: Wiley, 2002.

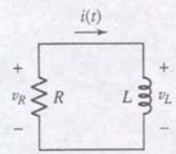
A detailed description of transients in electric circuits is given in:

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I.* New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

مسائل

۸ـ۱ مدار RL بدون منبع

۱. مدار ساده RL در شکل ۸ـ۵۴ نشان داده شده است. اگر $R = 4.7\ k\Omega$، $L = 1\ \mu H$ و $i(0) = 2$ mA باشد، مطلوبست (الف) i در 100 ps؛ (ب) i در $t = 212.8$ ps، (ج) v_R در 75 ps و (د) v_L در 75 ps.



شکل ۸ـ۵۴

۲. مدار شکل ۸ـ۵۴ متشکل از مقاومت $R = 1\ \Omega$ و یک القاکنایی $L = 2$ H است. در $t = 0$، القاگر 100 mJ انرژی می‌گیرد. مطلوبست (الف) i در $t = 1$s؛ (ب) i در $t = 5$s؛ (ج) i در $t = 10$ s و (د) انرژی باقیمانده در القاگر در $t = 2$s.

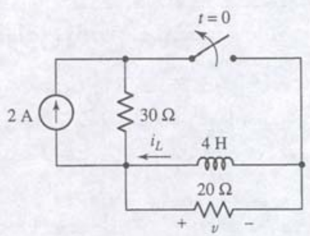
۳. برای مدار ساده RL در شکل ۸ـ۵۴، R برابر $100\ \Omega$ فرض می‌شود. اگر $i(0) = 2$ mA و $i(50\ \mu s) = 735.8\ \mu A$ باشد، مطلوبست مقدار القاکنایی L.

۴. برای مدار ساده شکل ۸ـ۵۴، $L = 3$ mH فرض می‌شود. اگر $i(0) = 1.5$ A و $i(2\ s) = 551.8$ mA باشد، مطلوبست مقدار مقاومت R.

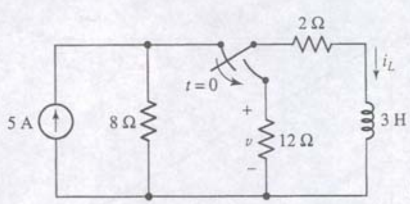
۵. یک القاگر 3 mH در مدار شکل ۸ـ۵۴، 1 J انرژی را در $t = 0$ و 100 mJ انرژی را در $t = 1$ ms ذخیره کرده است، R را محاسبه کنید.

۶. کلید مدار شکل ۸ـ۵۵ مدت‌ها در حالت بسته بوده است. اگر در $t = 0$ کلید باز شود، (الف) i_L را در یک لحظه پس از تغییر کلید بیابید. (ب) v را بلافاصله پس از تغییر وضع کلید به‌دست‌آورید.

۷. کلید شکل ۸ـ۵۶ تک‌پل دو حالته است و نشان می‌دهد که قبل از بازشدن، یک مدار دیگر را می‌بندد. این نوع کلید را معمولاً "وصل قبل از قطع" می‌خوانند. با فرض این‌که کلید از مدت‌ها قبل در وضعیت ترسیم‌شده واقع باشد، مقدار v و i_L را (الف) درست قبل از تغییر وضع کلید و (ب) درست بعد از تغییر وضع کلید، به‌دست‌آورید.

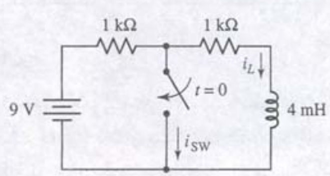


شکل ۸ـ۵۵



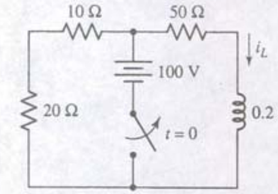
شکل ۸ـ۵۶

۸. پس از آرایش یک‌ساعته در شکل، کلید مدار شکل ۸ـ۵۷ در $t = 0$ بسته می‌شود. در $t = 5\mu s$ مطلوبست: (الف) i_L و (ب) i_{sw}.



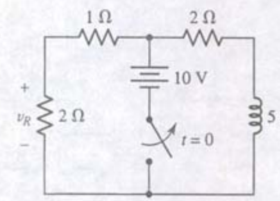
شکل ۸ـ۵۷

۹. کلید مدار شکل ۸-۵۸ پس از مدت‌ها بسته‌بودن در $t = 0$ باز می‌شود. (الف) i_L را برای $t > 0$ پیداکنید. (ب) $i_L(10\text{ms})$ را حساب کنید. (ج) اگر $i_L(t_1) = 0.5 i_L(0)$ باشد، t_1 را بیابید.



شکل ۸-۵۸

۱۰. برای مدار شکل ۸-۵۹، (الف) معادله دیفرانسیلی بنویسید که ولتاژ مقاومت v_R را برای $t > 0$ توصیف کند. (ب) معادله مشخصه را حل کنید. (ج) v_R را درست قبل از بازشدن سوئیچ، و درست بعد از بازشدن سوئیچ و در $t = 1$s محاسبه کنید.

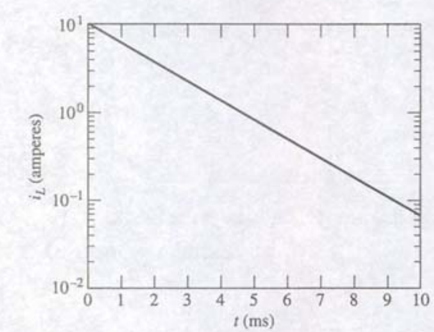


شکل ۸-۵۹

۸-۲ خواص پاسخ نمایی

۱۱. شکل ۸-۷ نمودار i/I_0 را به‌عنوان تابعی از t نشان می‌دهد. (الف) مقادیری از t/τ را معین کنید که در آن i/I_0 برابر 0.1، 0.01 و 0.001 گردد. (ب) اگر خطی مماس در نقطه $t/\tau = 1$ بر منحنی رسم شود، در کجا محور t/τ را قطع می‌کند.

۱۲. با مراجعه به پاسخ شکل ۸-۶۰، ثابت زمانی مدار و جریان اولیه داخل القاگر را به‌دست‌آورید.



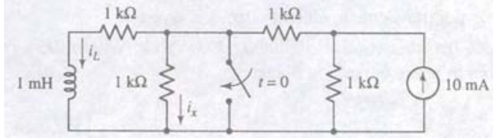
شکل ۸-۶۰

۱۳. ولتاژ مقاومت را در یک مدار RL ساده با مقدار انرژی اولیه 15mJ که در القاگر 10mH ذخیره شده برای R = 1kΩ، R = 10kΩ و R = 100kΩ رسم کنید. جواب خود را با PSpice تأیید نمایید.

۱۴. در مدار شکل ۸-۱، R = 1MΩ و L = 3.3μH می‌باشد. (الف) ثابت زمانی مدار را حساب کنید. (ب) اگر القاگر انرژی اولیه 43μJ را در t = 0 داشته باشد، i_L را در t = 5ps به‌دست‌آورید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

۱۵. یک سیگنال دیجیتال به داخل یک سیم‌پیچ القاکتایی 125.7 μH، ارسال شده است. حداکثر مقدار مجاز مقاومت معادل تونن گیرنده اگر انتقال کمتر از 100ns طول بکشد، چقدر است.

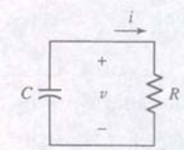
۱۶. کلید شکل ۸-۶۱ قبل از بسته‌شدن در t = 0، مدت‌ها در حالت باز بوده است. در فاصله زمانی -5 < t < 5μs، (الف) $i_L(t)$ و (ب) $i_x(t)$ را ترسیم کنید.



شکل ۸-۶۱

۸-۳ مدار RC بدون منبع

۱۷. در مدار RC موازی در شکل ۸-۶۲، $C = 1\,\mu F$ و $R = 100\,M\Omega$ نشان‌دهندهٔ تلفات در دی‌الکتریک خازن است. خازن 1 mJ انرژی را در $t = 0$ دارد. (الف) ثابت زمانی مدار را تعیین کنید. (ب) i را در 20 s محاسبه نمایید. (ج) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۸-۶۲

۱۸. برای مدار شکل ۸-۶۲، فرض می‌شود که $R = 1\,\Omega$، $C = 2$ F و $i(0) = 10$ V است. v را در شرایط (الف) $t = 1$ s؛ (ب) $t = 2$ s؛ (ج) $t = 5$ s و (د) $t = 10$ s محاسبه کنید.

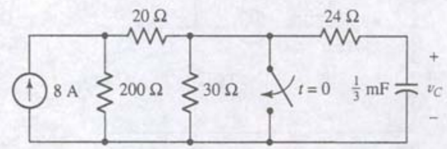
۱۹. از $R = 1\,k\Omega$ و $C = 4$ mF در مدار شکل ۸-۶۱ استفاده شده است. اگر $v(0) = 5$ V باشد، (الف) v را در $t = 1$ ms محاسبه کنید. (ب) i را در $t = 2$ ms محاسبه کنید. (ج) انرژی باقیمانده در خازن را در $t = 4$ ms تعیین کنید.

۲۰. برای مدار RC که در شکل ۸-۶۲ نشان داده شده است، C، 100 pF محاسبه شده است. (الف) اگر $v(0) = 1.5$ V و $v(2\text{ ns}) = 100$ mV باشد، مقدار مقاومت R را به دست آورید. (ب) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.

۲۱. منبع تغذیه یک گیرنده استریو دو خازن بزرگ موازی 50mF دارد. هنگام خاموش‌کردن منبع انرژی، مشاهده می‌کنید که یک LED که به علامت وجود برق است به آهستگی و پس از گذشت زمان چندثانیه‌ای

خاموش می‌شود. به علت نبودن برنامه خوب در تلویزیون تصمیم می‌گیرید آزمایشی را با دوربین 35mm و سرعت متغیر شاتر با چند حلقه فیلم ارزان انجام دهید. با سرعت شاتر 2s، هیچ تصویری روی فیلم ظاهر نمی‌شود. در سرعت 1s یک تصویر ضعیف مشاهده می‌شود. با سرعت 150ms تصویر 14% شدت حاصل از سریع‌ترین سرعت دوربین است. مقاومت معادل تونن مدار متصل به منبع تغذیه گیرنده را تخمین بزنید.

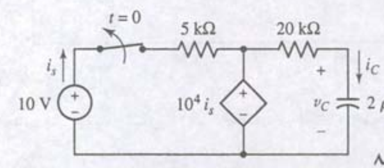
۲۲. (الف) $v_C(t)$ را برای همه زمان‌های شکل ۸-۶۳ بیابید. (ب) در چه زمانی $v_C = 0.1\,v_C(0)$ است.



شکل ۸-۶۳

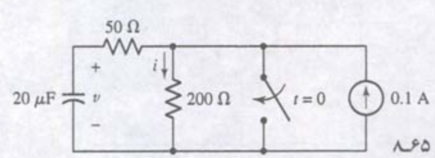
۲۳. یک منبع جریان 4A، یک مقاومت 20Ω و یک خازن 5μF همگی با هم موازیند. دامنه منبع جریان ناگهان در t = 0 به صفر افت می‌کند. در چه زمانی خازن به نصف مقدار اولیه‌اش می‌افتد. (ب) انرژی ذخیره‌شده در این حال در خازن چقدر است؟

۲۴. $i_C(t)$، $v_C(t)$ را برای مدار شکل ۸-۶۴ بیابید و هر دو منحنی را روی یک محور زمانی با -0.1 < t < 0.1 s رسم کنید.



شکل ۸-۶۴

۲۵. برای مدار شکل ۸-۶۵ مقدار جریان i و ولتاژ v را در $t = 0^+$، $t = 1.5$ms و $t = 3.0$s به‌دست‌آورید.

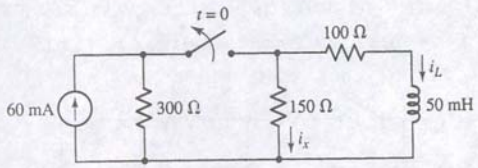


شکل ۸-۶۵

۸-۴ تعمیم دیدگاه

۲۶. سوئیچ در شکل ۸-۶۶ پس از زمان طولانی بسته‌ماندن در $t = 0$ باز شده است. i_L و i_x را در (الف) $t = 0^-$؛ (ب) $t = 0^+$؛ (ج) $t = 300\,\mu s$ محاسبه کنید.

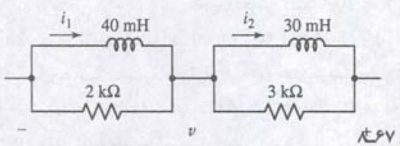
۲۷. یک القاگر 0.2H با یک مقاومت 100Ω موازی است. جریان القاگر در t = 0 برابر 4A است. (الف) $i_L(t)$ را در t = 0.8s به‌دست‌آورید. (ب) اگر یک مقاومت 100Ω دیگر موازی با القاگر در t = 1ms وصل شود، i_L را در t = 2ms محاسبه کنید.



شکل ۸-۶۶

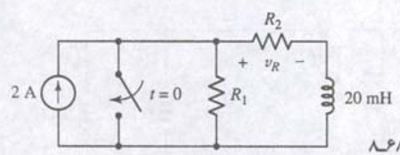
۲۸. یک القاگر 20mH با یک مقاومت 1kΩ موازی است. بگذارید در t = 0 جریان حلقه 40mA باشد. (الف) در چه زمانی جریان 10mA می‌گردد؟ (ب) چه مقاومت سری را باید به مدار در t = 10μs متصل کرد به‌طوری‌که جریان در t = 15μs به 10mA برسد.

۲۹. در شبکه شکل ۸-۶۷ مقادیر اولیه عبارتند از $i_1(0) = 20$mA و $i_2(0) = 15$mA. (الف) $v(0)$ را معین کنید. (ب) $v(15\mu s)$ را به‌دست‌آورید. (ج) در چه زمانی $v(t) = 0.1\,v(0)$ می‌گردد؟



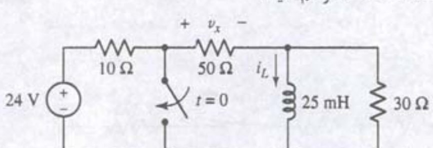
شکل ۸-۶۷

۳۰. مقادیر R_1 و R_2 را در مدار شکل ۸-۶۸ طوری انتخاب کنید که $v_R(0^+) = 10$V و $v_R(1\text{ms}) = 5$V باشد.



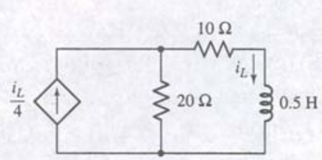
شکل ۸-۶۸

۳۱. کلید در شکل ۸-۶۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. اگر آن را در t = 0 ببندیم، (الف) i_L را در t > 0 بیابید. (ب) $v_x(t)$ را برای -4 < t < 4ms رسم کنید.



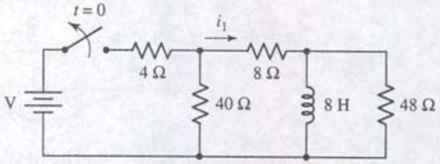
شکل ۸-۶۹

۳۲. اگر در مدار شکل ۸-۷۰، $i_L(0) = 10$A باشد برای t > 0 مقدار $i_L(t)$ را بیابید.



شکل ۸-۷۰

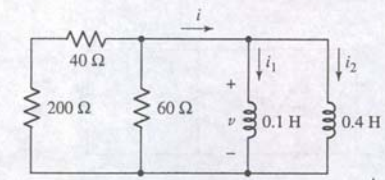
۳۳. به شکل ۸ـ۷۱ مراجعه نمایید و در t = -0.1 و 0.03، 0.1s مقدار i_1 را بیابید و آن را برحسب t (-0.1 < t < 0.1 s) رسم کنید.



شکل ۸ـ۷۱

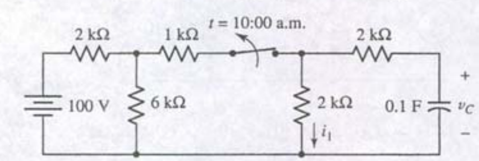
۳۴. مداری متشکل از القاگر 0.5H، مقاومت 10Ω و یک مقاومت 40Ω سری است. جریان القاگر در t = 0 برابر 4A است. (الف) $i_L(15ms)$ را حساب کنید. (ب) مقاومت 40Ω در t = 15ms اتصال کوتاه شده است. $i_L(30ms)$ را محاسبه نمایید.

۳۵. مدار شکل ۸ـ۷۲ حاوی دو القاگر موازی است. بنابراین، این فرصت پیش می‌آید تا جریان در حلقه القایی بچرخد. فرض کنید $i_1(0^-) = 10A$ و $i_2(0^-) = 20A$ باشد. (الف) $i_1(0^+)$، $i_2(0^+)$ و $i(0^+)$ را به‌دست‌آورید. (ب) ثابت زمانی τ را برای $i(t)$ معین کنید. (ج) $i(t)$ را در t > 0 پیدا کنید. (د) $v(t)$ را به‌دست‌آورید. (ه) مقدار $i(t)$ و $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را از $v(t)$ و مقدار اولیه به‌دست‌آورید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در t = 0 برابر مجموع انرژی‌های تلف‌شده در شبکه مقاومتی بین t = 0 و t = ∞، به علاوه انرژی ذخیره‌شده در القاگر در t = ∞ می‌باشد.



شکل ۸ـ۷۲

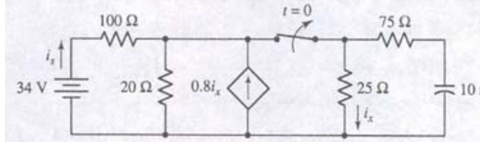
۳۶. مدار شکل ۸ـ۷۳ از روز قبل به فرم نشان داده شده است. کلید در ساعت 10 صبح باز شده است. i_1 و v_C را در (الف) ساعت 9:59 صبح محاسبه کنید. (ب) در ساعت 10:05 محاسبه نمایید. (ج) $i_1(t)$ را در t = 1.2s به‌دست‌آورید. (د) صحت حل خود را با PSpice نشان دهید.



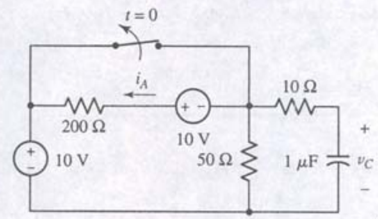
شکل ۸ـ۷۳

۳۷. پس از مدتی، کلید در شکل ۸ـ۷۴، در t = 0 باز شده است. مقادیر (الف) $i_s(0^-)$، (ب) $i_x(0^-)$، (ج) $i_x(0^+)$، (د) $i_s(0^+)$ و (ه) $i_s(0.4s)$ را بیابید.

۳۸. پس از مدتی طولانی، در شکل ۸ـ۷۵ کلید در t = 0 باز شده است. (الف) $v_C(t)$ را برای t > 0 بیابید. (ب) مقادیر $i_A(-100\mu s)$ و $i_A(100\mu s)$ را پیدا کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

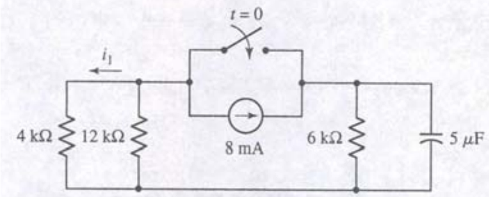


شکل ۸ـ۷۴



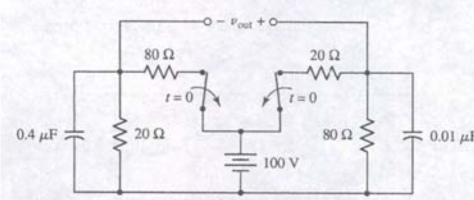
شکل ۸ـ۷۵

۳۹. پس از مدتی از مونتاژ مدار شکل ۸ـ۷۶، کلید در t = 0 بسته شده است. (الف) $i_1(t)$ را برای t < 0 پیدا کنید. (ب) $i_1(t)$ را برای t > 0 به‌دست‌آورید.



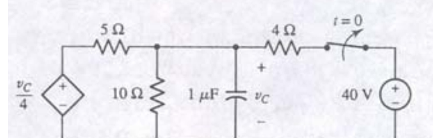
شکل ۸ـ۷۶

۴۰. مدتی پس از مونتاژ شکل ۸ـ۷۷، هر دو کلید در t = 0 به‌طور همزمان باز شده‌اند. (الف) عبارتی برای v_{out} در t > 0 به‌دست‌آورید. (ب) مقادیر v_{out} را در $t = 0^+$ و 1μs و 5μs به‌دست‌آورید.



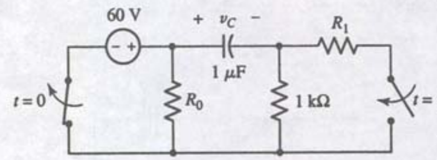
شکل ۸ـ۷۷

۴۱. (الف) فرض کنید که مدار شکل ۸ـ۷۸ از مدت‌ها قبل به همان شکل است. $v_C(t)$ را برای همه زمان‌های t پس از بازشدن کلیدها به‌دست‌آورید. (ب) $v_C(t)$ را در t = 3μs محاسبه کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.



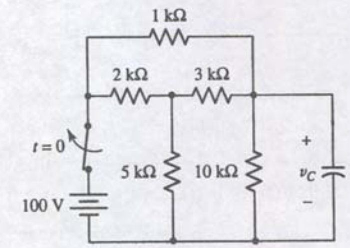
شکل ۸ـ۷۸

۴۲. مقادیر R_0 و R_1 را در شکل ۸ـ۷۹ طوری معین کنید که در t = 0.5ms مقدار $v_C = 50V$ و در t = 2ms مقدار $v_C = 25V$ باشد.



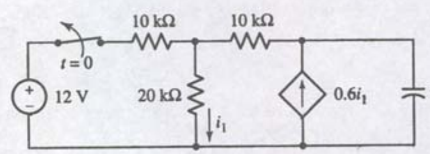
شکل ۸ـ۷۹

۴۳. برای مدار شکل ۸ـ۸۰، $v_C(t)$ را برای (الف) t < 0 و (ب) t > 0 معین کنید.



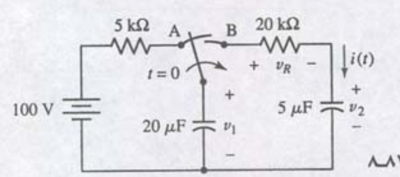
شکل ۸ـ۸۰

۴۴. $i_1(t)$ را برای t < 0 و t > 0 در مدار شکل ۸ـ۸۱ به‌دست‌آورید.



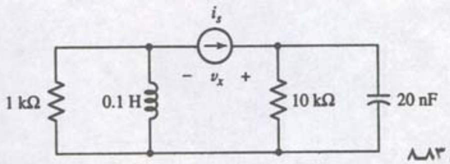
شکل ۸ـ۸۱

۴۵. در شکل ۸ـ۸۲ کلید در t = 0 از A به B رفته است. این کار دو خازن را سری می‌کند و لذا اجازه می‌دهد تا ولتاژهای dc مخالف و برابری در خازن‌ها به تله بیفتد. (الف) $v_1(0^-)$، $v_2(0^-)$ و $v_R(0^-)$ را بیابید. (ب) $v_1(0^+)$، $v_2(0^+)$ و $v_R(0^+)$ را به‌دست‌آورید. (ج) ثابت زمانی $v_R(t)$ را معین کنید. (د) در t > 0 مقدار $v_R(t)$ چیست؟ (ه) $i(t)$ را پیدا کنید. (و) v_1 و $v_2(t)$ را از $i(t)$ و مقادیر اولیه پیدا کنید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره‌شده در t = ∞ به علاوه انرژی تلف‌شده در مقاومت 20kΩ برابر با انرژی ذخیره‌شده در خازن در t = 0 است.



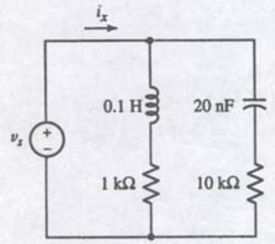
شکل ۸ـ۸۲

۴۶. مقدار i_s در مدار شکل ۸ـ۸۳ برابر 1mA در t < 0 و صفر در t > 0 است. مقدار $v_x(t)$ را برای (الف) t < 0 و (ب) t > 0 بیابید.



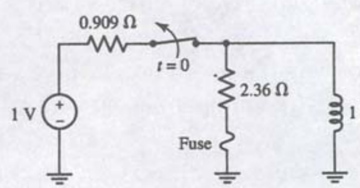
شکل ۸ـ۸۳

۴۷. مقدار v_s در مدار شکل ۸ـ۸۴ برای 0 < t برابر 20V است و t > 0 برابر صفر می‌باشد. $i_x(t)$ را برای (الف) t < 0 و (ب) t > 0 به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۸۴

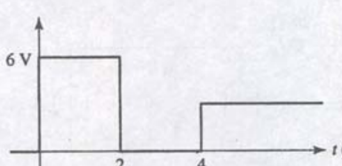
۴۸. کلید در شکل ۸ـ۸۵ برای مدت چند ساعت بسته بوده است. فیوز نوع خاصی از مقاومت است که اگر جریان برای مدتی بیش از 100ms از 1A تجاوز کند می‌سوزد. مقاومت فیوز 3mΩ است. اگر کلید در t = 0 باز شود، آیا فیوز خواهد سوخت؟ جواب را با PSPice پیدا کنید.



شکل ۸ـ۸۵

۸ـ۵ تابع پله واحد

۴۹. با استفاده از تابع پله واحد عبارتی که شکل ۸ـ۸۶ را توصیف کند بنویسید.

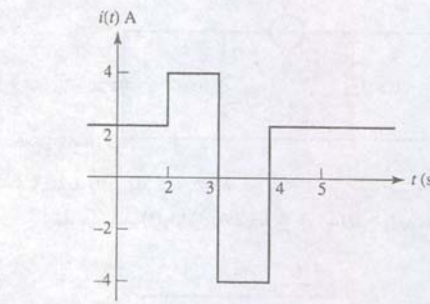


شکل ۸ـ۸۶

۵۰. با استفاده از توابع پله واحد شکل موج ۸ـ۸۷ را توصیف کنید.

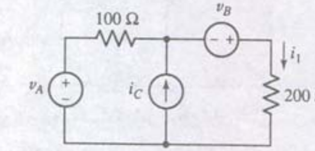
۵۱. با فرض $f(t) = 6u(-t) + 6u(t + 1) - 3u(t + 2)$، تابع $f(t)$ را در t برابر با (الف) -1، (ب) 0^-، (ج) 0^+، (د) 1.5 و (ه) 3 ارزیابی کنید.

۵۲. با فرض $g(t) = 9u(t) - 6u(t + 10) + 3u(t + 12)$، $g(t)$ را در t برابر با (الف) -11، (ب) 0^+، (ج) 5، (د) 11 و (ه) 30 ارزیابی کنید.



شکل ۸.۸۷

۵۳. مقادیر منبع در مدار شکل ۸.۸۸ عبارتند از $v_A = 300u(t-1)$ V، $v_B = -120u(t+1)$ V و $i_C = 3u(-t)$A. i_1 را در $t = 1.5, 0.5, -0.5, -1.5$ پیدا کنید.

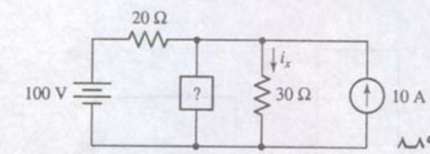


شکل ۸.۸۸

۵۴. مقادیر منبع برای شکل ۸.۸۸ عبارتند از $v_A = 600tu(t+1)$ V، $v_B = 600(t+1)u(t)$ V و $i_C = 6(t-1)\,u(t-1)$ A. i_1 را در برابر t با $-2.5 < t < 2.5$s رسم کنید.

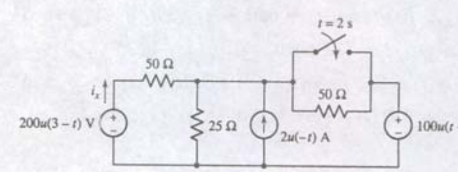
۵۵. در $t = 2$ مقدار (الف) $2u(1-t) - 3u(t-1) - 4u(t+1)$؛ (ب) $[5 - u(t)][2 + u(3-t)][1 - u(1-t)]$ و (ج) $4e^{-u(3-t)}u(3-t)$ را پیدا کنید.

۵۶. در مدار شکل ۸.۸۹ مقدار i_x را برای $t < 0$ و $t > 0$ پیدا کنید به‌شرطی‌که: (الف) یک کلید معمول باز در $t = 0$ بسته شود و موازی با باطری 60V باشد، مرجع + در بالا است. (ب) یک منبع ولتاژ $60u(t)$V، مرجع + در بالا باشد.



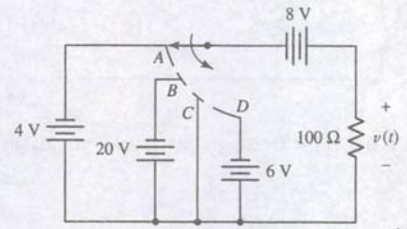
شکل ۸.۸۹

۵۷. i_x را در مدار شکل ۸.۹۰ از $t = -0.5$ تا $t = 3.5$s با فواصل 1s پیدا کنید.



شکل ۸.۹۰

۵۸. کلید در شکل ۸.۹۱ در $t < 0$ در وضعیت A قرار گرفته است. در $t = 0$ به B جابه‌جا می‌شود و سپس در $t = 4$s به C جابه‌جا می‌شود و بعد در $t = 6$s به D می‌رود و در آن‌جا می‌ماند. $v(t)$ را به‌عنوان تابعی از زمان رسم کنید و آن را به صورت مجموع توابع تحریک پله بیان کنید.

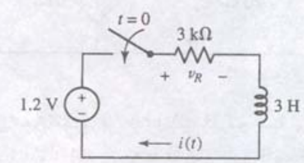


شکل ۸.۹۱

۵۹. یک شکل موج در دو سر عنصر مجهول به صورت $7u(t) - 0.2u(t) + 8u(t-2) + 3$ V ظاهر می‌شود. (الف) ولتاژ را در $t = 1$s معین کنید. (ب) اگر جریان مربوطه در عنصر $3.5u(t) - 0.1u(t) + 4u(t-2) + 1.5$ A باشد، عنصر از چه نوع است و مقدار آن چیست؟

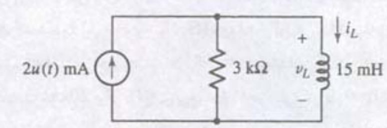
۸ـ۶ مدارهای RL واداشته

۶۰. برای مدار شکل ۸.۹۲ (الف) عبارتی برای $v_R(t)$ معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) v_R را در $t = 2$ ms به دست آورید. (ج) حل خود را با بخش (ب) امتحان کنید.



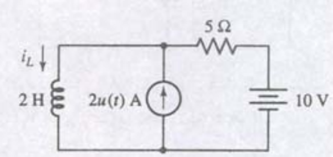
شکل ۸.۹۲

۶۱. به شکل ۸.۹۳ مراجعه کنید. (الف) $i_L(t)$ را بیابید. (ب) از عبارت $i_L(t)$ برای یافتن $v_L(t)$ استفاده کنید.



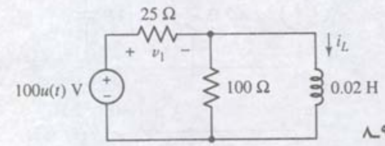
شکل ۸.۹۳

۶۲. i_L را در مدار شکل ۸.۹۴ در زمان‌های داده‌شده به دست آورید. (الف) -0.5s، (ب) 0.5s و (ج) 1.5s.



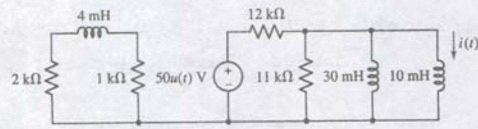
شکل ۸.۹۴

۶۳. با مراجعه به شکل ۸.۹۵، عبارت جبری را برای: (الف) $i_L(t)$ و (ب) $v_1(t)$ به‌دست‌آورده و آن را رسم نمایید.



شکل ۸.۹۵

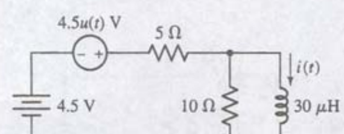
۶۴. با مراجعه به مدار شکل ۸.۹۶، (الف) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 2kΩ را در $t = 1$ms محاسبه کنید. (ب) مقدار $i(t)$ را در $t = 3\mu s$ معین کنید. (ج) جریان اوج را در مقاومت 12kΩ به‌دست‌آورید. (د) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۸.۹۶

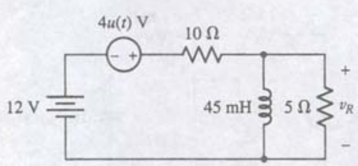
۸ـ۷ پاسخ طبیعی و واداشته

۶۵. برای مدار شکل ۸.۹۷ (الف) عبارتی برای $i(t)$ در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) $i(t)$ را در $t = 1.5\ \mu s$ به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با شبیه‌سازی به وسیله PSpice امتحان کنید.



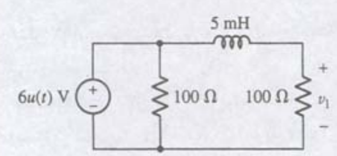
شکل ۸.۹۷

۶۶. برای مدار شکل ۸.۹۸ (الف) عبارتی برای $v_R(t)$ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید. (ب) $v_R(t)$ را در $t = 2$ ms به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با یک شبیه‌سازی PSpice امتحان کنید.



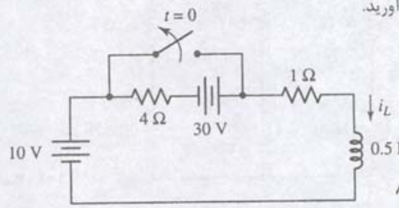
شکل ۸.۹۸

۶۷. با مراجعه به شکل ۸.۹۹، $v_1(t)$ را در $t = 27\ \mu s$ محاسبه نمایید.



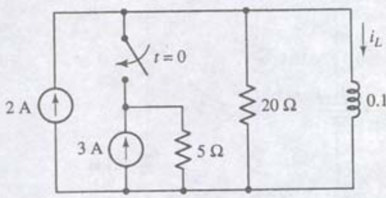
شکل ۸.۹۹

۶۸. کلید در شکل ۸.۱۰۰ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف) i_L را برای $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) $i_L(t)$ را پس از بازشدن کلید در $t = 0$ به‌دست‌آورید.



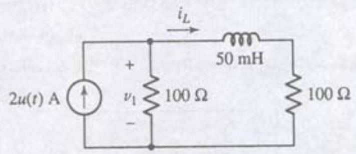
شکل ۸.۱۰۰

۶۹. کلید در شکل ۸.۱۰۱ از مدت‌ها قبل باز بوده است. (الف) i_L را در $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) $i_L(t)$ را برای همه زمان‌های t پس از بسته‌شدن کلید در $t = 0$ پیدا کنید.



شکل ۸.۱۰۱

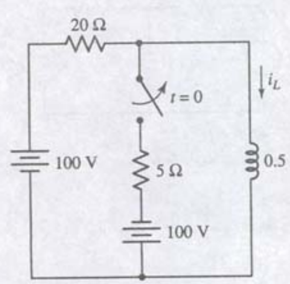
۷۰. برای مدار شکل ۸.۱۰۲، مقادیر i_L و v_1 را در زمان‌های t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+، (ج) ∞ و (د) 0.2ms به‌دست‌آورید.



شکل ۸.۱۰۲

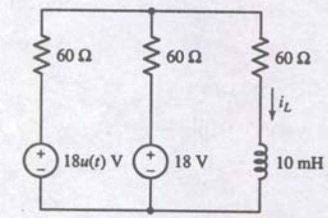
۷۱. معادله (۳۳) در بخش ۸.۷ حل کلی مدار RL سری تحریک‌شده را نشان می‌دهد که در آن Q تابعی از زمان و A و P ثابتند. بگذارید $R = 125\Omega$ و $L = 5H$ باشد. $i(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید، به‌شرطی‌که تابع تحریک Q(t) در (الف) 10V، (ب) $10u(t)$V، (ج) $10 + 10u(t)$ V و (د) $10u(t)\cos 50t$ V باشد.

۷۲. کلید در شکل ۸.۱۰۳ از مدت‌ها قبل بسته بوده است (الف) i_L را برای $t < 0$ به‌دست‌آورید. (ب) درست پس از بازشدن کلید، $i_L(0^+)$ را پیدا کنید. (ج) $i_L(\infty)$ را پیدا کنید. (د) عبارتی برای $i_L(t)$ در $t > 0$ به‌دست‌آورید.



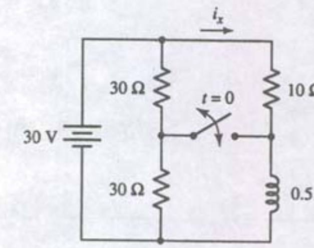
شکل ۸.۱۰۳

۷۳. i_L را برای همه زمان‌های t در شکل ۸ـ۱۰۴ به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۱۰۴

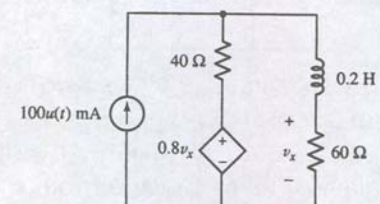
۷۴. فرض کنید کلید در شکل ۸ـ۱۰۵ از مدت‌ها قبل بسته بوده است و در t = 0 باز شود. i_x را در t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+ و (ج) 40ms به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۱۰۵

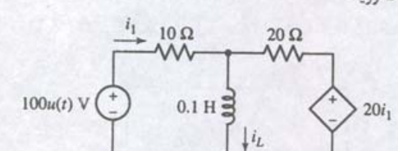
۷۵. فرض کنید کلید در شکل ۸ـ۱۰۵ از مدت‌ها قبل باز بوده و در t = 0 بسته شود. i_x را در زمان‌های t برابر با (الف) 0^-، (ب) 0^+ و (ج) 40ms به‌دست‌آورید.

۷۶. با مراجعه به شکل ۸ـ۱۰۶، v_x را برای تمام زمان‌ها به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۱۰۶

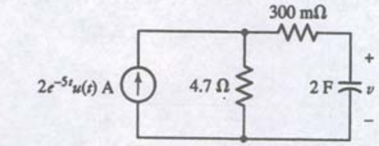
۷۷. با مراجعه به شکل ۸ـ۱۰۷، (الف) $i_L(t)$ را پیدا کنید. (ب) $i_1(t)$ را به‌دست‌آورید.



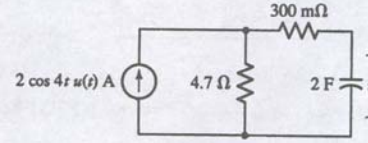
شکل ۸ـ۱۰۷

۷۸. عبارتی برای $v(t)$ در مدار شکل ۸ـ۱۰۸ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.

۷۹. عبارتی برای $v(t)$ در مدار شکل ۸ـ۱۰۹ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.



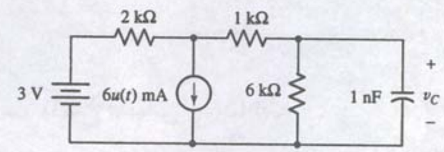
شکل ۸ـ۱۰۸



شکل ۸ـ۱۰۹

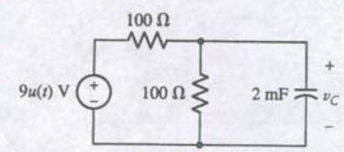
۸ـ۸ مدارهای RC واداشته

۸۰. (الف) v_C را در مدار شکل ۸ـ۱۱۰ در $t = -2\mu s$ و $t = 2\mu s$ پیدا کنید.
(ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.



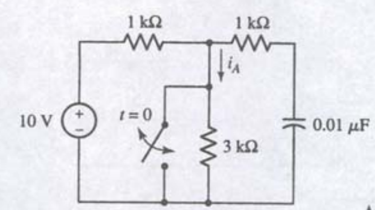
شکل ۸ـ۱۱۰

۸۱. با مراجعه به مدار RC در شکل ۸ـ۱۱۱ عبارتی برای $v_C(t)$، معتبر در همه زمان‌ها بیابید.



شکل ۸ـ۱۱۱

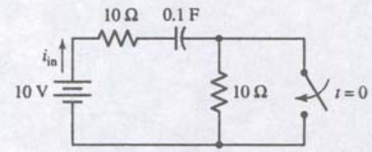
۸۲. پس از مدت مدیدی بسته‌بودن، کلید شکل ۸ـ۱۱۲ در t = 0 باز می‌شود. i_A را برای همه زمان‌ها به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۱۱۲

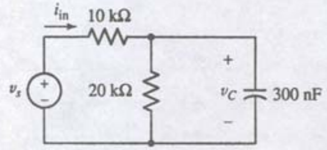
۸۳. سوئیچ شکل ۸ـ۱۱۲، پس از مدتی بازبودن در t = 0 بسته می‌شود. i_A در تمام زمان‌ها به دست آورید.

۸۴. کلید از مدت‌ها قبل در شکل ۸ـ۱۱۳ باز بوده است. این کلید ناگهان در t = 0 بسته می‌شود. i_{in} را در t (الف) -1.5s و (ب) 1.5s به‌دست‌آورید



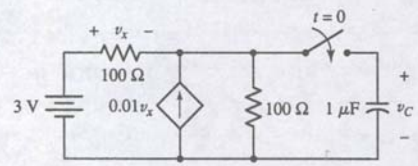
شکل ۸ـ۱۱۳

۸۵. اجازه بدهید در مدار شکل ۸ـ۱۱۴، $v_s = -12u(-t) + 24u(t)$ V باشد. در فاصله زمانی $-5ms < t < 5ms$، برای کمیت (الف) $v_C(t)$ و (ب) $i_{in}(t)$ عبارتی جبری به‌دست‌آورید و آن‌ها را رسم کنید.



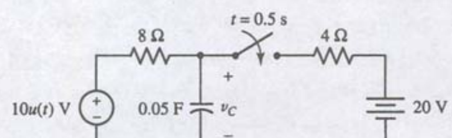
شکل ۸ـ۱۱۴

۸۶. در مدار شکل ۸ـ۱۱۵، v_C را برای $t > 0$ پیدا کنید.



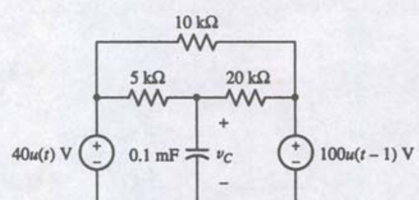
شکل ۸ـ۱۱۵

۸۷. مقدار $v_C(t)$ را در t = 0.4 و 0.8s در شکل ۸ـ۱۱۶ به‌دست‌آورید.



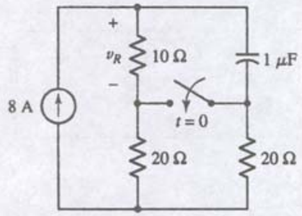
شکل ۸ـ۱۱۶

۸۸. در مدار شکل ۸ـ۱۱۷: (الف) $v_C(t)$ را برای همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب) $v_C(t)$ را برای $-1 < t < 2s$ رسم کنید. صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.



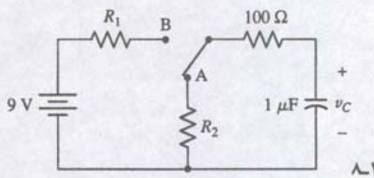
شکل ۸ـ۱۱۷

۸۹. در مدار شکل ۸ـ۱۱۸، $v_R(t)$ را برای (الف) $t < 0$ و (ب) $t > 0$ پیدا کنید. اکنون فرض کنید که این کلید که برای مدت‌ها بسته بوده در t = 0 باز شود. $v_R(t)$ را برای (ج) $t < 0$ و (د) $t > 0$ به‌دست‌آورید.



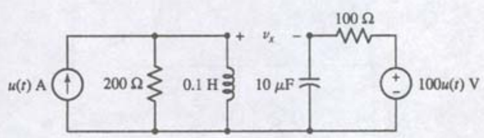
شکل ۸ـ۱۱۸

۹۰. کلید در شکل ۸ـ۱۱۹ از مدت‌ها قبل در A بوده است. در t = 0 به B برده می‌شود، و در t = 1ms به A بازگردانده می‌شود. R_1 و R_2 را طوری تعیین کنید که $v_C(1ms) = 8V$ و $v_C(2ms) = 1V$ باشد.



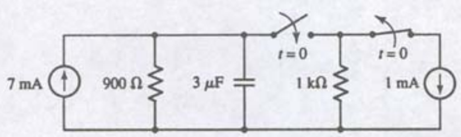
شکل ۸ـ۱۱۹

۹۱. برای شکل ۸ـ۱۲۰ اولین زمان پس از t = 0 را که در آن برای اولین بار $v_x = 0$ است، مشخص کنید.



شکل ۸ـ۱۲۰

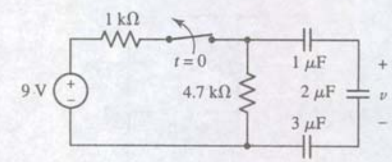
۹۲. در مدار شکل ۸ـ۱۲۱، یک کلید در t = 0 باز و دیگری همزمان بسته می‌شود. توان جذب‌شده با مقاومت 1kΩ در فاصله $-1ms < t \leq 7ms$ را به‌دست‌آورید. در t = 0 منبع 1mA نیز خاموش شده است.



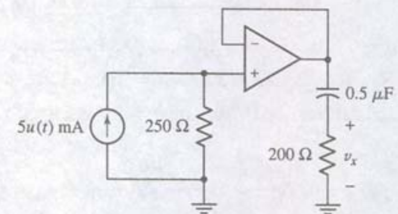
شکل ۸ـ۱۲۱

۹۳. اگر کلید در شکل ۸ـ۱۲۲ برای مدتی بسته بوده باشد، (الف) v را در t = 5.45ms معین کنید. (ب) توان تلف‌شده به وسیله مقاومت 4.7kΩ را در t = 1.7ms به‌دست‌آورید. (ج) انرژی کل تبدیل‌شده به حرارت در مقاومت 4.7kΩ پس از بازشدن کلید محاسبه کنید.

۹۴. فرض کنید که op amp شکل ۸ـ۱۲۳ ایده‌آل باشد. $v_x(t)$ را برای همه زمان‌های t پیدا کنید.

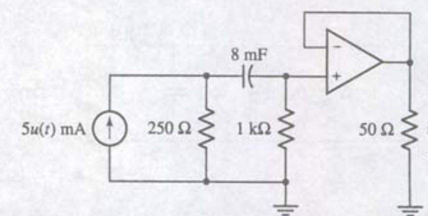


شکل ۸ـ۱۲۲



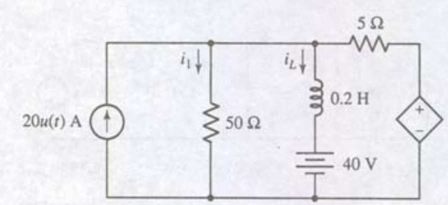
شکل ۸ـ۱۲۳

۹۵. فرض کنید که op amp در شکل ۸ـ۱۲۴، ایده‌آل باشد. (الف) $v_0(t)$ را برای همه زمان‌های t بیابید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (راهنمایی: می‌توانید توابع را با probe رسم کنید و برای این کار با واردکردن عبارت در جعبه Trace Expression انجام دهید).



شکل ۸ـ۱۲۴

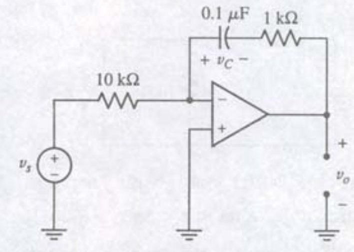
۹۶. (الف) در مدار RL شکل ۸ـ۱۲۵، $i_L(0)$ را بیابید. با PSpice و مقدار اولیه بخش (الف) i_L را در $t = 50ms$ به‌دست‌آورید.



شکل ۸ـ۱۲۵

۹۷. (الف) فرض کنید که op amp شکل ۸ـ۱۲۶ ایده‌آل و $v_C(0) = 0$ باشد. $v_0(t)$ را برای همه زمان‌ها به‌دست‌آورید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (راهنمایی: می‌توانید توابع را با واردکردن عبارت در Trace Expression انجام دهید).

۹۸. مداری طراحی کنید که پس از خاموش‌شدن کلید 5s روشن باقی بماند. لامپ را 40W و تغذیه ac را 115V فرض کنید.



$v_s = 4e^{-20\,000t}u(t)$ V

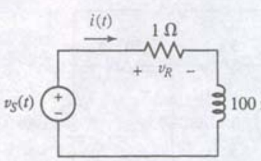
شکل ۸ـ۱۲۶

۹۹. یک آشکارساز حرکت که به عنوان بخشی از سیستم حفاظتی به‌کاررفته است نسبت به تغییرات منبع الکتریکی حساس به نظر می‌رسد. یک راه‌حل واردکردن مدار تأخیر بین سنسور و مدار آلارم است تا اعلان خطاهای غلط حداقل شود. فرض کنید معادل تونن سنسور مقاومتی 2.37kΩ سری با منبع 1.5V باشد و مقاومت معادل تونن آلارم نیز 1MΩ است. مداری طراحی کنید که بتواند بین سنسور و مداری که حداقل تأخیر 1 ثانیه تولید کند قرار گیرد. مدار سنسور/آلارم به طریق زیر کار می‌کند: سنسور مرتباً جریان کوچکی به آلارم می‌فرستد مگر این‌که حرکتی شناسایی شود. در این حال جریان متوقف می‌گردد.

۸ـ۹ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی

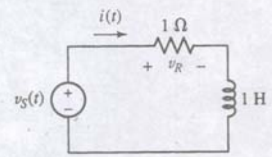
۱۰۰. (الف) یک موج پالسی PSpice برای مدل موج ولتاژ v_B مسئله ۵۳ بسازید و با Prob آن را رسم نمایید (راهنمایی: منبع را به یک مقاومت برای انجام یک شبیه‌سازی وصل کنید). (ب) یک شکل موج در PSpice برای مدل‌سازی موج i_C در مسئله ۵۳ ساخته و آن را با Probe رسم کنید.

۱۰۱. ولتاژ مقاومت v_R مدار شکل ۸ـ۱۲۷ را در پاسخ به یک موج $v_s(t)$ رسم کنید. حداقل مقدار $v_s(t)$ برابر 0 V است و حداکثر آن 3 V می‌باشد، پهنای پالس 2 s و پریود 5 s است. شکل خود را بین $0 \le t \le 20$ s ترسیم کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.



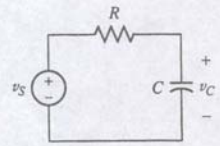
شکل ۸ـ۱۲۷

۱۰۲. جریان القاگر i در مدار شکل ۸ـ۱۲۸ را در پاسخ به موج پالسی $v_s(t)$ رسم کنید. حداقل مقدار $v_s(t)$ برابر 0 V است و حداکثر آن 5 V می‌باشد، پهنای پالس 5 s و پریود 5.5 s است. ترسیم خود را بین $0 \le t \le 20$ s ...کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.



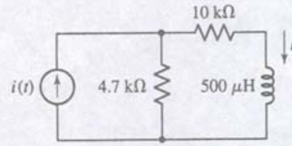
شکل ۸ـ۱۲۸

۱۰۳. منبع ولتاژ v_s شکل ۸ـ۱۲۹ یک منبع پالسی با حداقل مقدار 2 V و حداکثر 10 V می‌باشد. پهنای پالس 4 RC است. نمودار ولتاژ خازن را اگر زمان بین پالس‌های v_s برابر با (الف) 0.1 RC؛ (ب) RC؛ و (ج) 10 RC باشد را رسم نمایید.

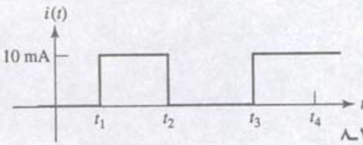


شکل ۸ـ۱۲۹

۱۰۴. با مراجعه به مدار شکل ۸ـ۱۳۰، $i_L(t)$ را در پریود $0 \le t \le t_4$ رسم کنید به شرطی که $i(t)$ طبق شکل ۸ـ۱۳۱ باشد. (الف) $t_1 = 4$ ns، $t_2 = 160$ ns، $t_3 = 164$ ns، $t_4 = 200$ ns، (ب) $t_1 = 150$ ns، $t_2 = 300$ ns، $t_3 = 450$ ns، $t_4 = 500$ ns و (ج) $t_1 = 150$ ns، $t_2 = 200$ ns، $t_3 = 350$ ns و $t_4 = 400$ ns.



شکل ۸ـ۱۳۰



شکل ۸ـ۱۳۱

فصل نهم

مدار RLC

مفاهیم کلیدی
فرکانس تشدید و ضریب میرایی مدارهای RLC سری و موازی
پاسخ فوق میرا
پاسخ میرای بحرانی
پاسخ زیر میرا
پاسخ کامل مدارهای RLC (طبیعی + واداشته)

مقدمه

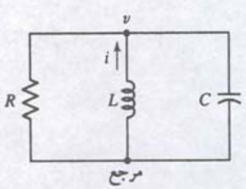
بحث ما در فصل قبل خصوصاً روی مدارهای مقاومتی با خازن و یا با القاگر، و نه هر دو، متمرکز بود. وجود القاکنایی و ظرفیت در یک مدار حداقل یک سیستم مرتبه **دو** را تولید می‌کند که با یک معادله دیفرانسیل خطی با مشتق مرتبه دو یا با دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همزمان نشان داده می‌شود. این افزایش مرتبه معادله موجب می‌شود تا دو ثابت اختیاری لازم باشد. به علاوه، باید مقادیر اولیه‌ای را برای مشتق‌ها معین کرد. خواهیم دید چنین مدارهایی که اغلب به نام مدارهای RLC معروفند، نه تنها در عمل به کرات دیده می‌شوند، بلکه برای مدل‌کردن دیگر سیستم‌ها هم مورد استفاده‌اند. مثلاً یک مدار RLC می‌تواند برای مدل‌سازی سیستم تعلیق یک اتومبیل، رفتار یک کنترل‌گر دما در رشد کریستال نیمه هادی و حتی پاسخ یک هواپیما به کنترل‌های بالابر و شهپر به کارگرفته شود.

۹ـ۱ مدار موازی بدون منبع

اولین کار تعیین پاسخ طبیعی است که دوباره به طریقی مناسب از بررسی مدار بدون منبع حاصل می‌شود. آن‌گاه می‌توانیم منابع dc، کلیدها یا منابع پله را در مدار لحاظ نماییم، تا دوباره پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ طبیعی واداشته، به‌دست‌آوریم.

کار خود را با تعیین پاسخ طبیعی مدار ساده حاصل از اتصال موازی R، L و C آغاز می‌کنیم. این ترکیب خاص عناصر ایده‌آل مدل خوبی برای بسیاری از قسمت‌های مختلف در شبکه‌های مخابراتی است. مثلاً این ترکیب بخش عمده‌ای از مدارهای تقویت‌کننده الکترونیک موجود در گیرنده‌های رادیویی می‌باشد و تقویت‌کننده‌ها را در تولید ولتاژ تقویت‌شده‌ای در باند باریکی از فرکانس‌ها و تقریباً صفر در خارج این باند توانمند می‌سازد. قابلیت انتخاب فرکانس ما را قادر می‌سازد تا به مراسلات یک ایستگاه گوش فرا دهیم، ضمن این‌که دیگر ایستگاه‌ها حذف می‌شوند. از جمله دیگر کاربردها می‌توان از مدارهای RLC موازی در ساخت مولتی‌پلکسرها و فیلترهای حذف هارمونیک نام برد. در هر صورت حتی، بحث ساده‌ای از این گونه لازم می‌دارد تا با مفاهیمی چون تشدید (رزونانس) پاسخ فرکانس و امپدانس آشنا شویم. بنابراین اجازه بدهید بگوییم درک رفتار طبیعی یک مدار RLC موازی اساس مطالعات آینده در شبکه‌های مخابرات و طراحی فیلترها و نیز کاربردهای دیگر است.

وقتی‌که یک خازن واقعی با یک القاگر موازی شود و ضمناً خازن دارای مقاومت معینی هم باشد، شبکه حاصل مدلی شبیه به شکل ۱ـ۹ را خواهد داشت. وجود این مقاومت می‌تواند مدل اتلاف انرژی در خازن را در مدت زمان موردنظر توجیه کند. می‌دانیم که همه خازن‌ها حتی اگر قطع هم باشند نهایتاً دشارژ می‌شوند. می‌توان اتلاف انرژی در القاگر را هم با جمع یک مقاومت ایده‌آل سری با آن به حساب آورد. با این وجود به خاطر سادگی ما بحث خود را که در آن القاگر با خازن موازی نشتی‌دار موازی است، محدود می‌کنیم.



شکل ۱ـ۹ مدار RLC موازی بدون منبع.

معادله دیفرانسیل برای مدار RLC موازی

در تحلیل زیر فرض بر این است‌که انرژی در آغاز در هر دو عنصر خازن و القاگر ذخیره شده باشد. به بیان دیگر مقادیر اولیه غیرصفری از جریان القاگر و ولتاژ خازن وجود دارد. با مراجعه به شکل ۱ـ۹ می‌توان معادله زیر را روی تنها گره نوشت:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{۱}$$

توجه کنید که علامت منها از جهت فرضی i ناشی شده است. ما باید معادله (۱) را با توجه به مقادیر اولیه

$$i(0^+) = I_0 \tag{۲}$$

$$v(0^+) = V_0 \tag{۳}$$

حل کنیم. وقتی از هر دو طرف معادله (۱) نسبت به زمان یک بار مشتق بگیریم، حاصل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم زیر است.

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \tag{۴}$$

که حل $v(t)$ پاسخ طبیعی مورد نظر است.

حل معادله دیفرانسیل

برای حل معادله (۴) روش‌های جالب و متعددی وجود دارد. بسیاری از این روش‌ها را به درس معادلات دیفرانسیل واگذار می‌کنیم. در این‌جا تنها سریع‌ترین و ساده‌ترین روش را به‌کارمی‌گیریم. ما بر اساس دانسته‌ها و تجربیات خود یکی از چند فرم را که مناسب‌تر است انتخاب می‌کنیم. تجربیات ما با معادلات مرتبه اول ممکن‌است چنین حکم کند که فرم نمایی پاسخ را یک بار دیگر آزمایش کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$v = Ae^{st} \tag{۵}$$

باشد و به‌طورکلی اجازه می‌دهیم A و s به صورت مختلط (در صورت لزوم) باشند. از جایگزینی معادله (۵) در معادله (۴) داریم:

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

یا

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0$$

برای این‌که معادله فوق در همه زمان‌ها صحیح باشد، حداقل یکی از سه فاکتور باید برابر صفر گردد. اگر یکی از دو فاکتور اول را صفر فرض کنیم، آنگاه $v(t) = 0$ می‌شود. این حلی غلط از معادله دیفرانسیل است چون نمی‌تواند مقادیر اولیه ما را تأیید نماید. بنابراین فاکتور سوم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0 \tag{۶}$$

ریاضی‌دانان این معادله را معمولاً **معادله کمکی** یا **معادله مشخصه** می‌خوانند. اگر این رابطه برقرار باشد آنگاه حل فرض‌شده، صحیح خواهد بود. چون معادله (۶) یک معادله مرتبه دوم است، دو حل s_1 و s_2 برای آن وجود دارد:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{۷}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{۸}$$

هر یک از این دو مقدار برای s می‌تواند حل موردنظر باشد، آنگاه حل مذکور در معادله دیفرانسیل مربوط باید صدق کند. در این صورت حل معتبری از معادله دیفرانسیل را به‌دست‌آورده‌ایم.

اکنون فرض کنید که s را در معادله (۵) با s_1 جایگزین کنیم، در این صورت:

$$v_1 = A_1e^{s_1t}$$

و به‌طورمشابه:

$$v_2 = A_2e^{s_2t}$$

اولین پاسخ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$C\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

دومین پاسخ را نیز در معادله قرار می‌دهیم:

$$C\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

از جمع این دو معادله دیفرانسیل و ترکیب جملات مشابه داریم:

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

با توجه به خاصیت خطی، می‌بینیم که جمع دو حل نیز یک حل است. بنابراین پاسخ طبیعی به فرم زیر است:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{۹}$$

که در آن s_1 و s_2 با معادلات (۷) و (۸) داده شده‌اند، A_1 و A_2 دو ثابت اختیاری‌اند که باید طوری انتخاب شوند تا مقادیر اولیه تأیید گردند.

تعریف جملات فرکانس

فرم پاسخ طبیعی معادله (۹) اطلاعات کمی را از طبیعت منحنی $v(t)$ برحسب تابعی از زمان به‌دست‌می‌دهد. مثلاً دامنه‌های A_1 و A_2 مطمئناً در شکل منحنی پاسخ نقش عمده‌ای دارند. به علاوه ثابت‌های s_1 و s_2 بسته به مقادیر R ، L و C در شبکه می‌توانند اعداد حقیقی یا مزدوج مختلط باشند. از هر دو نوع مذکور پاسخ‌هایی به‌دست‌می‌آید که تفاوت بنیادی دارند. بنابراین، برخی جایگزینی‌ها در معادله (۹) برای ساده‌سازی مفید خواهد بود.

چون نماهای s_1t و s_2t بدون بعد هستند، s_1 و s_2 باید کمیتی بدون بعد بر ثانیه باشد. بنابراین از معادلات (۷) و (۸) درمی‌یابیم که واحد $1/2RC$ و $1/\sqrt{LC}$ هم باید s^{-1} (یعنی $\frac{1}{\text{ثانیه}}$) باشد. این نوع واحد را فرکانس می‌نامیم.

اجازه بدهید تا عبارت $1/\sqrt{LC}$ را با ω_0 نشان دهیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{۱۰}$$

که به آن فرکانس **رزنانس یا تشدید** گویند. از طرف دیگر $1/2RC$ را فرکانس نپر، یا ضریب میرایی نمایی یا استهلاک گفته و آن را با α (آلفا) نشان می‌دهند:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{۱۱}$$

نام آخری که برای این پارامتر فوق درنظر گرفته شده است به این علت است که α سرعت استهلاک پاسخ طبیعی به سمت حالت ماندگار یا مقدار نهایی را نشان می‌دهد (معمولاً صفر) بالاخره s، s_1 و s_2 که کمیت‌های مبنا برای کارهای بعدی ما هستند، **فرکانس‌های مختلط** خوانده می‌شوند.

باید توجه داشت که s_1، s_2، α و ω_0 فقط نمادها یا سمبل‌هایی هستند که بحث مدارهای RLC را ساده کنند و چیز تازه و اسرارآمیزی را نشان نمی‌دهند. مثلاً ساده‌تر است بگوییم "آلفا" تا این‌که بگوییم "عکس 2RC".

اکنون بیایید اطلاعات را سرجمع کنیم. پاسخ فرکانس مدار RLC برابر است با:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{۹}$$

که

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{۱۲}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{۱۳}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{۱۱}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{۱۰}$$

که A_1 و A_2 باید با اعمال مقادیر اولیه مشخص شوند.

ملاحظه می‌کنید که بسته به اندازه‌های نسبی α و ω_0 که به وسیله مقادیر R، L و C دیکته می‌شود دو سناریوی مبنا وجود دارد. اگر $\alpha > \omega_0$ باشد، هم s_1 و هم s_2 اعداد حقیقی خواهند بود، و منجر به وضعیتی به نام پاسخ فوق میرا می‌گردد. در مقابل آن، که $\alpha < \omega_0$ است، هم s_1 و هم s_2 مولفه‌های موهومی غیرصفر خواهند داشت که این یکی هم پاسخ زیر میرا را در پی دارد. در بخش‌های زیر هر دو وضعیت جداگانه همراه با حالت خاص $\alpha = \omega_0$ که پاسخ میرای بحرانی است، بررسی خواهند شد. همچنین باید توجه داشت که پاسخ کلی که به وسیله معادلات (۹) تا (۱۳) بیان شده‌اند، نه فقط ولتاژ، بلکه هر سه جریان انشعاب‌ها در مدار RLC موازی را به دست می‌دهند، البته A_1 و A_2 برای هر کدام متفاوت است.

مثال ۱ـ۹

مدار موازی RLC دارای القاگر 10 mH و خازن 100 μF است. مقادیر مقاومتی که به پاسخ‌های زیرمیرا و فوق میرا منجر می‌شود را معین کنید.

ابتدا فرکانس تشدید مدار را به دست می‌آوریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

یک پاسخ فوق میرا به شرطی وجود دارد که $\alpha > \omega_0$ باشد و پاسخ زیرمیرا هم در $\alpha < \omega_0$ وجود دارد. پس:

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

و لذا:

$$R < \frac{1}{(2000)(100 \times 10^{-6})}$$

یا

$$R < 5\ \Omega$$

منجر به پاسخ فوق میرا می‌شود؛ $R > 5\ \Omega$ پاسخ زیرمیرا تولید می‌کند.

تمرین

۱ـ۹ مدار RLC موازی حاوی مقاومت 100Ω و مقادیر پارامتر $\alpha = 1000\text{s}^{-1}$ و $\omega_0 = 800$ rad/s است. مطلوبست: (الف) C، (ب) L، (ج) s_1 و (د) s_2.

جواب: 5μF، 312.5mH، -400s^{-1} و -1600s^{-1}.

۲ـ۹ مدار RLC موازی فوق میرا

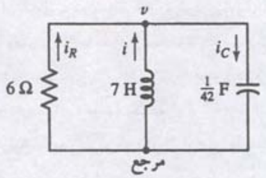
مقایسه معادلات (۱۰) و (۱۱) نشان می‌دهد که اگر $LC > 4R^2C^2$ باشد آنگاه α بزرگ‌تر از ω_0 خواهد شد. در این حالت جذر موجود مقداری حقیقی خواهد بود، هر دو مقدار s_1 و s_2 حقیقی‌اند. علاوه بر آن نامعادلات زیر

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0$$

می‌توانند به معادلات (۱۲) و (۱۳) اعمال شوند و مشاهده شود که s_1 و s_2 هر دو اعداد حقیقی منفی‌اند. بنابراین پاسخ $v(t)$ به صورت جمع دو جمله نمایی کاهشی بیان می‌شود. در واقع چون مقدار مطلق s_2 بزرگ‌تر از s_1 است، جمله حاوی s_2 سرعت کاهش بیشتری دارد و در زمان‌های طولانی می‌توانیم حد عبارت را بنویسیم:

$$v(t) \rightarrow A_1e^{s_1t} \rightarrow 0 \quad \text{با} \quad t \rightarrow \infty$$



شکل ۲ـ۹ مدار RLC موازی به‌عنوان مثال عددی. این مدار فوق میراست.

گام بعدی تعیین ثابت‌های A_1 و A_2 در رابطه با مقادیر اولیه می‌باشد. به‌خاطر سادگی $R = 6\Omega$، $L = 7\text{H}$ و $C = \frac{1}{42}$ F را انتخاب می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده اولیه با ولتاژ اولیه دو سر خازن $v(0) = 0$، و جریان اولیه القاگر $i(0) = 10\text{A}$ مشخص می‌شوند که v و i در شکل ۲ـ۹ تعریف شده‌اند.

می‌توان به راحتی مقادیر چند پارامتر را معین کرد:

$$\alpha = 3.5 \qquad \omega_0 = \sqrt{6} \quad (\text{واحد همه } \text{s}^{-1} \text{ است})$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -6$$

اکنون می‌توانیم بلافاصله شکل کلی پاسخ طبیعی را بنویسیم:

$$v(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t} \tag{۱۴}$$

تعیین مقادیر A_1 و A_2

تنها ارزیابی دو ثابت A_1 و A_2 باقی مانده است. اگر پاسخ $v(t)$ را در دو لحظه از زمان می‌دانستیم، این دو مقدار قابل جایگزینی در معادله (۱۴) بوده و به این ترتیب A_1 و A_2 به‌دست‌می‌آمد. با این وجود ما فقط یک مقدار $v(t)$ را می‌دانیم:

$$v(0) = 0$$

و بنابراین:

$$0 = A_1 + A_2 \tag{۱۵}$$

می‌توانیم دومین معادله را برای A_1 و A_2 از مشتق $v(t)$ نسبت به زمان در معادله به‌دست‌آوریم و مقدار اولیه این مشتق را از شرط اولیه باقیمانده $i(0) = 10$ معین کنیم و آنگاه نتایج را با هم برابر نماییم. پس از دو طرف معادله (۱۴) مشتق می‌گیریم،

$$\frac{dv}{dt} = -A_1e^{-t} - 6A_2e^{-6t}$$

سپس مشتق را در $t = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

برای تداوم بحث در مدارهای RLC برای یافتن یک جواب کامل به دو شرط اولیه نیاز داریم. یکی از این شرایط یعنی ولتاژ یا جریان معمولاً به سادگی در $t = 0$ به‌دست‌می‌آید. تعیین شرط اولیهٔ دوم کمی دردسر دارد. ولی همیشه یک مقدار اولیهٔ ولتاژ و یک مقدار اولیهٔ جریان داریم که یکی از آن‌ها را باید به‌طور غیرمستقیم به مشتق اعمال کنیم.

و به این ترتیب دومین معادله به‌دست‌می‌آید. گرچه ممکن‌است این رابطه مفید به‌نظر برسد ولی ما مقدار اولیه مشتق را نداریم و بنابراین هنوز برای دو مجهول، دو معادله نداریم، ... فکر می‌کنید داریم؟ عبارت $\frac{dv}{dt}$ همچون جریان خازن است، زیرا:

$$i_C = C\,\frac{dv}{dt}$$

قانون جریان کیرشهف در هر لحظه از زمان صادق است و بر اصل بقاء الکترون مبتنی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

با جایگزینی عبارت جریان خازن و تقسیم بر C داریم:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

چون به علت ولتاژ صفر اولیه در دو سر مقاومت، جریان اولیه صفر است، بنابراین دومین معادله چنین خواهد بود:

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad (۱۶)$$

از حل همزمان معادلات (۱۵) و (۱۶) دو دامنه $A_1 = 84$ و $A_2 = -84$ به‌دست‌می‌آیند. به این ترتیب حل عددی نهایی پاسخ طبیعی مدار برابر است با:

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ V} \qquad (۱۷)$$

مثال ۹ـ۲

عبارتی برای $v_C(t)$ برای $t > 0$ در مدار شکل ۹ـ۳ (الف) پیدا کنید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.

از ما خواسته شده است تا ولتاژ خازن را پس از پرتاب سوئیچ پیدا کنیم. این عمل منجر به حذف منابع متصل به القاگر و خازن می‌گردد؛ بنابراین انتظار داریم v_C در طول زمان میرا شود.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

پس از پرتاب سوئیچ، خازن با مقاومت $200\ \Omega$ و القاگر 5 mH (شکل ۹ـ۳ (ب)) موازی می‌شود. بنابراین $\alpha = 1/2RC = 125{,}000\ \text{s}^{-1}$ ، $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100{,}000$ rad/s ، $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -50{,}000\ \text{s}^{-1}$ و $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200{,}000\ \text{s}^{-1}$ خواهد شد.

- ارائه طرح.

چون $\alpha > \omega_0$ است، مدار فوق میرا است و لذا انتظار داریم ولتاژ خازن چنین باشد:

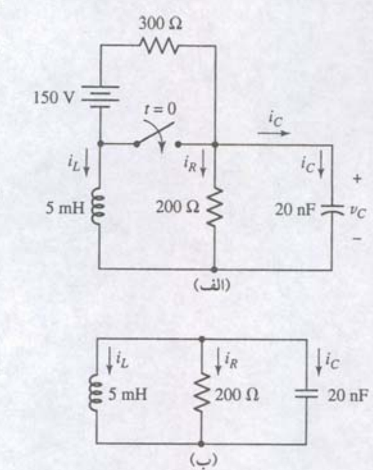
$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ما s_1 و s_2 را می‌دانیم. برای تعیین A_1 و A_2 لازم است دو مقدار اولیه داشته باشیم. برای این کار، ما مدار را در $t = 0^-$ (شکل ۹ـ۴ (الف)) تحلیل می‌نماییم تا $i_L(0^-)$ و $v_C(0^-)$ را پیدا کنیم. آن‌گاه مدار را در $t = 0^+$ تحلیل خواهیم کرد، با این فرض که هیچ مقداری عوض نشود.

- معادلات مناسب را بنویسید.

از شکل ۹ـ۴ (الف) که در آن القاگر با یک مدار اتصال کوتاه و خازن با یک مدار باز جایگزین شد، می‌بینیم که:

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200 + 300} = -300 \text{ mA}$$



شکل ۹ـ۳ (الف) مدار RLC تحلیل‌شده در مثال ۹ـ۲. (ب) مدار در $t > 0$ ، منبع 150V و مقاومت 300Ω از مدار خارج شده‌اند.

و

$$v_C(0^-) = 150\frac{200}{200 + 300} = 60 \text{ V}$$

در شکل ۹ـ۴ (ب) ما مدار را در $t = 0^+$ رسم کرده‌ایم، که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن با منابع ایده‌آل به خاطر سادگی نشان داده شده است. چون هیچ کدام در مدت زمان صفر تغییر نمی‌کنند، داریم $v_C(0^+) = 60$ V.

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما معادله‌ای برای ولتاژ خازن داریم: $v_C(t) = A_1 e^{-50{,}000t} + A_2 e^{-200{,}000t}$ می‌دانیم که $v_C(0) = 60$ V است، اما هنوز معادله سومی لازم است. از معادله ولتاژ خازن خود مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv_C}{dt} = -50{,}000 A_1 e^{-50{,}000t} - 200{,}000 A_2 e^{-200{,}000t}$$

که می‌تواند به جریان خازن مرتبط شود، $i_C = C(dv_C/dt)$. با بازگشت به شکل ۹ـ۴ (ب)، KCL منجر می‌شود به:

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0.3 - [v_C(0^+)/200] = 0$$

- اقدام به حل.

إعمال اولین مقدار اولیه ما منتهی می‌شود به:

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

و إعمال مقدار اولیه دوم نتیجه می‌دهد:

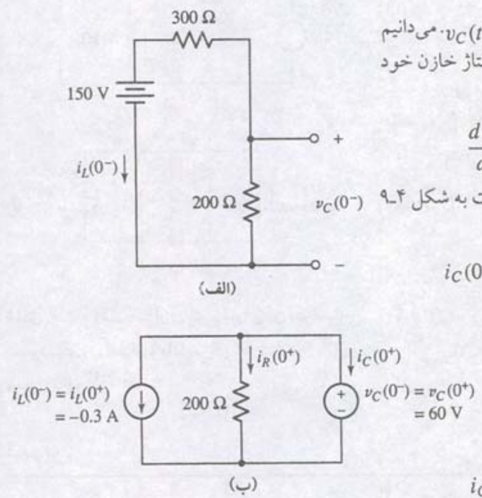
$$i_C(0) = -20 \times 10^{-9}(50{,}000A_1 + 200{,}000A_2) = 0$$

با حل آن‌ها داریم: $A_1 = 80$ V و $A_2 = -20$ V ، بنابراین به ازای $t > 0$ داریم:

$$v_C(t) = 80e^{-50{,}000t} - 20e^{-200{,}000t} \text{ V}$$

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

حداقل حل خود را در $t = 0$ چک می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $v_C(0) = 60$ V است. با مشتق‌گیری و ضرب در 20×10^{-9} می‌توان نشان داد که $i_C(0) = 0$ است.

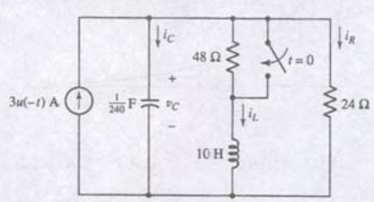


شکل ۹ـ۴ (الف) مدار معادل در $t = 0^-$ و (ب) مدار معادل در $t = 0^+$.

تمرین

۹ـ۲ پس از مدتی طولانی از بازبودن، کلیدی را در شکل ۹ـ۵ در $t = 0$ می‌بندیم. مطلوب است: (الف) $i_L(0^-)$، (ب) $v_C(0^-)$، (ج) $i_R(0^+)$، (د) $i_C(0^+)$ و (ه) $v_C(0.2)$.

جواب: 1A، 48V، 2A، -3A و -17.54V.



شکل ۹ـ۵

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرم پاسخ فوق میرا به هر کمیت جریان یا ولتاژ إعمال می‌گردد و ما آن را با مثال زیر می‌شکافیم.

مثال ۹ـ۳

مدار شکل ۹ـ۶ (الف) پس از $t = 0$ به یک مدار ساده RLC کاهش می‌یابد. عبارتی برای جریان مقاومت i_R معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید.

اگر مدار بعد از $t > 0$ فوق میرا شود، ما انتظار داریم پاسخ به فرم زیر باشد:

$$i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \qquad t > 0 \qquad (۱۸)$$

برای $t > 0$ ما یک مدار موازی RLC با $R = 30$ kΩ، $L = 12$ mH و $C = 2$ pF داریم. بنابراین $\alpha = 8.333 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ و $\omega_0 = 6.455 \times 10^6$ rad/s خواهد بود. بنابراین ما انتظار داریم یک پاسخ فوق میرا با $s_1 = -3.063 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ و $s_2 = -13.60 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ داشته باشیم.

برای تعیین مقادیر عددی A_1 و A_2، ابتدا مدار را در $t = 0^-$ تحلیل می‌کنیم (شکل ۶ـ۹(ب)). می‌بینیم که: $i_L(0^-) = i_R(0^-) = 4/32 \times 10^3 = 125\ \mu A$ و $v_C(0^-) = 4 \times 30/32 = 3.75\ V$.

در ترسیم مدار در $t = 0^+$ ما فقط $i_L(0^+) = 125\ \mu A$ و $v_C(0^+) = 3.75\ V$ را داریم (شکل ۶ـ۹(ج)). با این وجود، بنا به قانون اهم می‌توانیم اولین مقدار اولیه خود را محاسبه کنیم، $i_R(0^+) = 3.75/30 \times 10^3 = 125\ \mu A$. بنابراین:

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \qquad (19)$$

و اما دومین مقدار اولیه را چگونه به دست آوریم؟ اگر ما معادله (۱۸) را در 30×10^3 ضرب کنیم، عبارتی برای $v_C(t)$ به دست می‌آید. با گرفتن مشتق و ضرب در 2 pF عبارت $i_C(t)$ حاصل می‌گردد:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

به وسیله KCL،

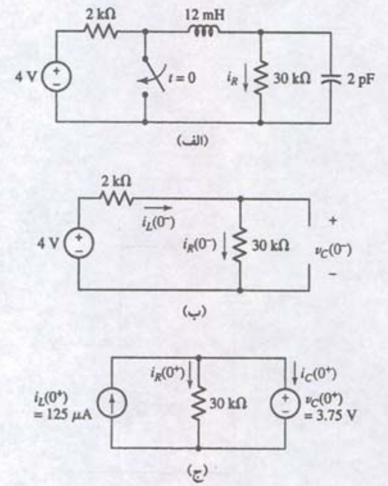
$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

بنابراین:

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \qquad (20)$$

با حل معادلات (۱۹) و (۲۰) داریم $A_1 = 161.3\ \mu A$ و $A_2 = -36.34\ \mu A$. پس:

$$i_R = \begin{cases} 125\ \mu A, & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063\times10^6 t} - 36.34e^{-13.6\times10^6 t}\ \mu A, & t > 0 \end{cases}$$

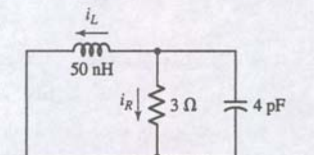


شکل ۶ـ۹ (الف) مداری که i_R برای آن خواسته شده است. (ب) مدار معادل برای $t = 0^-$. (ج) مدار معادل برای $t = 0^+$.

تمرین

۹ـ۳ جریان i_R در مقاومت شکل ۷ـ۹ را برای $t > 0$ معین کنید، اگر $i_L(0^-) = 6\ A$ و $v_C(0^+) = 0\ V$ باشد. آرایش مدار قبل از $t = 0$ نامشخص است.

جواب: $i_R(t) = 6.008(e^{-8.328\times10^{10}t} - e^{-6.003\times10^{7}t})\ A,\ t > 0$



شکل ۷ـ۹

نمایش گرافیکی پاسخ فوق میرا

بگذارید به معادله (۱۷) باز گردیم و ببینیم چه اطلاعات اضافی در مورد این مسئله می‌توان معین کرد. می‌توانیم معادله را چنین تفسیر کنیم که جمله اول آن دارای ثابت زمانی 1s و جمله دوم $\frac{1}{6}$ s است. هر کدام از آن‌ها با دامنه واحد شروع می‌شوند ولی دومی سریع افت می‌کند. پس $v(t)$ هرگز منفی نمی‌شود. با گذشت زمان، هر یک از آن‌ها به سمت صفر میل می‌کنند و پاسخ همان‌طور که باید، می‌میرد. بنابراین پاسخ در $t = 0$ و $t = \infty$ برابر صفر است و هرگز منفی هم نمی‌شود و چون هیچ‌وقت در میان این دو فاصله صفر نمی‌شود باید از خود حداکثری نمایش بگذارد که تعیین آن کار چندان مشکلی نیست. از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

برای تعیین زمان t_m که در آن ولتاژ حداکثر می‌گردد، مشتق را برابر صفر می‌گیریم:

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

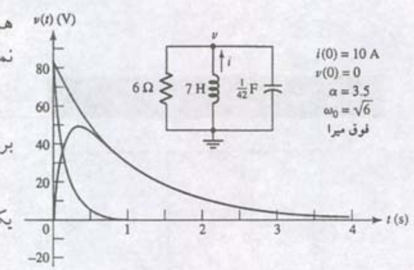
یک بار آن را دستکاری می‌کنیم:

$$e^{5t_m} = 6$$

و درنتیجه:

$$v(t_m) = 48.9\ V \quad و \quad t_m = 0.358\ s$$

از دو نمودار نمایی $84e^{-t}$ و $84e^{-6t}$ و سپس تعیین تفاضل آن‌ها می‌توان منحنی پاسخ را به دست آورد. مزیت این تکنیک در شکل ۸ـ۹ نشان داده شده است. در این شکل هر دو نمودار و تفاضل



شکل ۸ـ۹ پاسخ $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ در مدار شکل ۲ـ۹.

آن‌ها که همان پاسخ کامل $v(t)$ است، نشان داده شده است. منحنی‌ها پیش‌بینی قبلی ما را تأیید می‌کنند که در آن رفتار $v(t)$ در درازمدت به صورت $84e^{-t}$ یعنی جمله نمایی با دامنه کوچک‌تر s_1 و s_2 می‌باشد.

سوال دیگری که غالباً مطرح می‌شود این است که بخش گذرا چقدر تداوم دارد. در عمل گاهی بهتر است زمان گذرا هرچه سریع‌تر به سمت صفر میل کند. البته از نظر تئوری t_s برابر بینهایت است، زیرا $v(t)$ هرگز در زمان معین به صفر نشست نمی‌کند. با این وجود یک پاسخ ناچیز، پس از نشست $v(t)$ به کمتر از 1% مقدار ماکزیمم مطلق $|v_m|$، قابل چشم‌پوشی است. زمان رخداد این مقدار را زمان نشست می‌نامیم. چون در مثال فوق $|v_m| = v_m = 48.9V$ است، زمان نشست برای پاسخ همان زمان رسیدن به 0.489V است. از جایگزینی این مقدار در معادله (۱۷) و چشم‌پوشی از دومین جمله نمایی، زمان نشست برابر 5.15s خواهد بود.

مثال ۴ـ۹

برای $t > 0$، جریان خازن یک مدار RLC موازی بی‌منبع با رابطه $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A داده شده است.

ما ابتدا دو جمله را طبق شکل ۹ـ۹ ترسیم کرده و سپس برای یافتن $i_C(t)$ آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. بنابراین باید زمانی را یافت که در آن $|i_C|$ به 20 mA تقلیل یافته است یا

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \qquad (21)$$

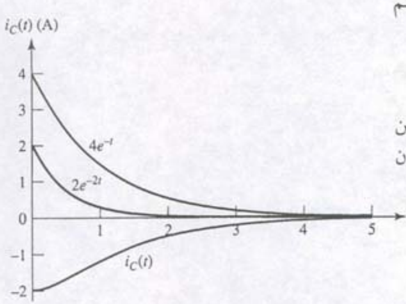
این معادله را می‌توان با روال تکرار روی یک ماشین حساب علمی حل کرد که در این صورت پاسخ $t_s = 5.296$ s را به دست می‌دهد. اما اگر چنین وسیله‌ای در اختیار نبود می‌توان معادله (۲۱) را برای $t \geq t_s$ به صورت زیر تقریب کرد:

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \qquad (22)$$

از حل آن‌ها داریم:

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298\ s \qquad (23)$$

که به خوبی به حل دقیق نزدیک است (با دقت 0.1%).

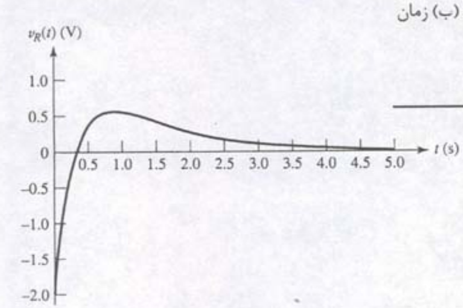


شکل ۹ـ۹ پاسخ جریان $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$A همراه با دو مولفه‌اش.

تمرین

۹ـ۴ (الف) $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$ V را در محدوده $0 < t < 5$ s رسم کنید. (ب) زمان نشست را محاسبه نمایید. (ج) حداکثر ماکزیمم و زمان رخداد آن را محاسبه نمایید.

جواب: (الف) شکل ۱۰ـ۹؛ (ب) 4.605 s و (ج) 544 mV، 896 ms.



شکل ۱۰ـ۹ رسم پاسخ تمرین ۴ـ۹ (الف).

۳ـ۹ میرای بحرانی

حالت فوق میرا با روابط زیر شناسایی می‌شود:

$$\alpha > \omega_0$$

یا

$$LC > 4R^2C^2$$

که منجر به دو مقدار حقیقی منفی s_1 و s_2 شده و پاسخ نیز جمع جبری دو مقدار نمایی منفی می‌باشد.

اکنون اجازه بدهید تا مقادیر α و ω_0 را طوری تنظیم کنیم که برابر شوند. این حالت بسیار خاصی، به نام میرای بحرانی است. اگر ما بخواهیم واقعاً مدار RLC را به صورت مدار بحرانی طراحی کنیم، تلاشی بیهوده انجام داده‌ایم زیرا برابری α و ω_0 غیرممکن است. نتیجه چنین تلاشی این است که نهایتاً به یک مدار فوق میرا یا زیرمیرا که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت دست یابیم.

"غیرممکن" کمی مبالغه‌آمیز است. علت به‌کاربردن این عبارت‌ها این‌است‌که در واقع یافتن عناصری که مقدار واقعی‌شان کمتر از 1 درصد با مقدار نامی‌شان تفاوت داشته باشد دشوار است. پس یافتن القاگری که L آن دقیقاً $4R^2C$ باشد فقط به لحاظ نظری امکان‌پذیر است، ولی حتی اگر یک جعبه پر از عناصر دارای مقادیر نامی یکسان را بگردیم، احتمال این‌که بتوانیم عنصری برگزینیم که دقیقاً مقدار موردنظر را داشته باشد بعید است.

در هر صورت به منظور تکمیل بررسی، مدار میرای بحرانی را در این‌جا مطالعه می‌کنیم، زیرا گذر جالبی را بین فوق میرا و زیر میرا به نمایش می‌گذارد.

میرای بحرانی تحت شرایط زیر اتفاق می‌افتد:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned}\right\} \quad \text{میرای بحرانی}$$

می توان میرای بحرانی را با تغییر مقدار هر یک از سه عنصر در مثال عددی آغاز بخش ۱ـ۹ تولید نمود. ما R را انتخاب کرده و مقدار آن را تا رسیدن به حالت میرای بحرانی افزایش می‌دهیم. ضمن این‌که ω_0 را بدون تغییر رها می‌نماییم. مقدار R لازم برابر است با، $7\sqrt{6}/2\Omega$، L همان 7H و C در $\frac{1}{42}$ F باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ s^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ s^{-1}$$

به خاطر می‌آوریم که مقادیر اولیه $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ A می‌باشند.

فرم پاسخ میرای بحرانی

در راستای یافتن پاسخی که از جمع دو جمله نمایی حاصل می‌شود به کار خود ادامه می‌دهیم:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1e^{-\sqrt{6}t} + A_2e^{-\sqrt{6}t}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3e^{-\sqrt{6}t}$$

در این‌جا فکر می‌کنیم که به بیراهه رفته‌ایم. زیرا پاسخی که تنها یک ثابت دلخواه دارد، ولی دو مقدار اولیه $v(0) = 0$ و $i(0) = 10A$ موجود است و هر دو آن‌ها باید توسط یک ثابت تأیید شوند. اگر $A_3 = 0$ را انتخاب کنیم، آنگاه $v(0) = 0$ است که با ولتاژ اولیه خازن یکی است. معهذا اگرچه هیچ انرژی در $t = 0^+$ در خازن ذخیره نشده است ولی 350J انرژی ذخیره‌شده در القاگر داریم. این انرژی موجب تولید جریان گذرایی به خارج از القاگر می‌شود که در این صورت ولتاژ غیرصفری را در دو سر هر سه قطعه ایجاد خواهد کرد.

به نظر می‌رسد که این وضع به کلی با حل پیشنهادی ما در تضاد است. قوانین ریاضی و الکتریکی بی‌اشکالند پس اگر در رسیدن به مشکل دچار اشتباه هم نشده باشیم، باید با فرضیات غلطی شروع کرده باشیم. اولین فرض این بود که حل معادله دیفرانسیل نمایی است و در این‌جا به نظر می‌رسد که چنین نیست. وقتی $\alpha = \omega_0$ شود، معادله دیفرانسیل (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2v = 0$$

حل این معادله کار مشکلی نیست، ولی در این‌جا راجع‌به آن بحثی نمی‌کنیم، زیرا معادله از نوع استاندارد است و در هر کتاب معادله دیفرانسیل می‌توان آن را یافت. حل برابر است با:

$$v = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2) \tag{۲۴}$$

باید توجه داشت که حل هنوز هم از دو جمله نمایی تشکیل شده است که اولی همان تابع نمایی آشنا و دیگری تابعی نمایی ضربدر t است. ضمناً توجه‌داریم که حل حاوی دو ثابت اختیاری‌است.

یافتن مقادیر A_1 و A_2

اکنون اجازه بدهید تا مثال عددی خود را دنبال کنیم. بعد از جایگزینی مقدار معلوم α در معادله (۲۴) داریم:

$$v = A_1te^{-\sqrt{6}t} + A_2e^{-\sqrt{6}t}$$

برای یافتن مقادیر A_1 و A_2 ابتدا مقدار اولیه را به $v(t)$ اعمال می‌کنیم، یعنی $v(0) = 0$. پس $A_2 = 0$ خواهد بود. این حالت ساده از صفربودن مقدار اولیه پاسخ $v(t)$ ناشی می‌شود. در حالت کلی چنین نیست و برای یافتن ضرایب باید دو معادله همزمان را حل کرد. دومین مقدار اولیه باید، همچون حالت فوق میرا به مشتق $\frac{dv}{dt}$ اعمال گردد. بنابراین با به‌خاطرسپردن $A_2 = 0$ از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = A_1t\left(-\sqrt{6}\right)e^{-\sqrt{6}t} + A_1e^{-\sqrt{6}t}$$

که در $t = 0$ آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = A_1$$

آن‌گاه مشتق را برحسب جریان اولیه خازن بیان می‌کنیم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

که جهات مرجع برای i_C، i_R و i در شکل ۲ـ۹ تعریف شده‌اند. بنابراین:

$$A_1 = 420V$$

و بنابراین پاسخ چنین خواهد بود:

$$v(t) = 420te^{-2.45t}\ V \tag{۲۵}$$

نمایش گرافیکی پاسخ میرای بحرانی

قبل از ترسیم این پاسخ اجازه بدهید تا با استدلال‌های کیفی شکل آن را حدس بزنیم. مقدار اولیه صفر بود و پاسخ معادله (۲۵) به دست آمد. چون $e^{-2.45t}$ فرم مبهمی دارد به راحتی می‌توان دریافت که در زمانی طولانی پاسخ به سمت صفر میل کند. ولی این مانع جزئی را می‌توان با اجرای قانون هوپیتال مرتفع کرد. پس:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2.45t}} = 420\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

مجدداً پاسخی داریم که از صفر شروع و به صفر ختم می‌گردد و در بقیه زمان مقدار مثبتی را دارا است. دوباره مقدار حداکثر v_m در t_m رخ می‌دهد. برای این مثال،

$$v_m = 63.1\ V \quad \text{و} \quad t_m = 0.408\ s$$

این حداکثر، بزرگتر از مقدار مشابه در حالت فوق میرا است و دلیل آن اتلاف کوچک‌تر در مقاومت R است. زمان پاسخ حداکثر کمی دیرتر از فوق میرا است. زمان نشست نیز از حل زیر به‌دست‌می‌آید:

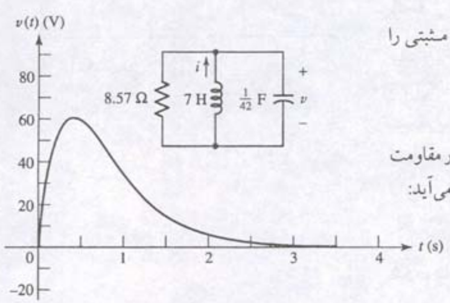
$$\frac{v_m}{100} = 420t_se^{-2.45t_s}$$

که با روش سعی و خطا داریم:

$$t_s = 3.12\ s$$

که به مقدار قابل ملاحظه‌ای کوچک‌تر از t_s در حالت فوق میرا (5.15s) است. در واقع می‌توان نشان داد که برای مقادیر معین L و C و مقدار انتخابی R ، زمان نشست حالت میرای بحرانی از زمان نشست حالت فوق میرا کمتر است. البته اگر مقاومت را با نیت کم‌کردن زمان نشست، کمی بیشتر کنیم، پاسخ زیر میرا خواهیم داشت که فرو جهشی به زیر محور صفر داشته و در زمان کوتاه‌تری نشست می‌کند.

منحنی پاسخ میرای بحرانی در شکل ۱۱ـ۹ ملاحظه می‌شود. می‌توان آن را با حالت فوق میرا، طبق شکل ۱۶ـ۹ مقایسه نمود.



شکل ۱۱ـ۹ پاسخ $v(t) = 420\ te^{-2.45t}$ مدار شکل ۲ـ۹ که در آن مقدار R تغییر کرده است تا پاسخ میرای بحرانی حاصل شود.

مثال ۵ـ۹

مقداری را برای R_1 چنان انتخاب کنید که مدار شکل ۱۲ـ۹ پاسخ میرای بحرانی را در $t > 0$ داشته باشد، همچنین R_2 را چنان برگزینید که $v(0) = 2$ V باشد.

توجه داریم که منبع جریان در $t = 0^-$، وصل است و القاگر را می‌توان به عنوان مدار اتصال کوتاه تصور کرد. بنابراین $v(0^-)$ که در دو سر R_2 ظاهر می‌گردد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v(0^-) = 5R_2$$

و برای $v(0) = 2$ V باید R_2 را به اندازه 400 mΩ اختیار کنیم.

پس از پرتاب سوییچ، منبع جریان قطع می‌شود (از لحظه $t = 0$ به بعد) و مقاومت R_2 هم اتصال کوتاه می‌گردد. اینک یک مدار RLC موازی داریم که از R_1، القاگر 4 H و خازن 1 nF تشکیل شده است.

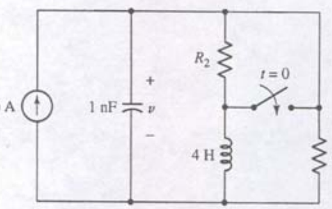
اکنون ممکن‌است برای $t > 0$ محاسبات زیر را انجام دهید:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10^{-9} R_1}$$

و

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-9}}} = 15{,}810 \text{ rad/s}$$

بنابراین برای ایجاد یک پاسخ میرای بحرانی در مدار برای $t > 0$، لازم است $R_1 = 31.63$ kΩ باشد (توجه: چون ما تا چهار رقم اعشار را گرد کرده‌ایم ممکن‌است این بحث پیش آید که این یک پاسخ میرای بحرانی نیست که در واقع وضعیتی سخت را ایجاد کرده است).

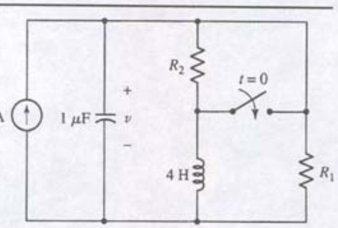


شکل ۱۲ـ۹ مداری که پس از پرتاب سوئیچ به یک RLC موازی تبدیل می‌گردد.

تمرین

۵ـ۹ (الف) R_1 را در شکل ۱۳ـ۹ طوری انتخاب کنید که پاسخ پس از $t = 0$ میرای بحرانی باشد. (ب) سپس R_2 را طوری انتخاب نمایید که $v(0) = 100$V باشد. (ج) $v(t)$ را در $t = 1$ms پیدا کنید.

جواب: 1kΩ، 250Ω و -212V.



شکل ۱۳ـ۹

۴ـ۹ مدار RLC موازی زیرمیرا

بیایید با افزایش R در بخش ۳ـ۹، روال را ادامه دهیم تا پاسخی به‌نام پاسخ زیرمیرا۱ حاصل گردد. بنابراین ضریب میرایی α کاهش می‌یابد و چون ω_0 ثابت است، لذا α^2 کوچک‌تر از ω_0^2 خواهد شد در نتیجه زیر رادیکال در عبارات مربوطه منفی خواهد شد. این شرایط موجب می‌شود تا پاسخ ویژگی کاملاً متفاوتی را داشته باشد ولی خوشبختانه لازم نیست که باز هم به سراغ معادله دیفرانسیل اولیه برویم. با استفاده از اعداد مختلط تابع نمایی را به تابع سینوسی میرا تبدیل می‌کنیم. این پاسخ کلاً از کمیات حقیقی تشکیل شده است و اعداد مختلط تنها در به‌دست‌آوردن آن‌ها نقش دارند.

فرم پاسخ زیرمیرا

با فرم نمایی زیر بحث را آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و سپس:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

که $j = \sqrt{-1}$ است.

مهندسین برق برای نشان‌دادن $\sqrt{-1}$ از j استفاده می‌کنند نه i، تا با نماد جریان اشتباه نشود.

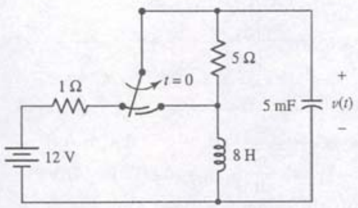
- مدارهای سری و موازی RLC بسته به مقدار نسبی R، L و C به سه دسته تقسیم می‌شوند:

  فوق میرا $(\alpha > \omega_0)$

  میرای بحرانی $(\alpha = \omega_0)$

  زیرمیرا $(\alpha < \omega_0)$

- برای مدارهای RLC سری، $\alpha = R/2L$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ است.
- برای مدارهای موازی RLC، $\alpha = 1/2RC$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ است.
- فرم نمونه یک پاسخ فوق میرا مجموع دو تابع نمایی است که یکی از آن‌ها سریع‌تر از دیگری میرا می‌شود. مثل $A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$.
- فرم نمونه یک پاسخ میرای بحرانی تابعی نمایی، همچون $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$ است.
- فرم نمونه یک پاسخ زیرمیرا پاسخی سینوسی میرا است: یعنی $e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$.
- در حین پاسخ گذرای یک مدار RLC، انرژی بین عناصر ذخیره‌کننده انرژی به میزانی که مقاومت مدار اجازه بدهد، انتقال می‌یابد. این مقاومت انرژی ذخیره‌شده اولیه را تلف می‌کند.
- پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ واداشته و پاسخ طبیعی. در این حالت قبل از یافتن ثابت‌ها باید حل کامل به دست آید.



شکل ۳۷ـ۹

۹ـ۹ خواندنی‌های کمکی

An excellent discussion of employing PSpice in the modeling of automotive suspension systems can be found in

R.W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows,* vol. I, 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1998.

Many detailed descriptions of analogous networks can be found in Chap. 3 of

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I.* New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

مسائل

۱ـ۹ مدار موازی بدون منبع

۱. مداری از چهار عنصر موازی ساخته شده است: یک مقاومت 4 Ω، یک مقاومت 10 Ω، یک خازن 1 μF و یک القاگر 2 mH. (الف) α را محاسبه کنید. (ب) ω_0 را محاسبه نمایید. (ج) آیا مدار زیرمیرا، میرای بحرانی، یا فوق میرا است؟ توضیح دهید.

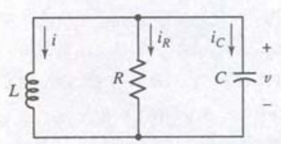
۲. یک مدار RLC موازی با القاکنایی 2 H و ظرفیت 1 pF موجود است. چه مقدار مقاومتی باید به طور موازی وصل شود تا موارد ذکرشده تضمین شود. (الف) پاسخ زیرمیرا؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی.

۳. یک مدار RLC بدون منبع دارای $R = 1\ \Omega$، $C = 1$ nF و $L = 1$ pH است. (الف) α و ω_0 را محاسبه نمایید. (ب) s_1 و s_2 را محاسبه کنید. (ج) فرم پاسخ جریان القاگر برای $t > 0$ چگونه است؟

۴. یک خازن 22 aF به طور موازی با یک القاگر 1 fH وصل است. چه مقاومتی که با آن‌ها موازی شود منجر به یک (الف) پاسخ زیرمیرا می‌شود؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی می‌گردد؛ (ج) پاسخ فوق میرا خواهد شد؟

۵. یک مدار بی‌منبع RLC موازی دارای القاگری است که برای آن $\omega_0L = 10\Omega$ می‌باشد. اگر $s_1 = -6s^{-1}$ و $s_2 = -8s^{-1}$ باشد، مطلوبست R، L و C.

۶. جریان خازن در مدار شکل ۳۸ـ۹ برابر $i_C(t) = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$ است. اگر $C = 1$mF و $v(0) = -0.5$V باشد، مطلوبست (الف) $v(t)$، (ب) $i_R(t)$ و (ج) $i(t)$.



شکل ۳۸ـ۹

۷. یک مدار RLC موازی دارای فرکانس پاسخ طبیعی $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}$ rad/s است. مقدار القاکنایی $L = 2$ pH فرض

و در $t = 0$ داریم:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = \sqrt{2}\,B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

که i_C در معادله ۲ـ۹ تعریف شد. بنابراین:

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

نمایش گرافیکی پاسخ زیرمیرا

همچون گذشته، دقت کنید که تابع پاسخ دارای یک مقدار اولیه صفر است زیرا ولتاژ اولیه را ما خود اعمال کرده‌ایم و نیز مقدار نهایی حاصل از جمله نمایی هم در زمان طولانی صفر می‌گردد. با افزایش t از صفر به مقدار مثبت کوچک، $v(t)$ به صورت $210\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ تغییر می‌کند زیرا بخش نمایی حدود واحد است. مدتی بعد در زمان t_m، جمله نمایی سریع‌تر از افزایش جمله $\sin\sqrt{2}t$ شروع به کاهش می‌کند. بنابراین $v(t)$ به حداکثر v_m رسیده و سپس شروع به کاهش می‌کند. دقت کنید که t_m زمان رسیدن جمله سینوسی $\sin\sqrt{2}t$ به حداکثر نیست، بلکه کمی قبل از آن است.

در $t = \pi/\sqrt{2}$، $v(t) = 0$ است. بنابراین در فاصله $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ پاسخ منفی می‌شود و دوباره در $t = \sqrt{2}\pi$، صفر می‌گردد. بنابراین $v(t)$ تابعی **نوسانی** نسبت به زمان بوده و محور زمان را بی‌نهایت دفعه در $t = n\pi/\sqrt{2}$ قطع می‌کند، که n یک عدد صحیح مثبت است. در هر حال در مثال ما، پاسخ کمی زیرمیرا است و جمله نمایی موجب می‌شود تا تابع خیلی سریع میرا شود و نقاط قطع صفر در نمودار مشاهده نمی‌شوند.

طبیعت نوسانی پاسخ، با کاهش α، جالب‌تر است. اگر α صفر باشد، که متعلق به مقاومت بی‌نهایت بزرگی است، $v(t)$ یک موج سینوسی نامیرا خواهد بود. زمانی وجود ندارد که $v(t)$ به زیر یک درصد مقدار حداکثرش افت کرده و در آن باقی بماند و بنابراین زمان نشست بی‌نهایت است. این حرکت را با حرکت دائمی اشتباه نگیرید. ما یک انرژی اولیه فرض کرده‌ایم بدون آن‌که در مدار مصرف شود. این انرژی از محل اولیه خود در القاگر به خازن منتقل شده و سپس دوباره به القاگر باز می‌گردد و این حرکت تا ابد ادامه دارد.

نقش مقاومت محدود

مقاومت معین R در مدار RLC نقش یک دلال را دارد. هر زمان که انرژی از L به C یا از C به L انتقال پیدا کند، دلال کمیسیون خود را برمی‌دارد. در درازمدت دلال همه انرژی را تصاحب می‌کند و تا ژول آخرش مصرف می‌نماید. دیگر ژولی برای L و C باقی نمی‌ماند و جریان و ولتاژ وجود نخواهد داشت. می‌توان مدارهای RLC موازی را طوری ساخت که مقدار R در آن‌ها بزرگ بوده و بنابراین پاسخ طبیعی سال‌ها باقی بماند، بدون آن‌که انرژی دیگری لازم باشد.

به مسئله عددی خاص خود بازمی‌گردیم. از مشتق‌گیری اولین ماکزیمم را برای $v(t)$ به‌دست‌می‌آوریم:

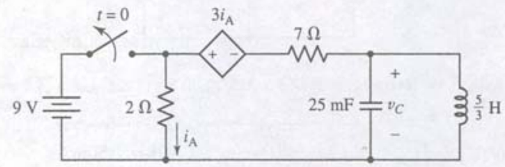
$$v_{m1} = 71.8\ \text{V} \quad , \quad t_{m1} = 0.435\text{s} \ \text{در}$$

حداقل بعدی در زمان زیر رخ می‌دهد:

$$v_{m2} = -0.845\ \text{V} \quad , \quad t_{m2} = 2.66\text{s} \ \text{در}$$

و به همین ترتیب منحنی پاسخ در شکل ۱۴ـ۹ ملاحظه می‌شود. منحنی‌های پاسخ دیگری برای مدارهایی که بیشتر زیرمیرا هستند در شکل ۱۵ـ۹ ملاحظه می‌گردد.

۲۲. کلید در شکل ۴۵ـ۹ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف) $i_A(0^-)$ را به‌دست‌آورید. (ب) $i_A(0^+)$ را معین کنید. (ج) $v_C(0^-)$ را تعیین نمایید. (د) مقاومت معادل موازی با L و C را در $t > 0$ به‌دست‌آورید. (هـ) $i_A(t)$ را مشخص کنید.



شکل ۴۵ـ۹

۲۳. دو سکه با لایه‌ای از یخ به دمای 80K به ضخامت 1mm از یکدیگر جدا شده‌اند. یک القاگر ابررسانا (بنابراین با مقاومت صفر) از اکسید مس با القاکنایی $4\mu H$ به علت بی‌احتیاطی در کنار میز آزمایشگاه افتاده و طوری آویزان شده که از دو سر آن با سکه‌ها در تماس است. یخ حاوی یون‌های ناخالصی است و موجب هدایت آن می‌گردد. برای این ساختار چه مقاومتی لازم است تا مجموعه به صورت یک مدار RLC فوق میرا رفتار کند.

۳ـ۹ میرای بحرانی

۲۴. یک مدار RLC موازی با القاگر 1 mH و خازن $12\mu F$ ساخته شده است. (الف) R را چنان انتخاب کنید که پاسخ میرای بحرانی باشد. (ب) اگر $v(0^-) = 12$ V و $i_L(0^-) = 0$ باشد، عبارتی معتبر برای $v_C(t)$ در $t > 0$ پیدا کنید.

۲۵. یک مدار RLC با استفاده از القاگر 10 mH و خازن 1 mF ساخته شده است. (الف) مقدار R را طوری انتخاب کنید که پاسخ مدار میرای بحرانی باشد. (ب) اگر $v(0^-) = 0$ V و $i_L(0^-) = 10$ A باشد عبارتی برای $i_L(t)$ در $t > 0$ پیدا کنید. (د) حل خود را رسم کرده و با شبیه‌سازی PSpice صحت آن را تحقیق کنید. آن را نام‌گذاری نمایید. آیا دو حل یکی هستند.

۲۶. بگویید چرا کمتر اتفاق می‌افتد که کسی در عمل با مدار میرای بحرانی مواجه شود.

۲۷. مقدار القاکنایی شکل ۴۱ـ۹ را تا زمانی‌که مدار به صورت میرای بحرانی است تغییر دهید. (الف) القاکنایی جدید چقدر است. (ب) i_L را در $t = 5$ms به‌دست‌آورید. (ج) زمان نشست را معین کنید.

۲۸. (الف) در شکل ۴۰ـ۹ چه مقاومتی باید به‌کار رود تا میرای بحرانی حاصل گردد؟ (ب) با این مقدار مقاومت، $v_C(t)$ را برای $t > 0$ معین کنید.

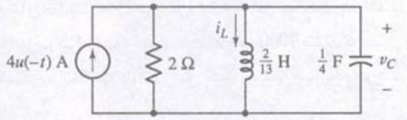
۲۹. در وضعیتی که برای مسئله ۲۳ مشاهده شد، مقاومت یخ چقدر باشد تا پاسخ مدار RLC، میرای بحرانی باشد.

۳۰. در مدار شکل ۳۹ـ۹، فرض کنید $v(0) = -400$V و $i(0) = 0.1$A است. اگر $L = 5$mH و $C = 10$nF و مدار میرای بحرانی باشد. (الف) R را پیدا کنید. (ب) $|i|_{max}$ و (ج) i_{max} را به‌دست‌آورید.

۳۱. در یک مدار RLC موازی پاسخ از نوعی میرای بحرانی با $\alpha = 1\text{ms}^{-1}$ و $R = 1\text{m}\Omega$ است. فرض کنید که مقدار القاگر از عبارت $L = \mu N^2 A/s$ محاسبه شود که در آن $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m، N = تعداد دور کامل سیم‌پیچ، A نیز سطح مقطع آن و s طول کل سیم‌پیچ است. سطح مقطع القاگر 1cm^2 است و در هر سانتیمتر 50 دور سیم وجود دارد. سیم‌پیچ از عنصر گلونیم ساخته شده که تا 100°F ابررسانا است. طول سیم‌پیچ چقدر است؟

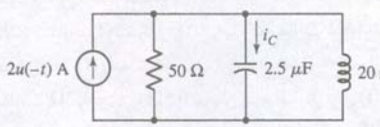
۴ـ۹ مدار RLC موازی زیرمیرا

۳۲. برای مدار شکل ۴۶ـ۹، (الف) $i_L(0^+)$، (ب) $v_C(0^+)$، (ج) $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0+}$، (د) $\frac{dv_C}{dt}\Big|_{t=0+}$، (هـ) $v(t)$ را پیدا کنید. (و) منحنی $v_C(t)$ را در $-1\text{s} < t < 2\text{s}$ رسم نمایید.



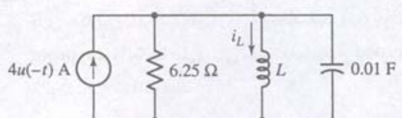
شکل ۴۶ـ۹

۳۳. $i_C(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۴۷ـ۹ پیدا کنید.



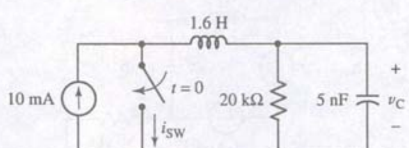
شکل ۴۷ـ۹

۳۴. فرض کنید در شکل ۴۸ـ۹ مقدار $\omega_d = 6$ rad/s باشد. (الف) L را بیابید. (ب) عبارتی برای $i_L(t)$ در همه زمان‌ها بیابید. (ج) $i_L(t)$ را در $-0.1 < t < 0.6$s به‌دست‌آورید.



شکل ۴۸ـ۹

۳۵. کلید در شکل ۴۹ـ۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. در $t = 0$ کلید را می‌بندیم. برای $t > 0$، (الف) $v_C(t)$ و (ب) $i_{sw}(t)$ را به‌دست‌آورید.

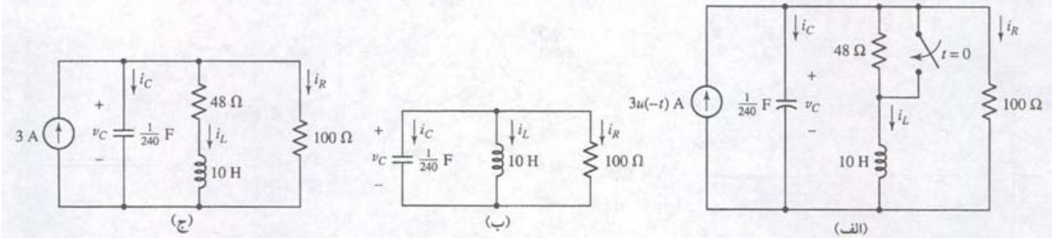


شکل ۴۹ـ۹

۳۶. (الف) در مدار شکل ۵۰ـ۹، $v(t)$ را در $t > 0$ بیابید. (ب) در فاصله $0 < t < 0.1$s، $v(t)$ را رسم نمایید.

مثال ۶ـ۹

در مدار شکل ۱۷ـ۹ (الف) $i_L(t)$ را معین کرده و شکل موج را رسم کنید.



شکل ۱۷ـ۹ (الف) مدار RLC موازی که در آن جریان $i_L(t)$ مورد نظر است، (ب) مدار در $t \geq 0$ و (ج) مدار برای تعیین مقادیر اولیه.

در $t = 0$ نه تنها جریان 3A، بلکه مقاومت 48Ω حذف شده است. مدار اصلاح‌شده در شکل ۱۷ـ۹ (ب) ترسیم شده است. بنابراین $\alpha = 1.2\ s^{-1}$ و $\omega_0 = 4.899$ rad/s است. چون $\alpha < \omega_0$ است، با مدار زیرمیرا سروکار داریم و بنابراین پاسخی به فرم زیر انتظار می‌رود:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۸)$$

که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750$ rad/s است. تنها مرحله باقیمانده استفاده از مقادیر اولیه در تعیین ثابت‌های B_1 و B_2 است.

شکل ۱۷ـ۹ (ج) مدار را در $t = 0^-$ نشان می‌دهد. ما باید به جای القاگر یک مدار کوتاه و به‌جای خازن یک مدار باز قرار دهیم که نتیجه می‌دهد: $i_L(0^-) = 2.027$ A و $v_C(0^-) = 97.30$ V. چون هیچ کدام از این دو کمیت نمی‌توانند در زمان صفر تغییر کنند، بنابراین $v_C(0^+) = 97.30$ V و $i_L(0^+) = 2.027$ A.

از جایگزینی $i_L(0) = 2.027$ در معادله (۲۸) داریم $B_1 = 2.027$ A. برای تعیین ثابت دیگر باید از معادله (۲۸) مشتق بگیریم:

$$\frac{di_L}{dt} = e^{-\alpha t}(-B_1\omega_d\sin\omega_d t + B_2\omega_d\cos\omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۹)$$

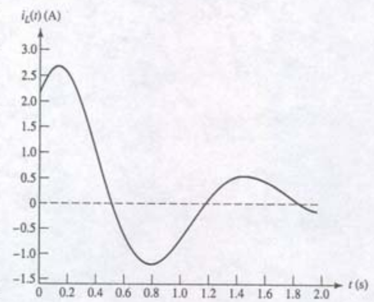
توجه دارید که $v_L(t) = L(di_L/dt)$ است. با مراجعه به شکل ۱۷ـ۹ (ب) می‌بینیم که $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3$ V. بنابراین با ضرب معادله (۲۹) در $L = 10$ H و $t = 0$ و حل نهایی برابر است با:

$$v_L(0) = 10(B_2\omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

با حل، $B_2 = 2.651$ A خواهد شد، بنابراین:

$$i_L = e^{-1.2t}(2.027\cos 4.75t + 2.561\sin 4.75t)\ \text{A}$$

که در شکل ۱۸ـ۹ ترسیم شده است.

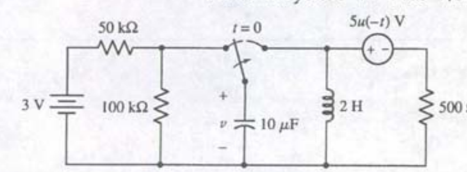


شکل ۱۸ـ۹ نمودار $i_L(t)$ با علائم آشکاری از پاسخ زیرمیرا.

تمرین

۶ـ۹ کلید در شکل ۱۹ـ۹ مدتی طولانی در وضعیت سمت چپ بوده است. در $t = 0$ به راست برده می‌شود. مطلوبست (الف) $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$، (ب) مقدار v در $t = 1$ms و (ج) t_0، یعنی اولین مقدار t بزرگ‌تر از صفر که در آن $v = 0$ باشد.

جواب: -1400 V/s، 0.695 V و 1.609 ms.



شکل ۱۹ـ۹

اکنون رادیکال جدیدی داریم که مقداری است حقیقی و آن را ω_d یا **فرکانس تشدید طبیعی** می‌خوانیم:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

حال پاسخ را چنین می‌توان نوشت:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1e^{j\omega_d t} + A_2e^{-j\omega_d t}) \qquad (۲۶)$$

و به فرم طویل‌تر ولی معادل:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\{(A_1 + A_2)[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}] + j(A_1 - A_2)[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2}]\}$$

با توجه به مطالب پیوست ۵ می‌بینیم که کروشه اول در معادله قبل برابر با $\cos\omega_d t$ و دومی $\sin\omega_d t$ است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin\omega_d t]$$

به ضرایب، سمبل جدیدی تخصیص می‌دهیم:

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \qquad (۲۷)$$

که معادله (۲۶) و (۲۷) معادلند.

در این‌جا موضوع کمی غیرعادی است زیرا عبارتی که در آغاز مولفه‌های مختلط داشت، اکنون کاملاً حقیقی است. با این وجود باید به خاطر آورید که ما در آغاز اجازه دادیم که A_1 و A_2 و نیز s_1 و s_2 مختلط باشند. در هر شرایطی، اگر با حالت زیرمیرا سروکار داشته باشیم دیگر با اعداد مختلط کاری نداریم. چون α، ω_d و t کمیت‌های حقیقی‌اند، پس $v(t)$ هم باید حقیقی باشد (و می‌توان آن را روی اسیلوسکوپ، ولتمتر یا یک ورق کاغذ مشاهده کرد). معادله (۲۷) فرم تابعی مطلوب را برای پاسخ زیرمیرا دارد و اعتبارش را با جایگزینی در معادله دیفرانسیل اصلی می‌توان محک زد. این تمرین را به عهده شکاکان می‌گذاریم. دو ثابت حقیقی B_1 و B_2 را دوباره برای تأیید شرایط اولیه انتخاب می‌کنیم.

ما به مثال ساده مدار RLC موازی شکل ۲ـ۹ می‌رویم که در آن $R = 6\ \Omega$، $C = 1/42$ F و $L = 2$ H است. ولی اکنون مقاومت را به 10.5 Ω افزایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}\ s^{-1} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC} = 2\ s^{-1}$$

و

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

که جواب به صورت زیر است و تنها دو ثابت مجهول دارد:

$$v(t) = e^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t + B_2\sin\sqrt{2}t)$$

یافتن مقادیر B_1 و B_2

تعیین دو ثابت همانند قبل انجام می‌شود. اگر باز هم فرض کنیم $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ باشد آنگاه B_1 باید صفر شود. بنابراین:

$$v(t) = B_2e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

و مشتق آن برابر است با:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2}B_2e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - 2B_2e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

مدار RLC سری دوگان مدار RLC موازی است و همین کافی است تا تحلیل مدار کار ساده‌ای شود. شکل ۲۱ـ۹ (الف) یک مدار سری را نشان می‌دهد. معادله انتگرالی ـ دیفرانسیلی چنین است:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_C(t_0)=0$$

که قابل مقایسه با معادله مشابه در مدار RLC موازی است که مجدداً در شکل ۲۱ـ۹ (ب) ترسیم شده است:

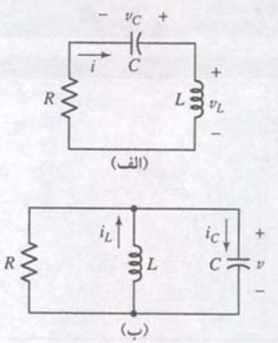
$$C\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R}v+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i_L(t_0)=0$$

معادله دیفرانسیل درجه دوم حاصل از مشتق‌گیری زمانی دو معادله فوق هم دوگانند:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \qquad (۳۰)$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0 \qquad (۳۱)$$

تمام بحث‌های ما در مورد RLC موازی قابل اعمال به مدار RLC سری است، به بیان دیگر مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان القاگر معادل با مقادیر اولیه جریان القاگر و ولتاژ خازن است. به‌این‌ترتیب پاسخ ولتاژ تبدیل به پاسخ جریان می‌گردد. بنابراین لازم‌است چهار بخش قبل را با استفاده از زبان دوگانگی بازخوانی کنید و توصیف کامل مدار RLC سری را به‌دست‌آورید. با این وجود این کار ممکن‌است پس از چند پاراگراف اول شما راکسل کند و در واقع ضروری به‌نظر نرسد.



شکل ۲۱ـ۹ (الف) مدار RLC سری که دوگان مدار RLC موازی (ب) است. مقادیر عناصر دو مدار یکسان نیستند.

مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری

مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری را به آسانی می‌توان بیان کرد. برای مدار شکل ۲۱ـ۹ (الف) پاسخ فوق میرا عبارت‌است‌از:

$$i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

که

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

و بنابراین

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرم پاسخ میرای بحرانی چنین است:

$$i(t)=e^{-\alpha t}(A_1t+A_2)$$

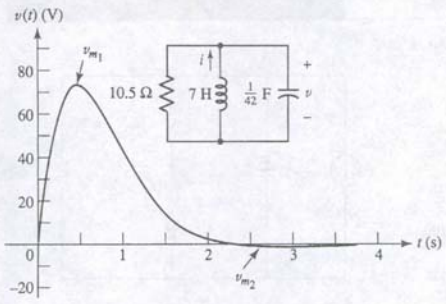
و پاسخ زیرمیرا به فرم زیر می‌باشد:

$$i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)$$

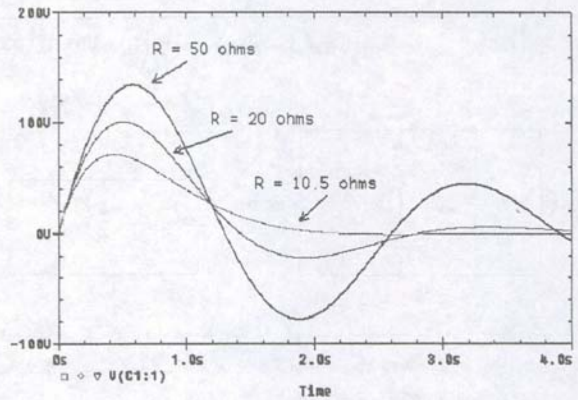
که

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

واضح است که در صورت کار با پارامترهای α، ω_0 و ω_d، شکل ریاضی پاسخ‌ها برای وضعیت‌های دوگان یکسان خواهد بود. هر افزایشی در α در هر یک از دو مدار سری یا موازی



شکل ۱۴ـ۹ پاسخ $v(t) = 210\sqrt{2}\,e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ مدار شکل ۲ـ۹. با افزایش R، حالت زیرمیرا حاصل می‌شود.

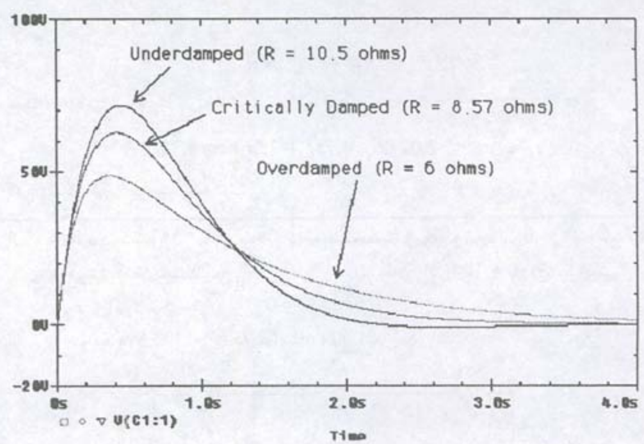


شکل ۱۵ـ۹ پاسخ زیرمیرای حاصل از شبیه‌سازی به‌ازای سه مقدار مقاومت متفاوت، هرچه R بزرگ‌تر باشد، رفتار نوسانی شدیدتر می‌شود.

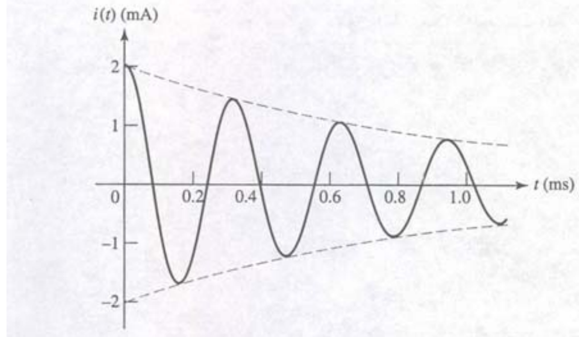
زمان نشست با روش سعی و خطا حاصل می‌گردد که برابر 2.92s است که کمی بزرگ‌تر از میرای بحرانی است. توجه کنید که t_s بزرگ‌تر از t_{m2} است زیرا v_{m2} بزرگ‌تر از یک درصد v_{m1} می‌باشد. این بررسی نشان می‌دهد که یک کاهش ناچیز در R، اندازه فروجهش را کم کرده و اجازه می‌دهد تا t_s کمتر از t_{m2} گردد.

پاسخ‌های فوق میرا، میرای بحرانی و زیرمیرا برای این شبکه با PSpice شبیه‌سازی شده و در شکل ۱۶ـ۹ نشان داده شده‌اند. مقایسه این سه منحنی نتایج زیر را به‌دست‌می‌دهد.

- وقتی میزان میرایی را با افزایش اندازه R تغییر دهیم، هر چه میرایی کمتر شود، ماکزیمم پاسخ بزرگ‌تر می‌گردد.
- وقتی وضعیت زیرمیرا حاکم‌باشد، پاسخ نوسانی می‌شود و کمترین زمان نشست مداری دارد که کمی زیرمیراباشد.



شکل ۱۶ـ۹ پاسخ ولتاژ فوق میرا، میرای بحرانی، و زیر میرا برای مثال‌های بالا، که از تغییرات مقاومت موازی R به دست آمده است.



شکل ۹ـ۲۳ پاسخ جریان مدار RLC سری که در آن $\alpha = 1000s^{-1}$، $\omega_0 = 20000s^{-1}$، $i(0) = 2mA$ و $v_C(0) = 2V$ است. برای رسم منحنی بهتر است ابتدا پوش خط‌چین را ترسیم کنیم.

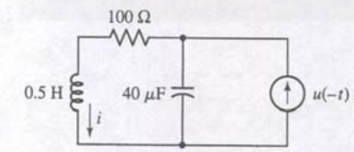
برای ترسیم یک پاسخ مناسب دوپوش نمایی $2e^{-1000t}$ و $-2e^{-1000t}$ را رسم می‌کنیم. این دوپوش در شکل ۹ـ۲۳ با خط‌چین نشان داده شده‌اند. سپس نقاط مربوط به ربع تناوب تابع سینوسی یعنی 0، $\frac{\pi}{2}$، π و غیره یا $t = 0.0785k$ ms، با $k = 0, 1, 2, ...$ را روی محور زمان علامت می‌زنیم و سپس منحنی نوسانی را به سرعت رسم می‌نماییم.

زمان نشست به سادگی با استفاده از بخش فوقانی پوش معین می‌گردد. یعنی $2e^{-1000t_s}$ را برابر با 1% مقدار ماکزیمم که 2mA است می‌گیریم. بنابراین $e^{-1000t_s} = 0.01$ و $t_s = 461\mu s$ خواهد شد که مقدار تقریبی است و معمولاً به‌عنوان زمان نشست به کاربرده می‌شود.

تمرین

۹ـ۷ با مراجعه به مدار شکل ۹ـ۲۴ α را پیدا کنید. (ب) ω_0 را بیابید. (ج) $i(0^+)$ را معین کنید. (د) $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0+}$ را به‌دست‌آورید. (ه) $i(12ms)$ را معین نمایید.

جواب: $100s^{-1}$، 224 rad/s، 1 A، 0، -0.1204 A.

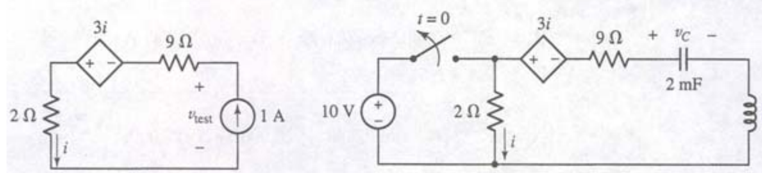


شکل ۹ـ۲۴

به عنوان مثال آخر، وضعیت‌هایی را درنظرمی‌گیریم که مدار شامل منبع وابسته است. اگر هیچ جریان یا ولتاژ کنترل‌کننده‌ای مربوط به این منبع وابسته، مورد نظر نباشد، ممکن‌است معادل تونن متصل به القاگر و خازن را پیدا کنیم. در غیر این صورت، احتمالاً مجبور به نوشتن معادله انتگرودیفرانسیل، مشتق نشان داده شده، و حل معادله مشتق خواهیم بود.

مثال ۹ـ۸

عبارتی برای $v_C(t)$ در مدار شکل ۹ـ۲۵ (الف) معتبر برای $t > 0$ به دست آورید.



شکل ۹ـ۲۵ (الف) یک مدار RLC حاوی منبع وابسته. (ب) مداری که R_{eq} از آن به دست می‌آید.

چون ما به $v_C(t)$ علاقمندیم، یافتن مقاومت تونن متصل به القاگر و خازن در $t = 0^+$ پذیرفتنی است. ما این کار را با اتصال منبع 1 A طبق شکل ۹ـ۲۵ (ب) که از آن رابطه زیر به دست می‌آید، انجام می‌دهیم:

$$v_{test} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8\ V$$

بنابراین $R_{eq} = 8\ \Omega$ است و لذا $\alpha = R/2L = 0.8\ s^{-1}$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10$ rad/s، به این معنی که ما انتظار داریم پاسخ زیرمیرایی با $\omega_d = 9.968$ rad/s به فرم زیر به دست آید:

$$v_C(t) = e^{-0.8t}(B_1 \cos 9.968t + B_2 \sin 9.968t) \qquad (۳۲)$$

تحلیل کامپیوتری

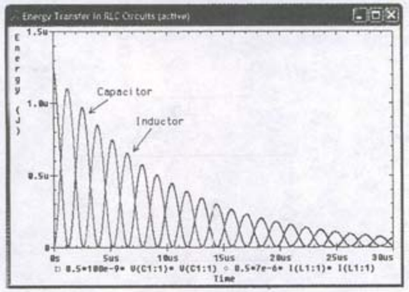
یک ویژگی جالب در probe امکان اجرای اعمال ریاضی روی ولتاژها و جریان‌های حاصل از شبیه‌سازی است. در این مثال، از این امکان استفاده می‌کنیم تا انتقال انرژی در یک خازن از مدار RLC، که مقدار معینی انرژی را ذخیره کرده‌است ($1.25\mu J$) به یک القاگر بدون انرژی نشان دهیم.

ما القاگر را $7\mu H$ و خازن را 100nF انتخاب کرده‌ایم و به این ترتیب بلافاصله می‌توان دید که $\omega_0 = 1.195 \times 10^6 s^{-1}$ است. برای بررسی حالات فوق میرا، میرای بحرانی و یا زیرمیرا، مقاومت موازی را طوری انتخاب کنیم که $\alpha > \omega_0$ (فوق میرا)، $\alpha = \omega_0$ (میرای بحرانی) و $\alpha < \omega_0$ (زیرمیرا) باشد. از بحث قبلی می‌دانیم که برای یک مدار RLC، مقدار $\alpha = (2RC)^{-1}$ است. به‌منظور نزدیکی هرچه بیشتر به حالت میرای بحرانی، $R = 4.1823\Omega$ برمی‌گزینیم. دقیقاً نمی‌توان $\alpha = \omega_0$ را ایجاد کرد. اگر مقاومت را اضافه کنیم، انرژی ذخیره‌شده در دو عنصر دیگر کندتر تلف می‌شود و لذا پاسخ زیرمیرا خواهد بود. ما یک بار $R = 100\Omega$ را اختیار می‌کنیم تا حالت فوق رخ دهد و بار دیگر $R = 1\Omega$ را درنظرمی‌گیریم تا پاسخ فوق میرا گردد.

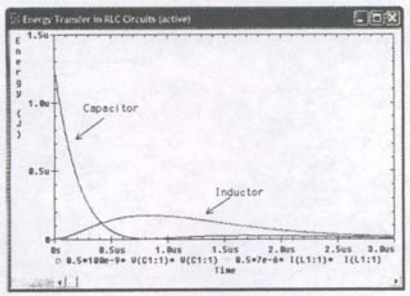
بنابراین سه نوع شبیه‌سازی جداگانه را باید برنامه‌ریزی کنیم، که بین آن‌ها فقط مقاومت R باید تغییر یابد. انرژی $1.25\mu J$ ذخیره شده اولیه در خازن مربوط به ولتاژ 5V است و به این ترتیب مقدار اولیه خازن را تنظیم می‌کنیم.

با اجرای probe، تحت منوی Trace، Add را انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم انرژی ذخیره‌شده در هر دو عنصر خازن و القاگر را به صورت تابعی از زمان ترسیم نماییم. برای خازن داریم $w = \frac{1}{2}Cv^2$، بنابراین روی پنجره Trace Expression کلیک کرده، سپس "0.5 * 100E-9" را تایپ کنید (بدون علامت نقل قول)، روی V(C1:1) کلیک کنید، به پنجرهٔ Trace Expression بازگردید و "*" را وارد نمایید، دوباره روی V(C1:1) کلیک نمایید و سپس OK را کلیک کنید. روال را برای یافتن انرژی ذخیره‌شده در القاگر تکرار می‌کنیم ولی به‌جای 100E-9 از 7E-6 استفاده نموده و روی I(L1:1) در عوض V(C1:1) کلیک نمایید.

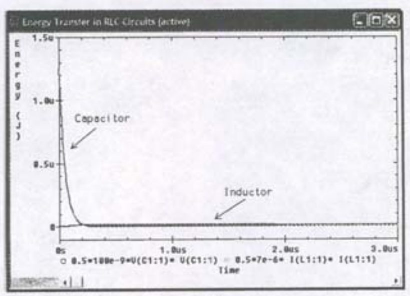
خروجی probe برای سه شبیه‌سازی جداگانه در شکل ۹ـ۲۰ دیده می‌شود. در شکل ۹ـ۲۰ (الف) می‌بینیم که انرژی مانده در مدار به‌طور پیوسته بین خازن و مقاومت پس و پیش می‌رود تا بالاخره کاملاً تلف شود. کاهش مقاومت به 4.1833Ω مدار میرای بحرانی را نتیجه می‌دهد و نمودار به شکل ۹ـ۲۰ (ب) خواهد بود. می‌بینیم که دیگر حالت نوسانی زیرمیرا وجود ندارد. در عوض انرژی انتقالی به القاگر دارای اوجی در $0.8\mu s$ است و سپس به صفر افت می‌کند. پاسخ فوق میرا در شکل ۹ـ۲۰ (ج) دیده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که انرژی در پاسخ فوق میرا خیلی سریع‌تر به صفر افت می‌نماید و انرژی کمی به القاگر انتقال می‌یابد زیرا بخش عمده آن در مقاومت تلف شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹ـ۲۰ انتقال انرژی در مدار RLC موازی با (الف) $R = 100\Omega$، (ب) $R = 4.1833\Omega$ و (ج) $R = 1\Omega$.

۹ـ۵ مدار RLC سری بدون منبع

اکنون مایلیم پاسخ طبیعی مدل مداری متشکل از یک القاگر ایده‌آل، خازن ایده‌آل و مقاومت ایده‌آل سری را معین نماییم. مقاومت ایده‌آل ممکن‌است یک مقاومت فیزیکی باشد که با یک مدار LC یا RLC سری است. این مقاومت ممکن‌است افت اهمی و یا افت هسته فرومغناطیسی القاگر و یا همه آن‌ها و دیگر عناصر جذب‌کننده انرژی باشد.

جدول ۹ـ۱ خلاصه معادلات مدارهای RLC بدون منبع.

نوع	شرایط	ناحیه	α	ω_0	نتیجه
سری	فوق میرا	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ که $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$
موازی			$\frac{R}{2L}$		
سری	میرای بحرانی	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$
موازی			$\frac{R}{2L}$		
سری	زیرمیرا	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$ که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
موازی			$\frac{R}{2L}$		

با ω_0 ثابت به پاسخ فوق میرایی منجر می‌شود. تنها باید در محاسبه α مراقب باشیم که مقدار آن در مدار موازی $\frac{1}{2RC}$ و در مدار سری $\frac{R}{2L}$ است، بنابراین α با افزایش مقاومت سری و کاهش مقاومت موازی، زیاد می‌شود. به‌طور خلاصه معادلات کلیدی RLC سری و موازی در جدول ۹ـ۱ آورده شده است.

مثال ۹ـ۷

با فرض مدار RLC شکل ۹ـ۲۲ که در آن $L = 1H$، $R = 2k\Omega$، $C = \frac{1}{401}\,\mu F$، $i(0) = 2$ mA و $v_C(0) = 2V$ است، $i(t)$ را ترسیم کنید.

می‌بینیم که $\alpha = R/2L = 1000s^{-1}$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20{,}025$ rad/s است. این مقادیر نشان می‌دهند که پاسخ زیرمیرا است. بنابراین ω_d را محاسبه می‌کنیم که 20000 rad/s است. به‌جز ثابت‌های اختیاری پاسخ معلوم است:

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1 \cos 20{,}000t + B_2 \sin 20{,}000t)$$

چون می‌دانیم که $i(0) = 2mA$ است، آن را در معادله $i(t)$ قرار می‌دهیم تا $B_1 = 0.002$ A به‌دست آید و بنابراین:

$$i(t) = e^{-1000t}(0.002 \cos 20{,}000t + B_2 \sin 20{,}000t) \text{ A}$$

و تنها مقدار اولیه باقیمانده باید به مشتق اعمال شود. پس:

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t}(-40 \sin 20{,}000t + 20{,}000B_2 \cos 20{,}000t$$
$$- 2 \cos 20000t - 1000B_2 \sin 20{,}000t)$$

و

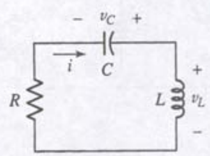
$$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 20{,}000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)\ Ri(0)}{L} = \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2 \text{ A/s}$$

پس:

$$B_2 = 0$$

بنابراین پاسخ مطلوب چنین است:

$$i(t) = 2e^{-1000t} \cos 20{,}000t \text{ mA}$$



شکل ۹ـ۲۲ یک مدار RLC بدون منبع با ذخیره انرژی در هر دو عنصر خازن و القاگر در $t = 0$.

بسیاری از سردرگمی‌ها در تعیین و اعمال مقادیر اولیه به این علت است که مجموعه قوانین ثابتی برای دنبال‌کردن نداریم. در هر تحلیل به جایی می‌رسیم که هر مسئله طرز تفکر خاصی را می‌طلبد. این مطلب همواره منبع اصلی مشکلات است.

بخش ساده

پاسخ ساده یک سیستم مرتبه دوم متشکل از یک پاسخ واداشته زیر

$$v_f(t) = V_f$$

که برای محرک‌های dc مقداری ثابت است و یک پاسخ طبیعی به فرم

$$v_n(t) = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

به‌دست می‌آید. پس

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$$

فرض می‌کنیم که s_1، s_2 و V_f از روی مدار و توابع تحریک مفروض معین شده و فقط A و B باقی مانده است. آخرین معادله وابستگی درونی A، B، v و t را نشان می‌دهد و جایگزینی مقادیر معلوم v در $t = 0^+$ معادله دیگری بین A و B به‌دست می‌دهد. یعنی $v(0^+) = V_f + A + B$. تا این جای کار ساده است.

بخش دیگر

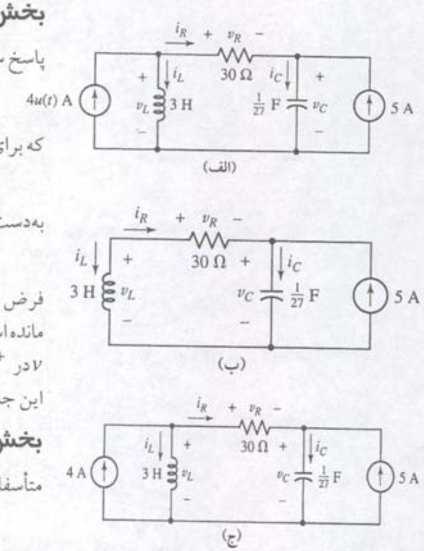
متأسفانه رابطه دیگری بین A و B لازم است که این معمولاً از مشتق به‌دست می‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1Ae^{s_1t} + s_2Be^{s_2t}$$

که در آن مقدار $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$ معلوم است. بنابراین دو معادله موجود است که A و B را به هم ربط می‌دهند و برای محاسبه دو ثابت باید به‌طور همزمان حل شوند.

تنها مسئله باقیمانده تعیین v و $\frac{dv}{dt}$ در $t = 0^+$ است. بیایید فرض کنیم که v همان ولتاژ خازن، v_C، باشد. چون $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$ است، باید رابطه‌ای بین مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ با یک مقدار اولیه جریان خازن وجود داشته باشد. اگر بتوانیم برای این جریان اولیه خازن مقداری را بیابیم، آنگاه به‌طور خودکار مقدار $\frac{dv}{dt}$ معین خواهد شد. دانشجویان معمولاً به راحتی $v(0^+)$ را می‌یابند ولی در یافتن مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ مشکل دارند. اگر پاسخ موردنظر جریان القاگر i_L باشد، باید $\frac{di_L}{dt}$ را به مقدار اولیه ولتاژ القاگر ربط دهیم. برای متغیرهای دیگر، به‌جز ولتاژ خازن و جریان القاگر، باید مقدار اولیه و مشتق آن‌ها را برحسب مقادیر متناظر v_C و i_L بیان کنیم.

با تحلیل دقیق شکل ۹ـ۲۸ و یافتن مقادیر فوق روش را شرح خواهیم داد. برای سهولت تحلیل، دو مرتبه یک خازن بزرگ غیرواقعی را به کار می‌بریم.



شکل ۹ـ۲۸ (الف) یک مدار RLC سری که برای نشان‌دادن تعیین شرایط اولیه به‌کار رفته است. پاسخ مطلوب $v_C(t)$ فرض شده است، (ب) $t = 0^-$ و (ج) $t > 0$.

مثال ۹ـ۹

در شکل ۹ـ۲۸ (الف) سه عنصر غیرفعال وجود دارند که برای هرکدام ولتاژ و جریانی تعریف شده است. مقدار این شش کمیت را در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ بیابید.

هدف یافتن مقدار جریان و ولتاژ در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ است. با این کمیت‌ها مقادیر اولیه مشتق‌ها به سادگی یافت می‌شود. ابتدا روش منطقی گام‌به‌گام را برمی‌گزینیم.

۱. $t = 0^-$. تنها جریان سمت راست منبع مطابق شکل ۹ـ۲۸ (ب) فعال است. فرض بر این است‌که مدار برای مدت‌ها در این حالت بوده است و همه ولتاژها و جریان‌ها ثابت باشند. بنابراین برای عبور یک جریان dc در القاگر ولتاژ در دو سر آن باید صفر باشد:

$$v_L(0^-) = 0$$

همچنین وجود ولتاژ dc در دو سر خازن ($-v_R$) مستلزم جریان صفر در خازن است:

$$i_C(0^-) = 0$$

در بررسی مدار در $t = 0^-$، دقت کنید که به دلیل وجود خازن $i_L(0^-) = 0$ است. بنا به قانون اهم $i(0^-) = 5\ A$، پس:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5\ V$$

از قراردادن این رابطه در معادله (۳۲) داریم $B_1 = -5\ V$. با مشتق‌گیری از معادله (۳۲) و ارزیابی در $t = 0$ داریم:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \qquad (۳۳)$$

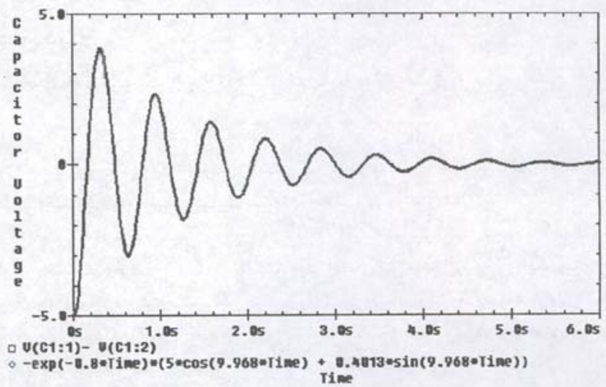
از شکل ۲۵ـ۹ (الف) داریم:

$$i = -C\frac{dv_C}{dt}$$

بنابراین با استفاده از $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$ در معادله (۳۳) داریم $B_2 = -0.4013\ V$ و لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5\cos 9.968t + 0.4013\sin 9.968t)\ V, \quad t > 0$$

حل PSpice این مدار در شکل ۲۶ـ۹ دیده می‌شود که تحلیل ما را تأیید می‌کند.

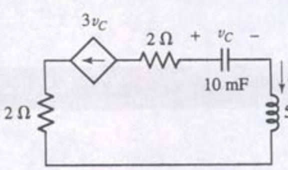


شکل ۲۶ـ۹ شبیه‌سازی PSpice مدار شکل ۲۵ـ۹ (الف). هر دو منحنی تحلیل و شبیه‌سازی بر هم منطبق شده‌اند.

تمرین

۸ـ۹ عبارتی برای $i_L(t)$ در مدار شکل ۲۷ـ۹ که در $t > 0$ معتبر باشد با شرط $v_C(0^-) = 10\ V$ و $i_L(0^-) = 0$ پیدا کنید. توجه کنید که هر چند اِعمال تکنیک‌های تونن در این مثال مفید نیست، عمل منبع وابسته v_C و i_L را چنان به هم مربوط می‌کند که نتیجه یک معادله خطی دیفرانسیل است.

جواب: $i_L(t) = -30e^{-300t}\ A$، $t > 0$



شکل ۲۷ـ۹ مدار برای تمرین ۸ـ۹.

۶ـ۹ پاسخ کامل مدار RLC

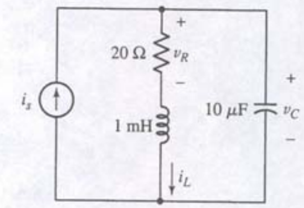
اکنون آن دسته از مدارهای RLC را ملاحظه می‌کنیم که به آن‌ها منابع dc وصل شده و پاسخ واداشته تولیدی لزوماً با گذشت زمان مستهلک نمی‌شود. روش کلی حل، همان روشی است که در مدارهای RL و RC دیدیم؛ یعنی پاسخ واداشته به‌طور کامل به‌دست‌آمد، پاسخ طبیعی به صورت مناسبی با تعدادی ثابت‌های اختیاری فراهم شد، و پاسخ کامل به شکل حاصل‌جمع پاسخ واداشته و طبیعی درآمد، و سپس مقادیر اولیه معین و به پاسخ کامل اعمال گشت تا مقادیر ثابت تعیین شوند. این آخرین مرحله‌ای است که اغلب برای دانشجویان مشکل‌ساز می‌باشد. درنتیجه، هرچند مقادیر اولیه اساساً فرقی برای منابع dc و مدارهای بی‌منبع ندارد ولی در مثال‌های زیر این مطلب را با تأکید بیشتر دنبال خواهیم کرد.

مسائلی از این قماش در فصل ۳ حل شدند و چیز جدیدی در این‌جا نداریم. ابتدا با پرداختن به جریان، از گره بالای سمت چپ آغاز می‌کنیم و می‌بینیم که $i_R(0^+) = 4 - 5 = -1\ A$ است. با توجه به گره سمت راست بالا داریم $i(0^+) = -1 + 5 = 4A$ و البته $i_L(0^+) = 5A$ می‌باشد. حال به سراغ ولتاژها می‌رویم. با استفاده از قانون جریان اهم می‌بینیم که $v_R(0^+) = 30(-1) = -30V$ است. در القاگر، از KVL داریم $v_L(0^+) = -30+150 = 120V$. بالاخره با $v(0^+) = 150V$، همه مقادیر را در $t = 0^+$ در اختیار داریم.

تمرین

۹ـ۹ بگذارید در شکل ۳۰ـ۹، $i_s = 10u(-t) - 20u(t)\ A$ باشد. مطلوبست (الف) $i_L(0^-)$، (ب) $v_C(0^+)$، (ج) $v_R(0^+)$، (د) $i_L(\infty)$ و (ه) $i_L(0.1\ ms)$.

جواب: 10A، 200V، 200V، 20A- و 2.07A.



شکل ۳۰ـ۹

مثال ۱۰ـ۹

در مدار شکل ۲۸ـ۹ که در شکل ۳۱ـ۹ تکرار شده در $t = 0^+$ مقادیر اولیه را برای مشتق سه ولتاژ و سه جریان معین نمایید.

با دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی آغاز می‌کنیم. برای القاگر

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

و به خصوص که:

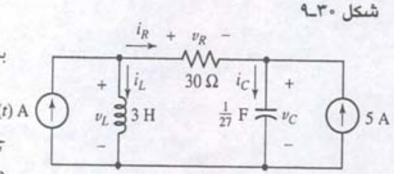
$$v_L(0^+) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$$

بنابراین:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40\ A/s$$

به‌طور مشابه:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108\ V/s$$



شکل ۳۱ـ۹ مدار شکل ۲۸ـ۹ برای مثال ۱۰ـ۹.

چهار مشتق دیگر را با این فرض که KVL و KCL برای مشتق نیز صادقند معین می‌کنیم. مثلاً در گره سمت چپ در شکل ۳۱ـ۹ داریم:

$$4 - i_L - i_R = 0 \qquad t > 0$$

و سپس:

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \qquad t > 0$$

بنابراین:

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -40\ A/s$$

به همین ترتیب سه مشتق باقیمانده به صورت زیرند:

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -1200\ V/s$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+} = -1092\ V/s$$

و

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+} = -40\ A/s$$

قبل از این‌که موضوع تعیین مقادیر اولیه را رها کنیم، باید متذکر شویم که حداقل یک روش قوی دیگر هم وجود دارد که از آن گذشته‌ایم: می‌توانستیم معادلات کلی گرهی یا حلقوی را برای مدار اصلی بنویسیم. سپس می‌توانستیم مقادیر معلوم ولتاژ القاگر و جریان خازن را در $t = 0^-$ جایگزین کرده و چندین مقدار دیگر از پاسخ را در $t = 0^-$ معین نماییم و به این ترتیب بقیه به راحتی به‌دست‌آمدند. پس از آن تحلیلی مشابه در $t = 0^+$ می‌باید انجام می‌شد. این روش خیلی مهم است و در مدارهای پیچیده‌ای که روش‌های ساده گام‌به‌گام امکان‌پذیر نیست،

در گام بعدی قانون جریان کیرشهف را به سمت راست گره اعمال می‌نماییم تا:

$$i_R(0^-) = -5\ A$$

که منجر می‌شود به:

$$v_R(0^-) = -150V$$

اکنون قانون ولتاژ کیرشهف را حول حلقه سمت چپ به کار می‌بریم تا رابطه زیر حاصل شود:

$$v_C(0^-) = 150V$$

ضمن این‌که قانون جریان کیرشهف در القاگر جریان آن را مشخص می‌نماید.

$$i_L(0^-) = 5A$$

گرچه مشتقات در $t = 0^-$ برای ما اهمیتی ناچیز دارند ولی در هر صورت به علت نبود وضعیت گذرا همه آن‌ها صفرند.

۲. $t = 0^+$. در فاصله زمانی $t = 0^-$ و $t = 0^+$، منبع جریان سمت چپ فعال می‌شود و بسیاری از جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^-$ ناگهان عوض می‌شوند. مدار مربوطه در شکل ۲۸ـ۹ (ج) نشان داده شده است. با این وجود، ما توجه خود را روی **کمیت‌هایی متمرکز می‌کنیم که نتواند تغییر کند، از آن جمله می‌توان جریان القاگر و ولتاژ خازن را نام برد.** هر دو کمیت فوق در فاصله زمانی کلیدزنی ثابت می‌مانند، پس:

$$i_L(0^+) = 5\ A \quad و \quad v_C(0^+) = 150\ V$$

چون اکنون دو جریان در گره سمت چپ داریم، آن‌گاه:

$$i_R(0^+) = -1\ A \quad و \quad v_R(0^+) = -30\ A$$

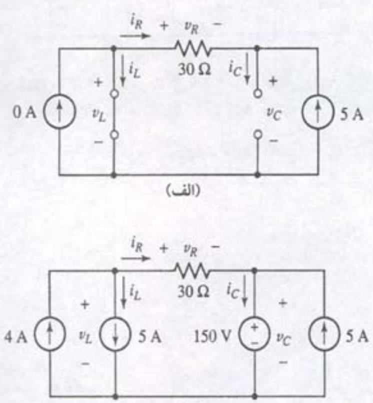
$$i_C(0^+) = 4\ A \quad و \quad v_L(0^+) = 120\ V$$

به این ترتیب شش مقدار در $t = 0^-$ و شش مقدار در $t = 0^+$ داریم. از میان این شش مقدار اخیر تنها ولتاژ دو سر خازن و جریان القاگر با مقادیر حاکم در $t = 0^-$ تفاوت ندارند.

می‌توانستیم روشی مختصر و متفاوت برای ارزیابی این جریان‌ها و ولتاژها در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ را هم برگزینیم. قبل از عمل کلیدزنی تنها ولتاژها و جریان‌های ثابت در مدار برقرارند. بنابراین می‌توان القاگر را با اتصال کوتاه و خازن را با مدار باز جایگزین کرد. مدار شکل ۲۸ـ۹ (الف) بر این اساس دوباره در شکل ۲۹ـ۹ (الف) ترسیم شده است. در سمت راست تنها منبع جریان فعال است که مقدار آن هم 5A است و در مقاومت و القاگر جاری است. بنابراین $i_R(0^-) = -5A$، $v_R(0^-) = -150V$، $i_L(0^-) = 5A$، $v_C(0^-) = 0$، $i_C(0^-) = 0$ و $v_C(0^-) = 150V$ خواهند بود.

اکنون به ترسیم مدار معادل مسئله می‌پردازیم که در تعیین چند ولتاژ و جریان در $t = 0^+$ ما را یاری می‌نماید. هر **ولتاژ خازن و جریان القاگر در زمان کلیدزنی باید ثابت بماند.** برای تضمین این شرایط القاگر را با منبع جریان و خازن را با منبع ولتاژی جایگزین می‌کنیم. هر منبع در حین انفصال سعی در ثابت نگه‌داشتن پاسخ دارد. مدار معادل شکل ۲۹ـ۹ (ب) به این ترتیب به‌دست‌می‌آید. توجه کنید که **مدار شکل ۲۹ـ۹ (ب) تنها بین فاصله 0^- و 0^+ معتبر است.**

ولتاژها و جریان‌ها با تحلیل این مدار dc در $t = 0^+$ معین می‌شوند. حل چندان مشکل نیست ولی تعداد نسبتاً زیاد منابع در شبکه، ظاهری نامأنوس به آن داده است. با این وجود

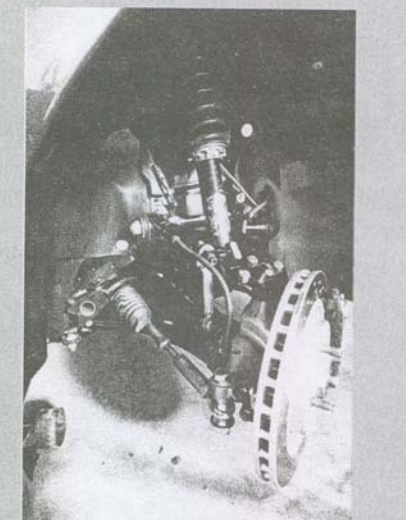


شکل ۲۹ـ۹ (الف) مدار ساده‌ای که در $t = 0^-$ با مدار شکل ۲۸ـ۹ (الف) معادل است. (ب) مدار معادل دیگری برای مدار شکل ۲۸ـ۹ (الف) که در فاصله $t = 0^-$ تا $t = 0^+$ اعتبار دارد.

کاربرد عملی

مدل‌سازی سیستم تعلیق خودکار

در مقدمه گفتیم که مفاهیم مورد بحث در این فصل فراتر از تحلیل یک مدار الکتریکی است. در واقع فرم کلی معادلات دیفرانسیلی که ما با آن‌ها سروکار داریم به زمینه متفاوتی مرتبط است. کافی است که بدانیم چگونه هر پارامتر جدید را ترجمه کنیم. مثلاً سیستم تعلیق (کمک‌فنر) اتومبیلی را که در شکل ۳۲ـ۹ دیده می‌شود درنظربگیرید. پیستون به سیلندر وصل نشده است ولی به فنر و چرخ متصل می‌باشد. بنابراین قسمت‌های متحرک عبارتنداز: فنر، پیستون و چرخ.



شکل ۳۲ـ۹ نمونه سیستم تعیق خودکار.

ما ابتدا این سیستم فیزیکی را با درنظرگرفتن نیروهای درگیر مدل‌سازی می‌کنیم. با تعریف تابع پیستون $p(t)$ که به ما می‌گوید پیستون در کجا قرار گرفته است، می‌توانیم نیروی وارده به فنر F_S را بنویسیم:

$$F_S = K\ p(t)$$

که در آن K به عنوان ثابت فنر شناخته می‌شود و واحد lb/ft را دارد. نیروی F_W وارده بر چرخ برابر با جرم چرخ در شتاب آن است. یا:

$$F_W = m\ \frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

که در آن m برحسب $lb.s^2/ft$ اندازه‌گیری می‌شود. آخرین و نه تنها نیروی اصطکاک F_f که روی پیستون عمل می‌کند عبارت‌است‌از $F_f = \mu_f \frac{dp(t)}{dt}$ که μ_f ضریب اصطکاک و واحد آن lb.s/ft است. بر اساس فیزیک پایه می‌دانیم که جمع همه نیروهای وارده بر سیستم باید صفر باشد. بنابراین:

$$\frac{md^2p(t)}{dt^2} + \mu_f \frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \qquad (۳۴)$$

این معادله در طول فعالیت‌های آکادمیک باید یک بار ما را به زحمت بیاندازد ولی نه بیشتر.

با مقایسه معادله (۳۲) با معادلات (۳۰) و (۳۱) بلافاصله ملاحظه می‌شود که حداقل به فرم کلی‌اش یک همانندی وجود دارد. با انتخاب معادله (۳۰) که مدار RLC سری را توصیف می‌کند، ارتباطات زیر را مشاهده می‌کنیم:

L	القاکنایی	⟶	m	جرم
R	مقاومت	⟶	μ_f	ضریب اصطکاک
C^{-1}	عکس ظرفیت	⟶	K	ثابت فنر
$i(t)$	متغیر جریان	⟶	p(t)	متغیر مکان

درنتیجه اگر مایلیم به‌جای آمپر، از فوت صحبت کنیم. باید از $lb.s^2/ft$ در عوض H، از ft/lb به‌جای F و lb.s/ft به‌جای Ω استفاده کنیم، آن‌گاه کار مدل‌سازی مدار RLC را به ارزیابی سیستم ضربه‌گیر خودکار تبدیل نموده‌ایم. به چرخ نمونه 70 lb نظر بیاندازید. جرم از تقسیم وزن بر شتاب جاذبه زمین ($32.17\ ft/s^2$) به‌دست‌می‌آید. درنتیجه $m = 2.176\ lb.s^2/ft$ خواهد شد. وزن کل اتومبیل، 1985 lb است و جابه‌جایی استاتیک فنر 4 اینچ می‌باشد (بدون مسافر). ثابت فنر از تقسیم وزن روی هر ضربه‌گیر بر جابه‌جایی آن حاصل می‌شود، بنابراین:

$$K = (\frac{1}{4})(1985)(3ft^{-1}) = 1489\ lb/ft$$

خواهد بود. فرض بر این‌است‌که ضریب اصطکاک مجموعه پیستون/سیلندر 65 lb.s/ft باشد. بنابراین می‌توانیم سیستم ضربه‌گیر را با یک مدار RLC با $R = 65\Omega$، $L = 2.176H$ و $C= K^{-1} = 671.6\ \mu F$ مدل‌سازی نماییم. فرکانس تشدید ضربه‌گیر $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16\ rad/s$ و ضریب میرایی $\alpha = \frac{R}{2L} = 14.94\ s^{-1}$ است. چون $\alpha < \omega_0$ است، ضربه‌گیر ما سیستمی زیرمیرا است. این بدان معنی است که اگر از روی چاله‌ای عبور کنیم، سیستم یک یا دو نوسان خواهد کرد. در مواردی که ضربه‌گیر یا درواقع کمک‌فنر سفت باشد (ضریب فنر بیشتر و یا در سیستم ما مقاومت بزرگ‌تر) برای پیمودن پیچ‌ها با سرعت زیاد مناسب‌تر است زیرا پاسخ فوق میرا به همراه دارد.

در هر حال اگر بیشتر رانندگی روی مسیر ناهموار باشد، مختصر پاسخ زیرمیرا ترجیح داده می‌شود.

باید از آن استفاده نمود. حال بگذارید تعیین پاسخ $v_C(t)$ را برای مدار اصلی شکل ۳۱ـ۹ به اتمام برسانیم. اگر هر دو منبع را بکُشیم، مدار به صورت RLC سری در آمده و به راحتی s_1 و s_2 به ترتیب برابر 1- و 9- به‌دست خواهند آمد. پاسخ واداشته را با وارسی و یا در صورت لزوم با رسم معادل dc می‌توان به دست آورد که مشابه شکل ۲۹ـ۹ (الف) ولی یک منبع جریان 4A در آن اضافی است. پاسخ واداشته 150V است. بنابراین:

$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B \quad \text{و} \quad v_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

یا

$$A + B = 0$$

سپس

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

بالاخره

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})\ V \quad \text{و} \quad A = 13.5 \quad B = -13.5$$

مروری سریع بر روند حل

به طور خلاصه اگر بخواهیم رفتار گذرای یک مدار RLC را معین کنیم، اول باید ببینیم که مدار سری است یا موازی تا بتوانیم رابطه α صحیحی را برگزینیم. دو معادله عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (\text{موازی RLC})$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (\text{سری RLC})$$

تصمیم دوم پس از مقایسه α و ω_0 اتخاذ می‌شود که برای هر دو مدار داریم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اگر $\alpha > \omega_0$ باشد مدار فوق میرا است و

$$f_n(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

اگر $\alpha = \omega_0$ باشد مدار میرای بحرانی است و

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$$

و بالاخره اگر $\alpha < \omega_0$ باشد با پاسخ زیرمیرا مواجهیم:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

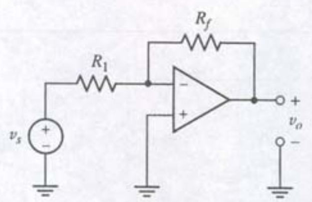
که در آن $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ است.

مرحله آخر در کار ما به منابع مستقل مربوط است. اگر پس از تغییر حالت کلید، منبعی در مدار نباشد، مدار بی‌منبع است و پاسخ طبیعی، کل پاسخ خواهد بود. در صورتی که پس از تغییر هنوز منابع مستقل در مدار موجود باشند، آنگاه مدار تحریک شده و باید پاسخ واداشته را به‌دست‌آوریم. بنابراین پاسخ کامل از جمع زیر حاصل می‌شود:

$$f(t) + f_f(t) + f_n(t)$$

این رابطه به هر دو کمیت جریان یا ولتاژ قابل اعمال است. گام نهایی تعیین ثابت‌ها با فرض مقادیر اولیه است.

منفی اولین مشتق به‌عنوان ورودی به انتگرال‌گیر دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین خروجی آن $v(t)$ و مقدار اولیه آن $v(0) = 0$ است. برای یافتن مشتق دوم کافی است v را در 9- ضرب کرده آن را در نقطه A تصور نماییم. این عمل تقویت به میزان 9 برابر با تغییر علامت و به وسیله یک تقویت‌کننده معکوس‌گر انجام می‌شود.



شکل ۳۵ـ۹ تقویت‌کنندهٔ عملیاتی معکوس‌گر با بهرهٔ $v_o/v_s = -R_f/R_1$. op amp ایده‌آل است.

شکل ۳۵ـ۹ چنین تقویت‌کننده‌ای را نشان می‌دهد. برای op amp ایده‌آل هر دو ولتاژ و جریان در ورودی صفر هستند. بنابراین جریان در یک جهت R_1 برابر v_s/R_1 و در R_f در جهت دیگر برابر v_o/R_f است. چون مجموع آن‌ها صفر است پس:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_f}{R_1}$$

برای طراحی بهره 9- کافی است مثلاً $R_f = 90k\Omega$ و $R_1 = 10k\Omega$ را در نظر بگیریم.

اگر در هر انتگرال R برابر با $1M\Omega$ و C برابر با $1\mu F$ باشد، داریم:

$$v_o = -\int_0^t v_s\,dt' + v_o(0)$$

اکنون خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی مفروض A است و آرایش شکل ۳۶ـ۹ را می‌دهد. اگر کلید سمت چپ در $t = 0$ بسته باشد، ضمن آنکه کلیدهای مقادیر اولیه در همان زمان، خروجی انتگرال‌گیر دوم موج سینوسی نامیرای $v = 2 \sin 3t$ V می‌باشد.

توجه کنید که هر دو مدار LC در شکل ۳۴ـ۹ و op amp در شکل ۳۶ـ۹ دارای خروجی یکسانند، ولی مدار op amp فاقد القاگر است. ولی طوری عمل می‌کند که گویی حاوی القاگری است تا یک ولتاژ سینوسی مناسبی بین پایانه خروجی و زمین به‌وجودآید. این کار می‌تواند نوعی مزیت عملی و اقتصادی در طراحی مدار باشد زیرا القاگرها معمولاً حجیم بوده و از خازن‌ها گران‌ترند و اتلاف بیشتری نیز در آن‌ها داریم (بنابراین نمی‌توان آن‌ها را به خوبی مدل‌سازی کرد).

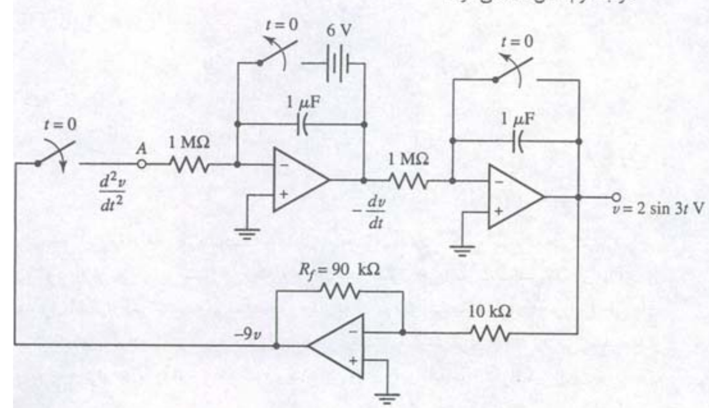
تمرین

۱۱ـ۹ در شکل ۳۶ـ۹ مقدار R_f و مقادیر اولیه چه باشند تا ولتاژ خروجی شکل ۳۶ـ۹ نمایش‌دهنده $v(t)$ در شکل ۳۷ـ۹ باشد.

جواب: 250kΩ، 400 V و 10 V.

۸ـ۹ خلاصه فصل و مرور

■ هر مدار حاوی دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی غیر قابل ترکیب سری/موازی با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نشان داده می‌شود.



شکل ۳۶ـ۹ دو انتگرال‌گیر و یک تقویت‌کنندهٔ معکوس‌گر که برای حل معادلهٔ دیفرانسیل $d^2v/dt^2 = -9v$ به هم متصل شده‌اند.

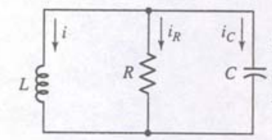
شده است. مطلوبست (الف) مقدار C، (ب) مقدار R را برای داشتن یک ضریب میرایی نمایی $5Gs^{-1}$، (ج) فرکانس نپری مدار، (د) s_1 و s_2 و (ه) ضریب میرایی مدار.

۸. نشان دهید که اگر $L = 4R^2C$ باشد، معادله $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$ حلی برای معادله (۴) است. اگر $v(0) = 16V$ و $\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = 4$ باشد، A_1 و A_2 را به‌دست‌آورید.

۹. یک سیم مسی نمره 18 به‌طول 5m به عنوان مقاومت در تمرین ۱ـ۹ به‌کار رفته است. (الف) فرکانس تشدید مدار جدید را به‌دست‌آورید. (ب) فرکانس نپر مدار جدید چقدر است. (ج) درصد تغییرات در ضریب میرایی چیست؟

۹ـ۲ مدار RLC موازی فوق میرا

۱۰. در مدار شکل ۹ـ۳۹، فرض کنید $L = 5H$، $R = 8\Omega$، $C = 12.5mF$ و $v(0^+) = 40V$ باشد. مطلوبست (الف) $v(t)$ به‌شرطی‌که $i(0^+) = 8A$ باشد. (ب) $i(t)$ اگر $i_C(0^+) = 8A$ باشد.



شکل ۹ـ۳۹

۱۱. در شکل ۹ـ۳۹ فرض کنید $i(0) = 40A$ و $v(0) = 40V$ باشد. اگر $L = 12.5mH$، $R = 0.1\Omega$ و $C = 0.2F$ باشد. (الف) $v(t)$ را به‌دست‌آورید و (ب) i را در فاصله زمانی $0 < t < 0.3s$ رسم کنید.

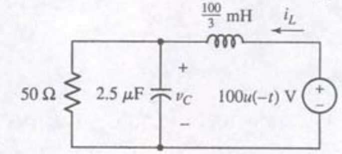
۱۲. مدار شکل ۹ـ۳۹ با استفاده از $R = 20\ m\Omega$، $C = 50\ mF$ و $L = 2\ mH$ ساخته شده است. مطلوب است عبارتی برای $i_R(t)$ معتبر در $t > 0$ به شرطی که $v(0^+) = 0$ و $i(0^-) = 2\ mA$ باشد. (ب) حل خود را در محدوده $0 < t < 500\ ms$ رسم کنید. (ج) مدار را با PSpice شبیه‌سازی نمایید. آن را به‌طور مناسبی در نقاط مختلف نام‌گذاری کنید. آیا نتیجه شبیه‌سازی با تحلیل یکی است؟

۱۳. در مدار شکل ۹ـ۳۹، فرض کنید $i(0) = 40\ A$ و $v(0) = 40\ V$ باشد. اگر $L = 12.5\ mH$، $R = 0.1\ \Omega$ و $C = 0.2\ F$ باشد: (الف) $v(t)$ را بیابید. (ب) i را برای $0 < t < 0.3\ s$ رسم نمایید.

۱۴. مقادیر $R = 15\ \mu\Omega$، $C = 50\ \mu F$ و $L = 2\ \mu H$ در مدار شکل ۹ـ۳۹ به کار رفته‌اند. (الف) عبارتی برای $i_C(t)$ معتبر در $t > 0$ بیابید به شرطی که $v(0^+) = 2$ و $i(0^-) = 0$ باشد. (ب) حل خود را در محدوده $0 < t < 5\ ns$ رسم نمایید. (ج) مدار را با PSpice رسم نمایید، آن را نام‌گذاری نمایید. آیا حل تحلیلی با شبیه‌سازی توافق دارد.

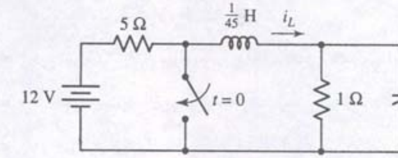
۱۵. برای مدار شکل ۹ـ۳۹، $R = 1\ \Omega$، $C = 4\ F$ و $L = 20\ H$ است. شرایط اولیه عبارتند از $i(0) = 8\ A$ و $v(0) = 0\ V$. (الف) یک عبارت برای $v(t)$، در $t > 0$ پیدا کنید. (ب) مقدار پیک و زمان رخداد آن را معین نمایید. (ج) تحلیل خود را با نتیجه PSpice مقایسه نمایید. آن را نام‌گذاری کنید.

۱۶. عبارتی برای $i(t)$ در مدار شکل ۹ـ۴۰ بیابید به نحوی که در همه زمان‌های t معتبر باشد.



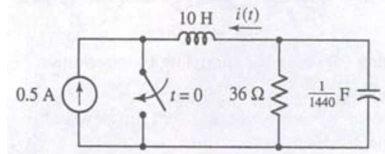
شکل ۹ـ۴۰

۱۷. در شکل ۹ـ۴۱، $i_L(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.



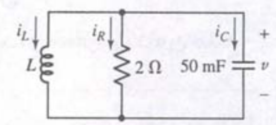
شکل ۹ـ۴۱

۱۸. مدار شکل ۹ـ۴۲ مدت‌ها در همین وضع قرار داشته است. پس از بسته‌شدن کلید در $t = 0$ (الف) مطلوبست $v(t)$ (ب) $i(t)$ و (ج) زمان نشست برای $v(t)$.



شکل ۹ـ۴۲

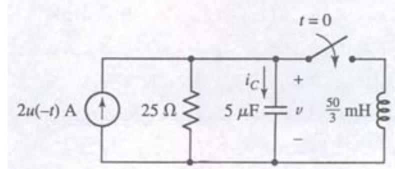
۱۹. برای مدار شکل ۹ـ۴۲، مقدار القاکنایی 1250mH است. اگر بدانیم که خازن از ابتدا 390J انرژی را ذخیره کرده است و القاگر هیچ انرژی اولیه نداشته است، مطلوبست $v(t)$.



شکل ۹ـ۴۳

۲۰. (الف) با مراجعه به شکل ۹ـ۴۳، چه مقداری از L پاسخ گذرای $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$ را تولید می‌کند. (ب) اگر $i_R(0^+) = 10A$ و $i_C(0^+) = 15A$ باشند، A و B را به‌دست‌آورید.

۲۱. کلید در مدار شکل ۹ـ۴۴ از مدت‌ها قبل باز است. (الف) $v_C(0^+)$، (ب) $i_C(0^+)$، (ج) $v_C(t)$ را به‌دست‌آورید. (د) $v_C(t)$ را رسم کنید. (ه) t را وقتی $v_C(t) = 0$ است معین کنید.



شکل ۹ـ۴۴

۹ـ۱۰ فرض کنید در شکل ۹ـ۳۳، $v_s = 10 + 20u(t)\ V$ باشد. مطلوبست (الف) $i_L(0)$، (ب) $v_C(0)$، (ج) i_{Lf} و (د) $i_L(0.1s)$.

جواب: 0.2A، 10V، 0.6V و 0.319V.

۹ـ۷ مدار LC بدون اتلاف

اگر مقاومت مدار RLC موازی بی‌نهایت شود، و یا در مدار RLC مقدار آن صفر گردد، مدار ساده LC حلقوی حاصل می‌شود که در آن پاسخی نوسانی تا ابد باقی خواهند ماند. بگذارید نگاهی مختصر به چنین مداری بنماییم و سپس پاسخی مشابه را بدون نیاز به القاگر ملاحظه کنیم.

مدار بی‌منبع شکل ۹ـ۳۴ را درنظر بگیرید که در آن مقادیر بزرگ $L = 4H$ و $C = \frac{1}{36}F$ برای سادگی محاسبات انتخاب شده‌اند. فرض می‌کنیم $i(0) = -\frac{1}{6}A$ و $v(0) = 0$ باشد. در این صورت $\alpha = 0$ و $\omega_0^2 = 9s^{-1}$ و بنابراین $\omega_d = 3\ rad/s$ خواهند بود. در غیاب میرایی نمایی، ولتاژ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$v = A\cos 3t + B\sin 3t$$

چون $v(0) = 0$ است، پس $A = 0$ می‌باشد. همچنین:

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

از طرفی $i(0) = \frac{1}{6}A$ بوده و بنابراین $\frac{dv}{dt} = 6\ V/s$ در $t = 0$ می‌باشد. در این صورت $B = 2V$ است و بنابراین داریم:

$$v = 2\sin 3t\ V$$

که پاسخی سینوسی و نامیرا است. به بیان دیگر پاسخ ولتاژ میرا نیست.

اکنون ببینیم چگونه می‌توان این مدار را بدون استفاده از یک LC به‌دست‌آورد. می‌خواهیم معادلات دیفرانسیلی بنویسیم که v در آن صدق کند و سپس آن را با op amp پیاده کنیم تا حل معادله را تولید کند. گرچه ما در این‌جا مثال خاصی را حل می‌کنیم ولی مثال کلی است و می‌توان آن را برای هر معادله دیفرانسیل همگن خطی به‌کاربرد.

برای مدار LC شکل ۹ـ۳۴، v را به‌عنوان متغیر تصور کرده و مجموع جریان‌های خازنی و القاگر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

داریم:

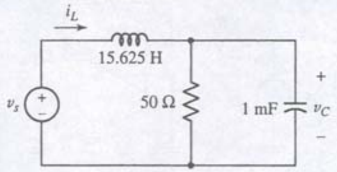
$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

یا

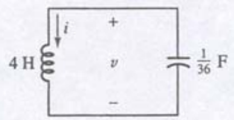
$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

برای حل این معادله از تقویت‌کننده عملیاتی به‌عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌شود بالاترین مرتبه مشتق در معادله $\frac{d^2v}{dt^2}$ باشد. اکنون طبق بحث بخش ۵ـ7 از op amp به‌عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌نماییم. ورودی به آن در نقطه‌ای مانند A، $\frac{d^2v}{dt^2}$ و خروجی $\frac{-dv}{dt}$ است، که تغییر علامت در آن به علت استفاده از آرایش معکوس‌گری op amp می‌باشد. مقدار اولیه $\frac{dv}{dt}$ برابر 6 V/s فرض می‌شود و بنابراین ولتاژ 6- را باید در انتگرال‌گیر ایجاد کرد. حال

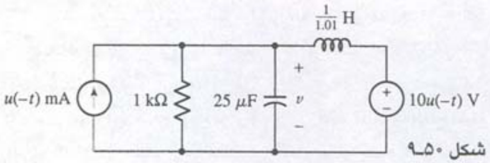
تمرین



شکل ۹ـ۳۳

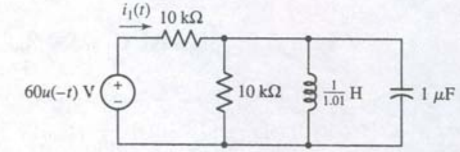


شکل ۹ـ۳۴ این مداری بدون اتلاف است و پاسخ نامیرای $v = 2\sin 3tV$ را ایجاد می‌کند به‌شرطی‌که $v(0) = 0$ و $i(0) = -\frac{1}{6}A$ باشد.



شکل ۹ـ۵۰

۳۷. در شکل ۹ـ۵۱، $i_1(t)$ را در $t > 0$ به‌دست‌آورید.



شکل ۹ـ۵۱

۳۸. به جای مقاومت 25Ω در شکل ۹ـ۴۴ حداقل مقاومت چه باشد تا پاسخ $v(t)$ زیرمیرا باشد. مقاومت خود را در 1000 ضرب کنید و پاسخ را بکشید. به کمک PSpice زمان نشت را معین نمایید و برچسب‌های مناسب را روی نمودار خود نصب کنید.

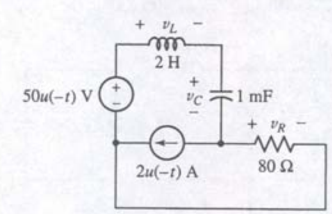
۳۹. مقدار R را برای مدار شکل ۹ـ۱۴ معین کنید ($L = 7H$، $C = \frac{1}{42}F$)، $i(0) = 10A$ و $v(0) = 0$ به نحوی که زمان نشت t_s در آن حداقل شود. مقدار t_s چقدر است؟

۴۰. (الف) مقاومت 2Ω شکل ۹ـ۴۶ را با یک مقاومت 5Ω تعویض کنید. عبارتی برای $i_L(t)$ به‌دست‌آورید و آن را برای $t = 2.5s$ حل کنید. (ب) مقاومت 2Ω را این بار با 0.5Ω تعویض کنید. عبارتی برای $i_L(t)$ بیابید و آن را برای $t = 250ms$ حل نمایید. (ج) مدارهای بخش (الف) و (ب) را شبیه‌سازی کنید و جریان القاگر را در هر یک از آن‌ها روی همان نمودار رسم نمایید. برای هر کدام برچسب‌های لازم را فراهم کنید.

۴۱. (الف) با PSpice مدار شکل ۹ـ۴۶ را مدل‌سازی کنید. به‌جای منبع جریان $4u(-t)$، مدار بی‌منبع مناسبی را با مقادیر اولیه برای القاگر و خازن به کاربرید. برچسب‌ها را روی آن بچسبانید. (ب) جریان $i_L(t)$ را با probe رسم کنید و با حل دستی مقایسه نمایید. از probe برای تعیین زمان نشست استفاده کنید.

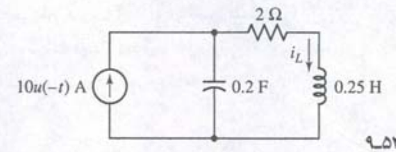
۹ـ۵ مدار RLC سری بی‌منبع

۴۲. v_R، v_C و v_L را در شکل ۹ـ۵۲ برای $t = 40ms$ بیابید.



شکل ۹ـ۵۲

۴۳. $i_L(t)$ را برای $0 < t$ در مدار شکل ۹ـ۵۳ رسم کنید.

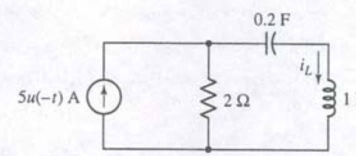


شکل ۹ـ۵۳

۴۴. در مدار شکل ۹ـ۲۱ (الف)، بگذارید $R = 300\Omega$ و $C = 1\mu F$ و مدار در حالت میرای بحرانی باشد. اگر $v_C(0) = -10V$ و $i(0) = -150mA$ باشد. (الف) $v_C(t)$ را بیابید. (ب) $|v_C|_{max}$ و (ج) $v_{C,max}$ را بیابید.

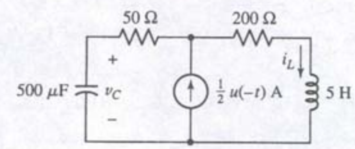
۴۵. دوگان مسئله ۱۶ را در مورد مدار شکل ۹ـ۴۰ به‌دست‌آورید. آن را حل کنید.

۴۶. (الف) $i_L(t)$ را در شکل ۹ـ۵۴ برای $0 < t$ به‌دست‌آورید. (ب) $|i_L|_{max}$ و $i_{L,max}$ را معین کنید.



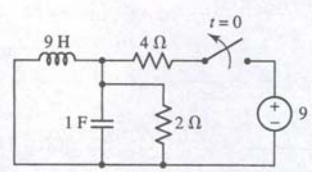
شکل ۹ـ۵۴

۴۷. برای مدار شکل ۹ـ۵۵ و در $0 < t$، (الف) $i_L(t)$ و (ب) $v_C(t)$ را معین کنید.



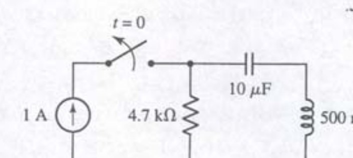
شکل ۹ـ۵۵

۴۸. انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۹ـ۵۶ را در $t = 2s$ به‌دست‌آورید. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۹ـ۵۶

۴۹. کلید در شکل ۹ـ۵۷ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. مقدار اوج ولتاژ دو سر القاگر mH 500 را به‌دست‌آورید و صحت آن را با PSpice تحقیق نمایید.

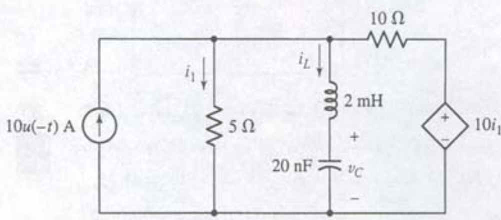


شکل ۹ـ۵۷

۵۰. یک خازن یک بار به یک باطری 12V برای مدت معین وصل شده و سپس روی یک خودروی برف‌روب قرار گرفته است. در حین یک زلزله خفیف یک تلفن قدیمی به زمین افتاده به نحوی که یک طرف آن با یک پایانه خازن اتصال پیدا کرده است. سیم تلفن 14mΩ مقاومت و 5μH القاکنایی دارد و خازن در آغاز 144mJ انرژی را ذخیره کرده است. (الف) ولتاژ خازن قبل از زلزله چیست؟ (ب) ولتاژ خازن 1s بعد از اتصال سیم تلفن به خازن را معین کنید. (ج) یک خرس قطبی خیس به دنبال غذا وارد شده و ناگهان پنجه خود را روی سمت وصل‌نشده تلفن و پای دیگرش را روی سمت باز خازن قرار می‌دهد. بدن خرس برای مدت 18μs به لرزش می‌افتد. مدتی که طول می‌کشد خرس خود را از این وضع رها کند 100ms است. مقاومت پوشش خیس خرس چقدر است؟

۵۱. مقاومتی را به‌جای 2Ω در شکل ۹ـ۵۶ جایگزین کنید که مدار میرای بحرانی باشد. انرژی ذخیره‌شده در مدت $t = 100ms$ در القاگر چقدر است؟

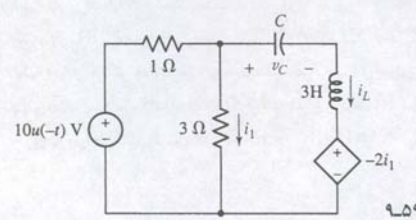
۵۲. عبارتی برای i_L مطابق شکل ۹ـ۵۸ برای $t > 0$ پیدا کنید.



شکل ۹ـ۵۸

۵۳. عبارتی برای v_C مطابق شکل ۹ـ۵۸ برای $t > 0$ پیدا کنید.

۵۴. با مراجعه به شکل ۹ـ۵۹ یک عبارت برای i_L معتبر برای همه زمان‌ها به دست آورید، اگر $C = 1$ F باشد.



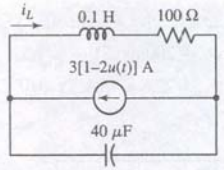
شکل ۹ـ۵۹

۵۵. با مراجعه به شکل ۹ـ۵۹ یک عبارت برای v_C معتبر برای همه زمان‌ها به دست آورید، اگر $C = 1$ mF باشد.

۹ـ۶ پاسخ کامل مدار RLC

۵۶. (الف) $i_L(t)$ را برای همه زمان‌ها در شکل ۹ـ۶۰ به‌دست‌آورید. (ب) در چه لحظه‌ای پس از $t = 0$، $i_L(t) = 0$ است؟

۵۷. منبع مدار شکل ۹ـ۵۳ به $10u(t)A$ تغییر یافته است. $i_L(t)$ را پیدا کنید.

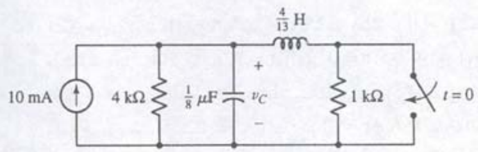


شکل ۹ـ۶۰

۵۸. منبع مدار شکل ۹ـ۵۵ را با $i_s = 0.5[1 - u(t)]A$ عوض کنید و $i_L(t)$ را معین نمایید.

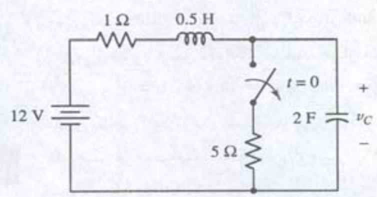
۵۹. منبع شکل ۹ـ۴۷ را با $i_s = 2[1 + u(t)]A$ تعویض کنید و $i_C(t)$ را در $t > 0$ به‌دست‌آورید.

۶۰. (الف) $v_C(t)$ در مدار شکل ۹ـ۶۱ برای $t > 0$ معین کنید. (ب) $v_C(t)$ را در برابر t رسم کنید. $-0.1 < t < 2ms$ می‌باشد.



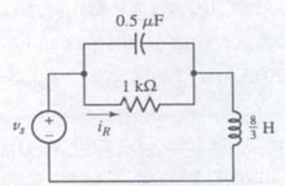
شکل ۹ـ۶۱

۶۱. کلید در شکل ۹ـ۶۲ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. در $t = 0$ باز می‌شود. $v_C(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید.



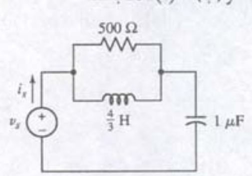
شکل ۹ـ۶۲

۶۲. در شکل ۹ـ۶۳، $i_R(t)$ را برای $t > 0$ به‌دست‌آورید به‌شرطی‌که $v_s(t)$ برابر (الف) $10u(-t)V$ و (ب) $10u(t)V$ باشد.



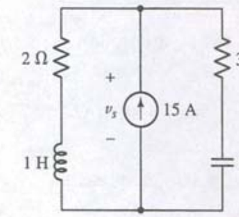
شکل ۹ـ۶۳

۶۳. در شکل ۹ـ۶۴، $i_s(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید به‌شرطی‌که $v_s(t)$ برابر (الف) $10u(-t)V$ و (ب) $10u(t)V$ باشد.



شکل ۹ـ۶۴

۶۴. مقاومت 2Ω را در مدار شکل ۹-۶۵ با یک القاگر 3Ω جایگزین نمایید. انرژی ذخیره‌شده در خازن را در $t = 200ms$ معین کنید به‌شرطی‌که منبع جریان در $t = 0$ از 15A به 22A تغییر کند. صحت جواب را با PSpice معین نمایید.



شکل ۹-۶۵

۶۵. منبع جریان در شکل ۹-۶۵ ناگهان از 15A به 22A در $t = 0$ تغییر می‌نماید. ولتاژ v_s را در (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$، (ج) $t = \infty$ و (د) $t = 3.4s$ معین کنید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.

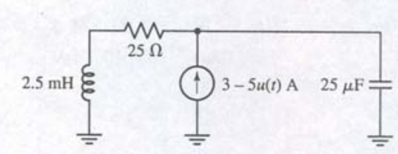
۶۶. منبع جریان در مدار شکل ۹-۶۵ ناگهان در $t = 0$ از 15A به 0A افت می‌کند، سپس در $t = 1s$ به 3A افزایش می‌یابد. ولتاژ $v_C(t)$ را ترسیم کنید. حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.

۶۷. یک القاگر 5mH، یک خازن $25\mu F$ و یک مقاومت 20Ω با یک منبع ولتاژ $v_x(t)$ سری‌اند. قبل از $t = 0$ منبع ولتاژ صفر است. در $t = 0$ به 75V می‌پرد. در $t = 1ms$ به صفر باز می‌گردد. در $t = 2ms$ دوباره به 75V بازمی‌گردد و با همین الگو تکرار می‌شود. جریان منبع را در (الف) $t = 0^-$، (ب) $t = 0^+$، (ج) $t = 1ms$ و (د) $t = 2ms$ به‌دست‌آورید.

۶۸. مداری طراحی کنید که یک پالس سینوسی را با ولتاژ اوج 5V تولید کند. ضمن این‌که سه پیک اضافه دیگر با اوج بیش از 1V داشته باشد. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.

۶۹. یک باطری 12V در جایی روی زمین قرار دارد. پایانه مثبت باطری به انتهای یک خازن 314.2pF سری با القاگر $869.1\mu H$ وصل است. یک زلزله مقداری آب نمک را روی یک انتهای القاگر/خازن (پارچه خیس) ریخته آن را به باطری وصل می‌کند تا یک مدار RLC سری تشکیل گردد. نوسان از گیرنده‌ای با فرکانس 290.5 kHz (1.825 Mrad/s) اخذ می‌شود. مقاومت پارچه خیس چقدر است؟

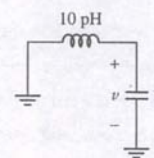
۷۰. ولتاژ $v_C(t)$ در دو سر خازن شکل ۹-۶۶ در $t = 1ms$ چقدر است؟ صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.



شکل ۹-۶۶

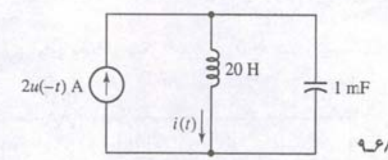
۹-۷ مدار LC بدون اتلاف

۷۱. یک مدار op amp برای مدل‌سازی پاسخ ولتاژ مدار LC شکل ۹-۶۷ طراحی کنید. صحت کار خود را با شبیه‌سازی مدار شکل ۹-۶۷ و استفاده از تقویت‌کننده LF 411 تحقیق کنید. فرض شود که $v(0) = 0$ و $i(0) = 1\ mA$ است.



شکل ۹-۶۷

۷۲. با مراجعه به شکل ۹-۶۸ یک مدار op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در $t > 0$ برابر $i(t)$ باشد.



شکل ۹-۶۸

۷۳. یک مدار RC بی‌منبع با یک مقاومت $1k\Omega$ و خازن 3.3mF ساخته شده است. ولتاژ اولیه دو سر خازن 1.2V است. (الف) معادله مشتق را برای v یعنی ولتاژ دو سر خازن برای $t > 0$ بنویسید. (ب) مداری با op amp با خروجی $v(t)$ طراحی کنید.

۷۴. خازن را در مدار شکل ۹-۶۷ با القاگر 20H موازی با خازن $5\mu F$ جایگزین کنید. مداری با op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در $t > 0$ برابر $i(t)$ باشد. صحت طراحی خود را با شبیه‌سازی خازن - مقاومت و نیز با مدار op amp تحقیق کنید. از تقویت‌کننده عملیاتی LM111 در شبیه‌سازی PSpice استفاده کنید.

۷۵. یک مدار RL بی‌منبع حاوی مقاومت 20Ω و القاگر 5H است. اگر مقدار اولیه جریان القاگر 2A باشد. (الف) معادله دیفرانسیل i را برای $t > 0$ بنویسید. (ب) یک op amp انتگرال‌گیر برای تهیه $i(t)$ به عنوان خروجی طراحی کنید. فرض کنید $R_1 = 1M\Omega$ و $C_f = 1\mu F$ باشد.

فصل دهم

تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

مفاهیم کلیدی

- مشخصات توابع سینوسی
- نمایش فیزوری سینوسی‌ها
- تبدیل بین حوزه‌های زمان و فرکانس
- امپدانس و ادمیتانس
- راکتانس و سوسپتانس
- ترکیبات سری و موازی در حوزه فرکانس
- تعیین پاسخ واداشته با استفاده از فیزورها
- کاربرد روش‌های تحلیل مدار در حوزه فرکانس

مقدمه

پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی از دو بخش تشکیل شده است، یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته. پاسخ طبیعی، پاسخی گذرا با عمری کوتاه از مداری است که در آن شرایط ناگهان تغییر کند. پاسخ واداشته پاسخی ماندگار، با عمری طولانی برای منابع مستقل موجود است. تا این‌جا، تنها پاسخ مربوط به منابع dc را مطالعه کردیم. تابع تحریک رایج دیگر، موج سینوسی است. این تابع ولتاژ موجود در پریز برق خانه‌ها و نیز ولتاژ خطوط انتقال نیرو متصل به یک منطقه مسکونی یا صنعتی را توصیف می‌نماید.

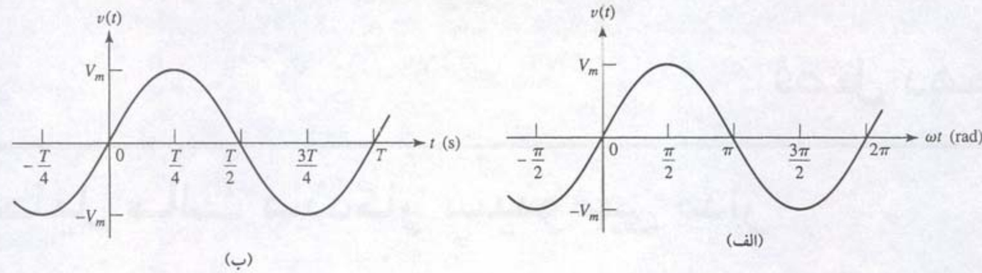
در این فصل، فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا کم اهمیت است و تنها پاسخ حالت ماندگار مداری مثل تلویزیون، توستر نان یا شبکه توزیع برق مورد توجه باشد. ما این‌گونه مدارها را با تکنیکی قوی که معادلات انتگرالی - مشتقی را به معادلات جبری تبدیل می‌کند، تحلیل خواهیم کرد.

۱-۱۰ ویژگی‌های توابع سینوسی

ولتاژ متغیر سینوسی زیر

$$v(t) = V_m \sin\omega t$$

که در شکل ۱-۱۰ (الف) هم نشان داده شده را ملاحظه کنید. دامنه موج سینوسی V_m و آرگومان آن ωt است. فرکانس زاویه‌ای، ω می‌باشد. در شکل ۱-۱۰ (الف)، $V_m \sin\omega t$ به صورت تابعی از آرگومان ωt رسم شده است و از آن تبعیت پریودیک یا تکراری موج سینوسی را کاملاً می‌توان مشاهده کرد. تابع هر 2π رادیان یک بار تکرار می‌گردد و پریود آن، بنابراین 2π رادیان است. در شکل ۱-۱۰ (ب)، $V_m \sin\omega t$ به صورت تابعی از t رسم شده است و لذا پریود آن اکنون T می‌باشد، یک موج سینوسی با پریود T باید در هر ثانیه $\frac{1}{T}$ تناوب را طی می‌کند، بنابراین فرکانس f برحسب Hz برابر $\frac{1}{T}$ است. پس $f = \frac{1}{T}$.



شکل ۱ـ۱۰ موج سینوسی $v(t) = V_m\sin\omega t$. (الف) برحسب ωt و (ب) برحسب t .

و چون

$$\omega T = 2\pi$$

است، رابطه مرسوم بین فرکانس و فرکانس زاویه‌ای را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

پسفازی و پیشفازی

فرم کلی توابع سینوسی بدین شکل است:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

که در آن زاویه فاز θ به آرگومان اضافه شده است. معادله ۱ در شکل ۲ـ۱۰ به صورت تابعی از ωt ترسیم شده و زاویه فاز به صورت مقدار جابه‌جایی موج اصلی برحسب رادیان به چپ، یا به عبارتی زودهنگام ظاهر شده است. چون نقاط متناظر روی موج سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$، به اندازه θ رادیان یا θ / ω ثانیه زودتر رخ می‌دهند، گوییم $V_m \sin(\omega t + \theta)$ به اندازهٔ θ رادیان از $V_m \sin\omega t$ پیشفاز است. به همین دلیل می‌توان گفت که $\sin\omega t$ به اندازه θ از $\sin(\omega t + \theta)$ پس افتاده است و یا از $\sin(\omega t + \theta)$ به اندازهٔ $-\theta$ پیش یا از $\sin(\omega t - \theta)$ به اندازه θ پیش است.

در هر یک از حالات، **پسفاز** یا **پیشفاز**، گوییم که امواج سینوسی **اختلاف فاز** دارند. اگر زاویه فاز یکی باشند، گوییم امواج سینوسی **همفازند**.

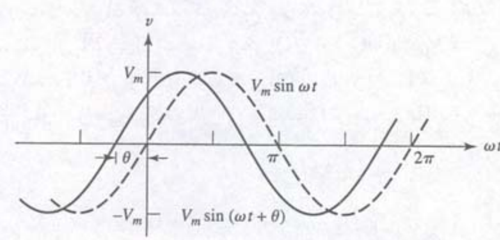
در مهندسی برق، زاویه فاز معمولاً به درجه داده می‌شود، نه برحسب رادیان. برای پرهیز از تداخل، همواره از سمبل درجه استفاده خواهیم کرد. ضمن این کار همیشه برای تبدیل رادیان به درجه ما فقط زاویه را در $180/\pi$ ضرب می‌کنیم. بنابراین به جای نوشتن

برای تبدیل رادیان به درجه باید آن را در $180/\pi$ ضرب کرد.

$$v = 100 \sin\left(2\pi\ 1000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

خواهیم نوشت:

$$v = 100 \sin(2\pi\ 1000t - 30°)$$



شکل ۲ـ۱۰ موج سینوسی $V_m\sin(\omega t + \theta)$ نسبت به $V_m\sin\omega t$، θ رادیان پیشفاز است.

هنگام محاسبه عبارات فوق در زمان‌های معینی مثل $t = 10^{-4}s$، مقدار $2\pi\ 1000t$ تبدیل به $0.2\ \pi$ رادیان می‌گردد و لذا قبل از جمع با 30° باید آن را به صورت 36° نوشت. سعی کنید سیب خود را با پرتقال جمع نکنید.

اگر بخواهیم دو موج سینوسی را مقایسه کنیم، باید:
۱. هر دو به صورت سینوسی یا کسینوسی باشد.
۲. هر دو با دامنه مثبت نوشته شوند.
۳. فرکانس‌های برابری داشته باشند.

$$-\sin\omega t = \sin(\omega t \pm 180°)$$
$$-\cos\omega t = \cos(\omega t \pm 180°)$$
$$\mp\sin\omega t = \cos(\omega t \pm 90°)$$
$$\pm\cos\omega t = \sin(\omega t \pm 90°)$$

تبدیل سینوس به کسینوس

اساساً سینوس و کسینوس یکی هستند، ولی اختلاف فازی 90° دارند. بنابراین $\sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$. مضاربی از 360° را می‌توان به آرگومان هر تابع سینوسی یا کسینوسی اضافه یا کم کرد، بدون آن که مقدارش تغییر یابد. بنابراین می‌توان گفت:

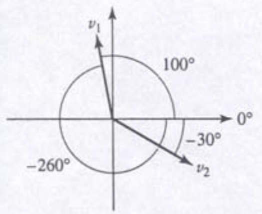
$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m1} \cos(5t + 10°) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 90° + 10°) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 100°) \end{aligned}$$

نسبت به

$$v_2 = V_{m2} \sin(5t - 30°)$$

به اندازهٔ 130° پیشفاز است. همچنین می‌توان گفت v_1 از v_2 به اندازهٔ 230° پسفاز می‌باشد. زیرا v_1 را می‌توان چنین نوشت:

$$v_1 = V_{m1} \sin(5t - 260°)$$



شکل ۳ـ۱۰ نمایش گرافیکی از دو تابع سینوسی v_1 و v_2. اندازهٔ هر تابع سینوسی با طول پیکان، و فاز آن با زاویهٔ بین پیکان و بخش مثبت محور x متناظر است. در اینجا v_1 نسبت به v_2 به اندازهٔ $130° = 100° + 30°$ پیشفاز دارد، همچنین می‌توان گفت که v_2 به اندازهٔ 230° نسبت به v_1 پیشفاز است. ولی غالباً تفاوت زاویه‌ها را به صورتی بیان می‌کنند که اندازه‌ای کمتر از 180° داشته باشد.

البته فرض بر این است که V_{m1} و V_{m2} هر دو کمیات مثبتی هستند. نمایش گرافیکی در شکل ۳ـ۱۰ مشاهده می‌شود. توجه کنید که فرکانس هر دو تابع سینوسی (در اینجا 5 rad/s) باید یکسان باشند. در غیر این صورت مقایسه مفهومی ندارد. معمولاً عمل مقایسه فاز بین دو موج سینوسی برحسب یک زاویه کوچکتر یا 180° بیان می‌شود.

مفهوم پسفاز یا پیشفاز بین دو موج سینوسی کاربرد گسترده‌ای دارد و به هر دو آن‌ها به روش ریاضی و گرافیکی قابل تشخیص‌اند.

تمرین

۱ـ۱۰ پسفاز i_1 را نسبت به v_1 پیدا کنید. به شرطی که $v_1 = 120 \cos(120\pi t - 40°)$ V باشد و i_1 برابر (الف) $2.5 \cos(120\pi t + 20°)$A، (ب) $1.4 \sin(120\pi t - 70°)$A، (ج) $-0.8 \cos(120\pi t - 110°)$A.

۲ـ۱۰ A، B، C و ϕ را بیابید:

$$40\cos(100t - 40°) - 20\sin(100t + 170°) = A\cos100t + B\sin100t = C\cos(100t + \phi)$$

جواب ۱ـ۱۰: 60°-، 120° و 110°- جواب ۲ـ۱۰: 27.2، 45.4، 52.9 و 59.1°- .

۲ـ۱۰ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

حالا که با مشخصات ریاضی توابع سینوسی آشنا شدیم، آماده‌ایم تا یک تابع تحریک سینوسی را به یک مدار ساده اعمال کرده، پاسخ واداشته را به دست آوریم. ابتدا معادله دیفرانسیلی که در مدار مفروض صادق باشد را می‌نویسیم. حل کامل این معادله از دو بخش مکمل (پاسخ

طبیعی) و انتگرال خاص (پاسخ واداشته) تشکیل شده است. روشی را که در این فصل پیشنهاد خواهیم کرد فاقد پاسخ گذرای کوتاه مدت یا طبیعی است و فقط به پاسخ طولانی‌مدت یا ماندگار توجه شده است.

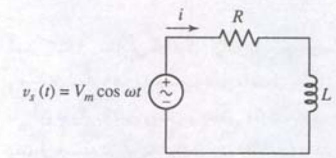
پاسخ ماندگار

جمله پاسخ ماندگار مترادف با پاسخ واداشته است و مدارهایی که ما آماده تحلیل آن هستیم را معمولاً حالت ماندگار سینوسی می‌نامند. متأسفانه ماندگار به معنی "بدون تغییر با زمان" در ذهن دانشجویان نقش بسته است. البته این تغییر برای توابع محرک dc صحیح است ولی پاسخ حالت ماندگار سینوسی قطعاً با زمان تغییر می‌کند. ماندگار درواقع به وضعیتی اشاره دارد که پس از پایان پاسخ گذرا یا طبیعی برقرار می‌گردد.

پاسخ واداشته فرم ریاضی تابع تحریک را به‌علاوه همه مشتقات و اولین انتگرال آن را دارد. با این آگاهی، یکی از روش‌های یافتن پاسخ واداشته این‌است‌که فرض کنیم حل متشکل از جمع این توابع است و در آن هر تابع دامنه مجهولی دارد که با جایگزینی مستقیم در معادله دیفرانسیل باید تعیین شوند. به‌زودی خواهیم دید که این کار طولانی است و لذا تصمیم داریم روش ساده‌تری را دنبال کنیم.

مدار RL شکل ۴-۱۰ را ملاحظه نمایید. منبع ولتاژ سینوسی $v_s = V_m \cos \omega t$ مدت‌ها قبل به مدار متصل شده و پاسخ طبیعی کلاً از بین رفته است. ما در جستجوی پاسخ واداشته‌ای (یا ماندگار) هستیم که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$



شکل ۴-۱۰ یک مدار RL سری که یافتن پاسخ واداشته‌اش موردنظر است.

که از اعمال KVL حول حلقه ساده مدار به دست آمده است. در هر لحظه که مشتق برابر صفر باشد، جریان باید فرم $i \propto \cos \omega t$ را داشته باشد. به‌طور مشابه در هر لحظه که جریان صفر باشد، مشتق باید متناسب با $\cos \omega t$ گردد. بنابراین جریان فرم $\sin \omega t$ دارد. پس می‌توان انتظار داشت که پاسخ واداشته فرم زیر را داشته باشد.

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

که I_1 و I_2 ثابت‌های حقیقی بوده و به V_m، R، L و ω بستگی دارند. هیچ ثابت یا تابع نمایی نمی‌تواند به میان آید. با جایگزینی پاسخ مفروض در معادله دیفرانسیل برای حل داریم:

$$L(-I_1\omega \sin \omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

اگر از جملات کسینوس و سینوس فاکتور بگیریم، داریم:

$$(-LI_1\omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

این معادله باید برای همه زمان‌های t صحیح باشد و این به شرطی است که ضرایب هر یک از جملات سینوس صفر باشد. بنابراین:

$$-\omega L\, I_1 + RI_2 = 0 \quad \text{و} \quad \omega L\, I_2 + RI_1 - V_m = 0$$

از حل همزمان I_1 و I_2 داریم:

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \qquad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2}$$

و بنابراین پاسخ واداشته به این ترتیب به دست می‌آید:

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \sin \omega t \qquad (۲)$$

فرم فشرده‌تر و کاربردی‌تر جواب

رابطه فوق کمی ثقیل است و تصویر واضح‌تری از آن را می‌توان با یک جمله سینوسی یا کسینوسی با زاویه فاز نشان داد. ما فرم کسینوسی را برای بیان پاسخ برمی‌گزینیم.

$$i(t) = A \cos (\omega t - \theta) \qquad (۳)$$

برای یافتن مقادیر A و θ دو روش وجود دارد. می‌توانیم معادله (۳) را مستقیماً در معادله دیفرانسیل بگذاریم یا این‌که دو حل (۲) و (۳) را با یکدیگر برابر کنیم. با انتخاب راه دوم و بسط تابع $\cos (\omega t - \theta)$:

$$A \cos\theta \cos\omega t + A \sin\theta \sin\omega t = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \sin\omega t$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ داریم:

$$A \cos \theta = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2L^2} \quad \text{و} \quad A \sin \theta = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2L^2}$$

برای یافتن A و θ دو رابطه فوق را بر هم تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{\omega L}{R}$$

همچنین دو رابطه را به توان 2 رسانده و با هم جمع می‌کنیم:

$$A^2\cos^2\theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = \frac{R^2V_m^2}{(R^2 + \omega^2L^2)^2} + \frac{\omega^2L^2V_m^2}{(R^2 + \omega^2L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2 + \omega^2L^2}$$

بنابراین

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

و

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}$$

پس فرم دیگر پاسخ واداشته چنین است:

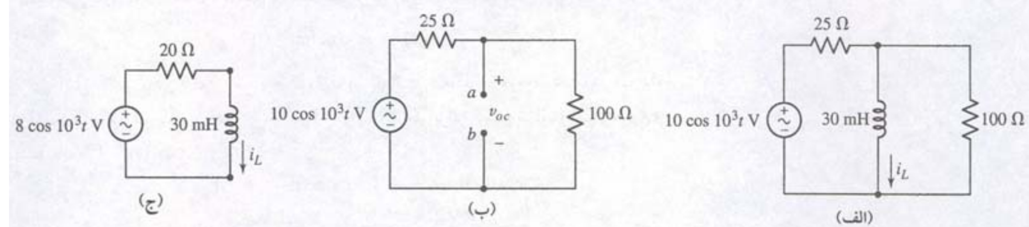
$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \qquad (۴)$$

می‌بینیم که دامنهٔ پاسخ متناسب با دامنه تابع تحریک است، در غیر این صورت مفهوم خطی بودن صحیح نخواهد بود. دامنه پاسخ نیز با افزایش R، L و ω کاهش می‌یابد ولی این کاهش خطی نیست. به نظر می‌رسد جریان به اندازهٔ $\tan^{-1}(\omega L / R)$ که زاویه‌ای بین صفر و $90°$ است از ولتاژ اعمال شده عقب می‌افتد. وقتی $\omega = 0$ یا $L = 0$ باشد، جریان با ولتاژ هم‌فاز است. با شرط اول جریان از نوع dc و در شرط دوم مدار از نوع مقاومتی است و نتیجه با تجربه قبلی منطبق است. اگر $R = 0$ باشد، جریان به اندازهٔ $90°$ از ولتاژ عقب می‌افتد. بنابراین اگر در یک القاگر قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد، جریان دقیقاً $90°$ از ولتاژ عقب است. به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که جریان درون خازن به اندازه $90°$ از ولتاژ دو سرش پیش است.

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ به نسبت ωL به R وابسته است. ما ωL را راکتانس القایی می‌خوانیم و برحسب اهم اندازه‌گیری می‌شود و معیار مقابله القاگر را در برابر جریان سینوسی نشان می‌دهد. اکنون اجازه بدهید تا ببینیم چگونه نتایج این تحلیل کلی را به مدار خاصی که فقط یک حلقه سری نیست، می‌توان اعمال کرد. دقت کنید که ما اکنون پاسخ گذرا را نادیده می‌گیریم. فرض بر این‌است‌که ما فقط بر پاسخ حالت ماندگار تکیه می‌کنیم به طوری که همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از بین رفته‌اند.

مثال ۱-۱۰

جریان i_L را در مدار شکل ۵-۱۰(الف) بیابید.



شکل ۵-۱۰ (الف) مدار مثال ۱-۱۰ که در آن جریان i_L خواسته شده است. (ب) می‌خواهیم معادل تونن دیده‌شده از پایانه‌های a و b را بیابیم. (ج) مدار ساده‌شده.

گرچه این مدار دارای منبع سینوسی همراه با یک القاگر است، ولی دو مقاومت دیگر هم داشته و یک حلقه تنها نیست.

برای اعمال نتایج قبل، لازم است معادل تونن را با نظاره از پایانه‌های a و b در شکل ۵-۱۰ (ب) جستجو کنیم. ولتاژ مدار باز v_{oc} برابر است با:

$$v_{oc} = (10\cos 10^3 t)\,\frac{100}{100+25} = 8\cos 10^3 t\ \text{V}$$

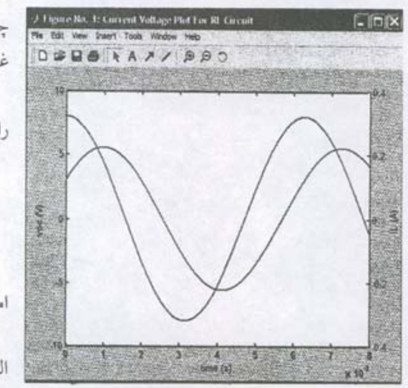
چون منبع وابسته‌ای موجود نیست، R_{th} را با کشتن منابع مستقل و محاسبه مقاومت شبکه غیرفعال به صورت $R_{th} = (25 \quad 100)/(25+100) = 20\ \Omega$ به دست می‌آوریم.

حالا یک مدار RL سری با $L = 30$ mH، $R_{th} = 20\ \Omega$ و یک منبع ولتاژ $8\cos 10^3 t$ V را در شکل ۵-۱۰ (ب) داریم. بنابراین با اعمال معادله (۴):

$$i_L = \frac{8}{\sqrt{20^2+(10^3\times 30\times 10^{-3})^2}}\cos\left(10^3 t - \tan^{-1}\frac{30}{20}\right)$$
$$= 222\cos(10^3 t - 56.3^\circ)\ \text{mA}$$

امواج ولتاژ و جریان در شکل ۶-۱۰ ترسیم شده‌اند.

دقت کنید که اختلاف 90° بین ولتاژ و جریان نمودار وجود ندارد به این دلیل که ما نمودار القاگر را رسم نکرده و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.



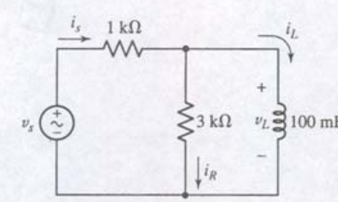
شکل ۶-۱۰ موج‌های ولتاژ و جریان که با دستورات متلب زیر ترسیم شده است.

```
EDU» t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU» v = 8*cos(1000*t);
EDU» i = 0.222*cos(1000*t – 56.3*pi/180);
EDU» plotyy(t,v,t,i);
EDU» xlabel('time (s)');
```

تمرین

۳-۱۰ بگذارید در مدار شکل ۷-۱۰، $v_s = 40\cos 8000t$ V باشد، از قضیه تونن استفاده کنید. و مقدار (الف) i_L، (ب) v_L، (ج) i_R و (د) i_s را به دست آورید.

جواب: 18.71 mA؛ 15.97 V؛ 5.32 mA؛ 24.0 mA.



شکل ۷-۱۰

۳-۱۰ تابع تحریک مختلط

روشی که به وسیله آن پاسخ حالت ماندگار را برای مدار RL یافتیم چندان ساده نبود. می‌توان برای پیچیدگی ناشی از وجود یک القاگر در مدار هم فکر کرد. اگر هر دو عنصر غیرفعال مقاومت باشد، تحلیل حتی با تابع تحریک سینوسی بسیار ساده است. دلیل سادگی رابطه ولتاژ - جریان حاصل به وسیله قانون اهم است. رابطه ولتاژ - جریان القاگر چندان ساده نیست و درعوض در حل یک معادله جبری با یک معادله دیفرانسیل همگن طرف هستیم. درواقع تحلیل هر مداری با روشی که در مثال ارائه شد، چندان عملی نیست و بنابراین به دنبال یافتن تحلیلی ساده‌تریم. نتیجه این تلاش رابطه‌ای جبری میان جریان سینوسی و ولتاژ سینوسی برای القاگرها و خازن‌ها و نیز مقاومت‌ها است و بنابراین قادر خواهیم بود برای هر مدار با هر

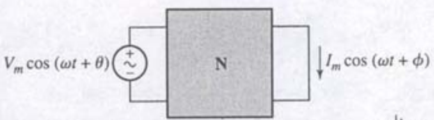
سطح پیچیدگی معادلات جبری لازم را بنویسیم. ثابت‌ها و متغیرها در معادلات اعداد مختلط خواهند بود ولی تحلیل هر مدار در حالت ماندگار سینوسی مشابه تحلیل مدار مقاومتی است.

اکنون آماده‌ایم تا یک تابع تحریک مختلط (یعنی تابعی که هر دو بخش **حقیقی و موهومی** دارد) را به یک شبکه الکتریکی اعمال کنیم. ممکن است این کار عجیب به نظر آید، ولی خواهیم دید که استفاده از کمیت‌های مختلط در تحلیل ماندگار سینوسی به روش‌هایی منتهی می‌گردد که بسیار ساده‌تر از کمیت‌های حقیقی است. انتظار داریم که یک تابع محرک مختلط، پاسخی مختلط تولید کند. بخش حقیقی تابع تحریک پاسخ حقیقی و بخش موهومی آن نیز پاسخ موهومی را تولید می‌نماید. انشاءالله که این صحبت منطقی به نظر می‌رسد. تصور این‌که در مداری منبع ولتاژ حقیقی، پاسخی موهومی تولید کند مشکل است و این نکته در مورد عکس آن هم صادق است.

در شکل ۸-۱۰ یک منبع سینوسی

$$V_m\cos(\omega t+\theta) \qquad (۵)$$

به یک شبکه کلی منتقل شده است که در آن فقط عناصر غیرفعال موجود است (یعنی منابع مستقل در آن وجود ندارد) تا بدین‌ترتیب در به‌کارگیری اصل تجمیع از برخورد با مشکل خودداری شود. هدف یافتن پاسخ جریان در دیگر شاخه‌های شبکه است و پارامترهای موجود در معادله (۵) نیز همگی کمیت‌های حقیقی‌اند.



شکل ۸-۱۰ تابع تحریک سینوسی $V_m\cos(\omega t+\theta)$ پاسخ ماندگار سینوسی $I_m\cos(\omega t+\phi)$ را تولید می‌کند.

نشان دادیم که می‌توان پاسخ را با تابع کسینوسی زیر نشان داد:

$$I_m\cos(\omega t+\phi) \qquad (۶)$$

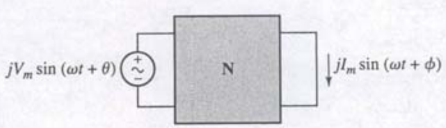
یک تابع تحریک سینوسی همیشه پاسخ واداشته سینوسی با همان فرکانس در مداری خطی، تولید می‌کند.

اکنون بگذارید زمان مرجع خود را با جابه‌جایی فاز تابع تحریک به اندازهٔ 90° تغییر دهیم و یا زمان $t = 0$ را عوض کنیم. بنابراین تابع تحریک زیر را داریم:

$$V_m\cos(\omega t+\theta-90^\circ) = V_m\sin(\omega t+\theta) \qquad (۷)$$

وقتی این تابع را به همان شبکه اعمال کنیم، پاسخ چنین خواهد شد:

$$I_m\cos(\omega t+\phi-90^\circ) = I_m\sin(\omega t+\phi) \qquad (۸)$$



شکل ۹-۱۰ با اعمال تابع تحریک موهومی سینوسی $jV_m\sin(\omega t+\theta)$ به مدار شکل ۸-۱۰ پاسخ موهومی سینوسی $jI_m\sin(\omega t+\phi)$ ایجاد می‌گردد.

پس از عالم واقعی خارج شده و یک تابع تحریک موهومی را که قابل تولید در آزمایشگاه نیست و فقط مفهوم ریاضی دارد، به مدار اعمال می‌کنیم.

منبع موهومی، پاسخ موهومی تولید می‌کند

منبع موهومی را بسیار ساده می‌توان ساخت، فقط کافی است که معادله (۷) را در J که همان عملگر موهومی $\sqrt{-1}$ است، ضرب کنیم. بنابراین داریم:

$$JV_m\sin(\omega t+\theta) \qquad (۹)$$

خوب، پاسخ چیست؟ اگر منبع را دوبرابر کنیم، بنا به اصل خطی بودن، انتظار داریم پاسخ هم دوبرابر شود. ضرب تابع تحریک با ثابت k ضرب پاسخ در همان ثابت را نتیجه می‌دهد. این که ثابت ما $\sqrt{-1}$ است، نتیجه فوق را منفی نمی‌کند. بنابراین پاسخ منبع معادلهٔ (۹) برابر است با

$$jI_m\sin(\omega t+\theta) \qquad (۱۰)$$

منبع موهومی و پاسخ آن در شکل ۹-۱۰ دیده می‌شود.

مهندسین برق برای نشان‌دادن $\sqrt{-1}$ معمولاً به‌جای i از j استفاده می‌کنند تا با جریان اشتباه نشود.

اعمال یک تابع تحریک مختلط

ما منبعی حقیقی را به مدار اعمال کردیم و پاسخ حقیقی به دست آمد؛ همچنین منبعی موهومی را اعمال نمودیم، پاسخی موهومی حاصل شد. چون با مداری خطی سروکار داریم، برای یافتن پاسخ مدار به تابع تحریک مختلط که مجموع توابع تحریک حقیقی و موهومی است، می‌توان قضیه تجمیع را به کار برد. بنابراین جمع توابع تحریک معادلات (۵) و (۹) برابر است با:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (۱۱)$$

و باید پاسخی تولید کند که از جمع معادلات ۶ و ۱۰ به دست می‌آید.

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (۱۲)$$

می‌توان منبع و پاسخ مختلط را به فرم ساده‌تری که از رابطه اولر حاصل می‌شود، نشان داد. پس منبع معادله (۱۱) چنین می‌شود:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \qquad (۱۳)$$

و پاسخ آن از معادله (۱۲) به دست می‌آید:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \qquad (۱۴)$$

منبع و پاسخ مختلط در شکل ۱۰-۱۰ نشان داده شده است.

یک منبع حقیقی، موهومی یا مختلط به ترتیب پاسخی حقیقی، موهومی یا مختلط را تولید می‌نماید. علاوه برآن توسط رابطه اولر و قضیه تجمیع، یک تابع تحریک مختلط را می‌توان مجموع تابع تحریک حقیقی و تابع تحریک موهومی دانست. بخش حقیقی پاسخ از منبع حقیقی و پاسخ موهومی از بخش موهومی منبع مختلط حاصل می‌گردد.

هدف ما این‌است‌که به جای اعمال یک تابع تحریک حقیقی برای یافتن پاسخ حقیقی از تابع تحریک مختلطی استفاده کنیم که بخش حقیقی آن همان منبع حقیقی مفروض باشد و نیز انتظار داریم پاسخ مختلطی به دست آوریم که بخش حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب ما باشد. مزیت این روال این است که معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی توصیف‌گر پاسخ حالت ماندگار یک مدار، تبدیل به معادلات ساده جبری می‌گردد.

در پیوست ۵ اعداد مختلط و مفاهیم مربوطه، حساب اعداد مختلط و رابطه اولر و نیز روابط بین فرم نمایی و قطبی مورد بحث قرار گرفته است.

روش جبری دیگر برای معادلات دیفرانسیل

بگذارید این کار را روی مدار ساده RL سری در شکل ۱۱-۱۰ پیاده کنیم. منبع حقیقی $V_m \cos \omega t$ اعمال می‌شود، پاسخ $i(t)$ مطلوب است. چون:

$$\cos \omega t = \text{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

منبع مختلط لازم چنین است:

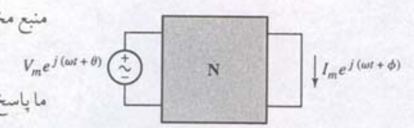
$$V_m e^{j\omega t}$$

ما پاسخ مختلط را برحسب دامنه مجهول I_m و زاویه فاز نامعلوم ϕ بیان می‌کنیم:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای این مدار خاص داریم:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$



شکل ۱۰-۱۰ پاسخ مدار شکل ۸-۱۰ به ورودی مختلط $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ برابر است با تابع مختلط $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$.

در معادله فوق عبارات مختلط تابع v_s و پاسخ i را جایگزین می‌کنیم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

با اجرای مشتق فوق داریم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

و به این ترتیب معادله‌ای جبری حاصل می‌گردد. برای تعیین مقدار I_m و ω، طرفین را بر $e^{j\omega t}$ تقسیم می‌کنیم:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m$$

در سمت چپ فاکتورگیری می‌کنیم:

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

و یا

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

برای شناسایی I_m و ϕ، سمت راست را به صورت قطبی یا نمایی درمی‌آوریم.

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \qquad (۱۵)$$

بنابراین

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

و

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

به فرم قطبی می‌توان چنین نوشت:

$$I_m \angle \phi$$

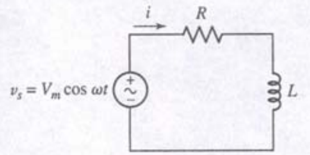
یا

$$V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle -\tan^{-1}\omega L/R$$

پاسخ مختلط با معادله (۱۵) داده شد. چون I_m و ϕ به‌راحتی قابل شناسایی است. می‌توان بلافاصله عبارتی برای $i(t)$ نوشت. با این وجود اگر ترجیح دهیم راهی مناسب‌تر برگزینیم، می‌توان پاسخ $i(t)$ را با اعمال فاکتور $e^{j\omega t}$ در هر دو طرف معادله (۱۵) و انتخاب بخش حقیقی به دست آورد. از هر یک از دو راه داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

که با معادله (۴) برای مدار موردنظر برابر است.



شکل ۱۱-۱۰ یک مدار ساده در حالت ماندگار سینوسی که قرار است با اعمال تابع تحریک مختلط تحلیل شود.

مثال ۲-۱۰

ولتاژ مختلط دو سر ترکیب مقاومت 500 Ω سری با القاگر 95 mH را بیابید، به شرطی که جریان مختلط $8e^{j3000t}$ در دو عنصر سری جاری گردد.

ولتاژ مختلط مجهول دامنه V_m و فاز ϕ را خواهد داشت، که هر دو آن‌ها باید معین شوند. با این وجود، ولتاژ باید همان فرکانس جریان (3000 rad/s) را داشته باشد. بنابراین، این ولتاژ را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$V_m\, e^{j(3000t + \phi)}$$

از برابری آن با جمع ولتاژهای مقاومت و القاگر داریم:

$$V_m\, e^{j(3000t + \phi)} = (500)\ 0.008\ e^{j3000t} + (0.095)\ \frac{d(0.008e^{j3000t})}{dt}$$

و با گرفتن مشتق درمی‌یابیم که

$$V_m\, e^{j(3000t + \phi)} = 4e^{j3000t} + j2.28e^{j3000t}$$

با حذف جمله e^{j3000t} خواهیم داشت:

$$V_m\, e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

با تبدیل سمت راست به فرم قطبی، یعنی

$$4 + j2.28 = 4.60\ e^{j29.7^\circ}$$

و از آن نتیجه می‌شود $V_m = 4.60$ V و $\phi = 29.7^\circ$ و به این ترتیب ولتاژ مطلوب برابر است با

$$4.60e^{j(3000t + 29.7^\circ)}\ \text{V}$$

اگر پاسخ حقیقی موردنظر باشد، کافی است تنها بخش حقیقی پاسخ مختلط را انتخاب کنیم.

$$\text{Re}\ \{4.60\ e^{j(3000t + 29.7^\circ)}\} = 4.60\ \cos\ (3000t + 29.7^\circ)\ \ \text{V}$$

بنابراین می‌توان پاسخ واداشته یک مدار الکتریکی حاوی یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی را بدون حل معادله دیفرانسیل به دست آورد.

تمرین

اگر در حل این مسئله مشکل دارید، به پیوست ۵ مراجعه نمایید.

۱۰ـ۴ موارد زیر را به فرم مختصات مربعی درآورید:
(الف) $(5\angle -200^\circ + 4\angle 20^\circ)$; (ب) $[(2\angle 30^\circ)(5\angle -110^\circ)](1 + j2)$ و
موارد زیر را به مختصات قطبی تبدیل کنید.
(ج) $(2-j7) / (3-j)$ و (د) $8 - j4 + [(5\angle 80^\circ) / (2\angle 20^\circ)]$.

۱۰ـ۵ اگر استفاده از قرارداد علامت عناصر غیرفعال مجاز باشد، مطلوب است (الف) ولتاژ مختلطی که از اعمال جریان مختلط $4e^{j800t}$ به مدار سری متشکل از خازن 1 mF و مقاومت 2 Ω حاصل می‌شود. (ب) جریان مختلطی که از اعمال ولتاژ مختلط $100e^{j2000t}$ به مدار موازی متشکل از یک القاگر 10 mH و مقاومت 50 Ω حاصل می‌شود.

جواب ۱۰ـ۴: $21.4 - j6.38$؛ $-0.940 + j3.08$؛ $2.30\angle -55.6^\circ$؛ $9.43\angle -11.22^\circ$.
جواب ۱۰ـ۵: $9.43\ e^{j(800t - 32.0^\circ)}$ V؛ $5.39\ e^{j(2000t - 68.2^\circ)}$ A.

۱۰ـ٤ فیزور

یک ولتاژ یا جریان سینوسی با فرکانس مفروضی را می‌توان با دو پارامتر، یکی دامنه و دیگری زاویه فاز نمایش داد. نمایش مختلط ولتاژ و جریان نیز با این دو پارامتر تحقق می‌یابد. مثلاً با فرض فرم سینوسی پاسخ جریان:

$$I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

نمایش آن به فرم مختلط عبارت بود از:

$$I_m\ e^{j(\omega t + \phi)}$$

به محض تعیین I_m و ϕ جریان دقیقاً تعریف می‌شود. در هر مداری که در حالت ماندگار با فرکانس ثابت ω کار کند، هر جریان یا ولتاژ با دامنه و زاویه فازش مشخص می‌گردد. درواقع نمایش مختلط هر ولتاژ یا جریان حاوی فاکتور $e^{j\omega t}$ است. چون این فاکتور در هر کمیتی یکسان است، بنابراین هیچ اطلاعات مفیدی را در بر ندارد. البته می‌توان فرکانس را با وارسی یکی از این فاکتورها مشخص کرد ولی راحت‌تر است که مقدار فرکانس را در کنار نمودار بنویسیم و از حمل اطلاعات بی‌مصرف در سراسر حل مسئله خودداری کنیم. بنابراین می‌توان منبع ولتاژ و پاسخ جریان مثال قبل را با نمایش آن‌ها به فرم زیر ساده کرد.

$$V_m e^{j0^\circ} \quad \text{یا} \quad V_m$$

و

$$I_m\ e^{j\phi}$$

این کمیات مختلف معمولاً به صورت قطبی در عوض نمایی نوشته می‌شوند تا صرفه‌جویی زمان و تلاش‌ها صورت پذیرد. بنابراین ولتاژ منبع

$$v(t) = V_m\ \cos\ \omega t$$

اکنون آن را به صورت مختلط می‌نویسیم:

$$V_m\ \angle 0^\circ$$

و جریان پاسخ نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$i(t) = I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

یا

$$I_m\ \angle \phi$$

توجه کنید که تمام مدارهای موردنظر ما پاسخشان به یک تحریک سینوسی، یک سینوسی با همان فرکانس است. بنابراین مقدار ω همیشه معلوم است.

این نمایش مختلط خلاصه را **فیزور** می‌گویند. بیایید مراحل تبدیل یک منبع ولتاژ یا جریان حقیقی را به فیزور قدم به قدم دنبال کنیم، آنگاه خواهیم توانست فیزور را بامعنی‌تر تعریف کرده و برای نمایش آن نماد معرفی نماییم.

یک جریان سینوسی حقیقی مثل

$$i(t) = I_m\ \cos\ (\omega t + \phi)$$

را می‌توان با استفاده از رابطه اولر به صورت بخش حقیقی یک کمیت مختلط نشان داد.

$$i(t) = \text{Re}\{I_m\ e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

سپس با حذف { }Re جریان را به صورت کمیتی مختلط نشان می‌دهیم، یعنی یک قسمت موهومی به آن اضافه می‌نماییم، بدون این‌که قسمت حقیقی را تغییر دهیم. با حذف $e^{j\omega t}$، نماد ساده به شکل

$$I = I_m\ e^{j\phi}$$

حاصل می‌گردد که با نوشتن آن به صورت قطبی خواهیم داشت:

$$I = I_m\ \angle \phi$$

این نمایش خلاصه مختلط، **نمایش فیزوری** نام دارد. چون فیزورها کمیات مختلط هستند، با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند. علت استفاده از حروف بزرگ برای نشان دادن فیزوری کمیات فیزیکی این‌است‌که فیزور تابعی از زمان نیست، بلکه تنها دامنه و فاز یک تابع متغیر با زمان را نشان می‌دهد. ما این تفاوت دیدگاه را به این صورت بیان می‌کنیم که $i(t)$ نمایش در حوزه زمان یک جریان و I نمایش حوزه فرکانس آن است. توجه کنید که در بیان ولتاژ و جریان در حوزه فرکانس، خود فرکانس صراحتاً بیان نمی‌شود. با این وجود فرکانس آن‌قدر اهمیت دارد که با حذفش بر بدیهی بودنش تأکید شده است.

مثال ۳_۱۰

ولتاژ حوزه زمان $v(t) = 100 \cos (400t - 30°)$ را به حوزه فرکانس تبدیل کنید.

عبارت حوزه زمان از قبل به فرم موج کسینوسی با زاویه فاز داده شده است. بنابراین با حذف $\omega = 400$ rad/s داریم:

$$\mathbf{V} = 100\angle -30° \text{ v}$$

دقت کنید که در نوشتن عبارت فوق چند گام را چشم‌پوشی کرده‌ایم. گاهی این کار موجب اشتباه دانشجویان می‌گردد و ممکن است فراموش کنند که نمایش فیزوری با ولتاژ $v(t)$ در حوزه زمان یکی نیست. درعوض این نمایش فرم ساده‌اش تابع مختلطی است که از جمع مؤلفه موهومی به تابع حقیقی $v(t)$ حاصل شده است.

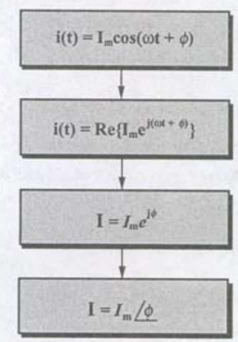
تمرین

۶_۱۰ هر یک از توابع زمانی زیر را به فرم فیزوری درآورید.

(الف) $-5\sin (580t - 110°)$، (ب) $3 \cos 600t - 5\sin (600t + 110°)$ و

(ج) $8 \cos (4t - 30°) + 4\sin(4t - 100°)$. (راهنمایی: هر یک را به یک تابع کسینوسی دامنه مثبت تبدیل کنید).

جواب: $5 \angle -20°$، $2.41 \angle -134.8°$ و $4.46 \angle -47.9°$.



تبدیل $i(t)$ به I، تبدیل فیزوری از حوزهٔ زمان به حوزه فرکانس نام دارد.

فرآیند بازگشت از حوزه فرکانس به حوزه زمان دقیقاً عکس روال قبل است. بنابراین با فرض ولتاژ فیزوری

$$\mathbf{V} = 115\angle -45° \text{ v}$$

و این که $\omega = 500$ rad/s است، معادل حوزه زمان را مستقیماً می‌نویسیم:

$$v(t) = 115 \cos (500t - 45°) \text{ V}$$

اگر تابع به صورت سینوسی موردنظر باشد، می‌توان $v(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) = 115 \sin (500t + 45°) \text{ V}$$

تمرین

۷_۱۰ فرض کنید $\omega = 2000$ rad/s و $t = 1$ ms باشد. مقدار لحظه‌ای هر یک از جریان‌های فیزوری زیر را پیدا کنید:

(الف) $j10$ A، (ب) $20 + j10$ A و (ج) $20 + j(10 \angle 20°)$ A.

جواب: -9.09 A، -17.42 A و -15.44 A.

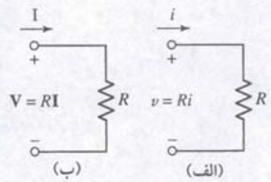
۵_۱۰ روابط فیزوری برای R، L و C

توان واقعی تکنیک فیزوری بر این حقیقت استوار است که می‌توان برای القاگرها و خازن‌ها، درست مثل مقاومت‌ها، روابطی جبری بین ولتاژ و جریان تعریف کرد. اکنون که می‌توانیم تبدیل به و یا از حوزه فرکانس را انجام دهیم، می‌توانیم در راستای ساده کردن تحلیل حالت ماندگار پیش رفته و رابطه‌ای بین ولتاژ فیزوری و جریان فیزوری هر سه عنصر ایجاد نماییم.

مقاومت

مقاومت ساده‌ترین حالت است. در حوزه زمان طبق شکل ۱۲_۱۰(الف) معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(t) = Ri(t)$$



شکل ۱۲_۱۰ مقاومت و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزهٔ زمان $v = Ri$ و (ب) در حوزهٔ فرکانس $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$.

حال اجازه دهید تا ولتاژ مختلط را اعمال کنیم:

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m\cos (\omega t + \theta) + jV_m \sin (\omega t + \theta) \qquad (۱۶)$$

و پاسخ جریان مختلط را هم مطابق زیر فرض نمایید:

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m\cos (\omega t + \phi) + jI_m \sin (\omega t + \phi) \qquad (۱۷)$$

بنابراین

$$V_m\, e^{j(\omega t + \theta)} = RI_m\, e^{j(\omega t + \phi)}$$

با تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$

$$V_m\, e^{j\theta} = RI_m\, e^{j\phi}$$

یا به فرم قطبی داریم:

$$V_m\angle\theta = RI_m\angle\phi$$

عبارات $V_m \angle\theta$ و $I_m \angle\phi$ چیزی جز فرم‌های فیزوری V و I نیستند. بنابراین:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad (۱۸)$$

قانون اهم در هر دو حوزهٔ زمان و فرکانس صحیح است. به بیان دیگر ولتاژ روی یک مقاومت همیشه حاصل‌ضرب مقدار مقاومت در جریان مقاومت است.

توجه دارید که قانون اهم در هر دو حوزه زمان و فرکانس معتبر است. به بیان دیگر ولتاژ دو سر یک مقاومت همواره از حاصل‌ضرب مقاومت در جریان جاری شده در آن به دست می‌آید. پس رابطه ولتاژ – جریان در فرم فیزوری برای مقاومت همان فرم رابطه بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان را دارا است. معادله فیزوری تعریف شده در شکل ۱۲_۱۰ (ب) ملاحظه می‌شود. زوایای θ و ϕ با یکدیگر برابرند و بنابراین جریان و ولتاژ همیشه همفازند.

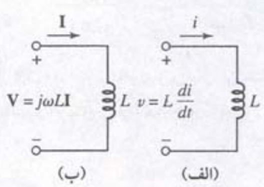
به‌عنوان مثالی از استفاده هر دو رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس، بیایید فرض کنیم که در دو سر مقاومت $4\ \Omega$، ولتاژ $8 \cos (100t - 50°)$ برقرار باشد. با حل در حوزه زمان، جریان باید فرم زیر را داشته باشد:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos (100t - 50°) \text{ A}$$

فرم فیزوری ولتاژ $8\angle -50°$ V است و بنابراین:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2\angle -50° \text{ A}$$

اگر این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم، مسلماً عبارت یکسانی برای جریان به دست خواهد آمد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که وقتی یک مدار مقاومتی را تحلیل می‌کنیم، استفاده از حوزه زمانی موجب صرفه‌جویی در زمان یا تلاش نمی‌گردد.



شکل ۱۳_۱۰ القاگر و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزهٔ زمان $v = L\, di/dt$ و (ب) در حوزهٔ فرکانس $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$.

القاگر

اکنون بیایید القاگر را بررسی کنیم. شبکه حوزه زمان در شکل ۱۳_۱۰(الف) نشان داده شده است و تعریف عبارت حوزه زمان به صورت زیر است:

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (۱۹)$$

پس از جایگزینی معادله ولتاژ مختلط (۱۶) و معادله جریان مختلط (۱۷) در معادله (۱۹) داریم.

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt} I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

و با تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = jLI_m e^{j\varphi}$$

آنگاه فیزور مطلوب چنین است:

$$V = j\omega LI \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ دیفرانسیل حوزه زمان (۱۹) تبدیل به معادلهٔ جبری (۲۰) در حوزه فرکانس شده است. رابطهٔ فیزوری در شکل ۱۳ـ۱۰(ب) ملاحظه می‌گردد. توجه کنید که زاویـه جـمله $j\omega L$ دقیقاً $+90°$ است و بنابراین در القاگر I باید نسبت به V به اندازهٔ $90°$ عقب باشد.

مثال ۴ـ۱۰

ولتاژ $8\angle -50°$ V را در فرکانس $\omega = 100$ rad/s به یک القاگر اعمال کرده و فیزور جریان و جریان در حوزه زمان را معین کنید.

از عبارتی که اخیراً برای القاگر به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{8\angle -50°}{j100\,(4)} = -j0.02\angle -50° = (1\angle -90°)(0.02\angle -50°)$$

یا

$$I = 0.02\angle -140° \quad A$$

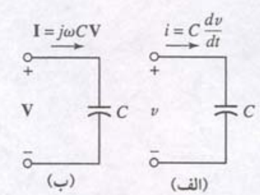
اگر جریان را در حوزه زمان نشان دهیم، داریم:

$$i(t) = 0.02\cos(100t - 140°)\ \ A = 20\cos(100t - 140°)\ \ mA$$

خازن

قطعه نهایی مورد بررسی خازن است. رابطه جریان ـ ولتاژ در حوزه زمان چنین است.

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$



شکل ۱۴ـ۱۰ رابطهٔ ولتاژ و جریان خازن در (الف) حوزهٔ زمان و (ب) حوزهٔ فرکانس.

عبارت معادل در حوزه فرکانس بـا انـتخاب کـمیت‌های مـختلط از مـعادلات (۱۵) و (۱۶) و مشتق‌گیری، حذف $e^{j\omega t}$ و شناسایی V و I به دست می‌آید. با اجرای مراحل فوق داریم:

$$I = j\omega CV \qquad (۲۱)$$

بنابراین I در یک خازن به اندازهٔ $90°$ از V پیشفاز است. البته این بدان معنی نیست که یک پاسخ جریان به اندازه یک چهارم پریود از ولتاژی که عامل تولید آن است، پیش است! ما پاسخ حالت ماندگار را مطالعه می‌کنیم و در آن ملاحظه می‌شود که مقدار ماکـزیمم جـریان کـه بـه وسیله افزایش ولتاژ ایجاد می‌شود، $90°$ زودتر از ماکزیمم ولتاژ اتفاق می‌افتد.

نمایش حوزه زمان و حوزه فرکانس در شکل ۱۴ـ۱۰(الف) و (ب) مقایسه شده‌اند. تا ایـن‌جا روابط V-I را برای هر سه عنصر غیرفعال به دست آوردیم. این نتایج در جدول ۱ـ۱۰ خلاصه شده و در ستون‌های مجاور روابط حوزه زمان v-i و حوزه فرکانس V-I نیز نشان داده شده‌اند.

جدول ۱ـ۱۰ مقایسهٔ روابط ولتاژ ـ جریان حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس.

حوزه فرکانس		حوزه زمان	
I → R, + V −	$V = RI$	$v = Ri$	i → R, + v −
I → $j\omega L$, + V −	$V = j\omega LI$	$v = L\frac{di}{dt}$	i → L, + v −
I → $1/j\omega C$, + V −	$V = \frac{1}{j\omega C}I$	$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$	i → C, + v −

همه عبارات فیزوری جبری‌اند. هر یک خطی نیز هستند و معادلات مربوط به القاگر و خازن شباهت زیادی به قانون اهم دارند. درحقیقت ما آن‌ها را چون قانون اهم به کار خواهیم برد.

قوانین کیرشهف برای فیزورها

قانون ولتاژ کیرشهف در حوزه زمان به صورت زیر است:

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

اکنون به سراغ اتحاد اولر می‌رویم تا هر جمله ولتاژ v_i را با ولتاژ مختلطی کـه بـخش حـقیقی یکسانی دارد جایگزین و $e^{j\omega}$ را حذف کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$$

به این ترتیب می‌بینیم قانون ولتاژ کیرشهف برای ولتاژهای فیزوری درست مثل حوزه زمـان معتبر است. می‌توان نشان داد که قانون جریان کیرشهف هم با بحثی مشابه، با فیزورها برقرار است. حال نگاهی مختصر به مدار RL سری، یعنی مـواردی کـه چـندین بـار آن را مـطالعه کـردیم، می‌اندازیم. مدار در شکل ۱۵ـ۱۰ نشان داده شده و جریان فیزور و چند ولتاژ فیزوری روی آن نشان داده شده است. در این‌جا پاسخ جریان حوزه زمان را با یافتن فیزور جریان پیدا می‌کنیم.

از قانون کیرشهف داریم:

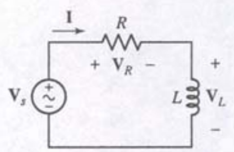
$$V_R + V_L = V_S$$

به کمک روابط I - V که اخیراً به دست آمد، داریم:

$$RI + j\omega LI = V_s$$

آنگاه جریان فیزور برحسب ولتاژ منبع V_s پیدا می‌شود:

$$I = \frac{V_s}{R + j\omega L}$$



شکل ۱۵ـ۱۰ مدار RL سری که ولتاژ فیزوری به آن اعمال شده است.

بگذارید منبع ولتاژی با دامنه V_m و زاویه فاز $0°$ برگزینیم. پس:

$$I = \frac{V_m\angle 0°}{R + j\omega L}$$

می‌توان با نوشتن فرم قطبی رابطه فوق، آن را به حوزه زمان انتقال داد:

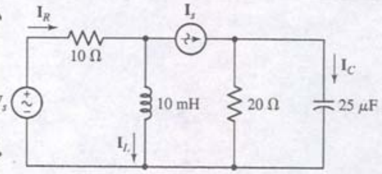
$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(-\tan^{-1}(\omega L/R))$$

و سپس با انجام مراحل آشنای قبل با روشی ساده همان نتیجه‌ای را به دست می‌آوریم که قبلاً در این فصل دیدیم.

تمرین

۱۰-۸ در مدار شکل ۱۶-۱۰، اگر $\omega = 1200$ rad/s، $I_L = 3 \angle 53°$ A و $I_C = 1.2 \angle 28°$ A باشد، (الف) I_s، (ب) V_s و (ج) $i_R(t)$ را پیدا کنید.

جواب: $2.33 \angle -31.0°$ A، $34.9 \angle 75.4°$ V و $3.99 \cos(1200t + 17.42)$ A.



شکل ۱۶-۱۰

۶-۱۰ امپدانس

رابطه جریان – ولتاژ برای سه عنصر غیرفعال در حوزه فرکانس با رعایت قرارداد علامت عناصر غیرفعال عبارتند از:

$$V = RI \qquad V = j\omega LI \qquad V = \frac{I}{j\omega C}$$

اگر این روابط را به صورت کسرهای فیزوری ولتاژ به جریان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{I} = R \qquad \frac{V}{I} = j\omega L \qquad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_R = R$$
$$Z_L = j\omega L$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

می‌بینیم که این نسبت‌ها کمیت‌های ساده‌ای از مقدار هر عنصر و در حالت القاگر و خازن، تابعی از فرکانس هستند. با این نسبت‌ها همچون مقاومت برخورد می‌کنیم با این تفاوت که آن‌ها کمیات مختلط‌اند و در عملیات جبری باید مختلط بودن آن‌ها را درنظرگرفت.

بیایید نسبت فیزور ولتاژ به فیزور جریان را **امپدانس** بنامیم و آن را با Z نشان دهیم. امپدانس کمیتی مختلط است که بُعد اهم دارد. امپدانس فیزور نیست و نمی‌توان آن را با ضرب در $e^{j\omega t}$ به فضای زمان منتقل کرد و بخش حقیقی آن را برداشت. درعوض، چنین تصور می‌کنیم که یک القاگر در حوزه زمان با القاکنایی L و در حوزه فرکانس با امپدانس $j\omega L$ نشان داده می‌شود. یک خازن در حوزه زمان ظرفیت C و در حوزه فرکانس امپدانس $1/j\omega C$ را دارا است. امپدانس مفهومی متعلق به حوزه فرکانس است نه به حوزه زمان.

ترکیب سری امپدانس‌ها

اعتبار و صحت دو قانون کیرشهف در حوزه فرکانس دالّ بر این‌است‌که امپدانس‌ها نیز با قواعدی همچون مقاومت می‌توانند به صورت سری یا موازی ترکیب شوند. مثلاً در $\omega = 10 \times 10^3$ rad/s، یک القاگر 5 mH سری با خازن 100 μF با یک امپدانس که مجموع امپدانس‌های هر کدام از آن‌ها است می‌تواند جایگزین شود. امپدانس القاگر برابر است با:

$$Z_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

امپدانس خازن برابر است با

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

توجه کنید که $\frac{1}{j} = -j$.

بنابراین امپدانس ترکیب سری برابر است با:

$$Z_{eq} = Z_L + Z_C = j50 - j1 = j49\ \Omega$$

امپدانس القاگرها و خازن‌ها تابعی از فرکانس است و این امپدانس معادل فقط در فرکانس $\omega = 10000$ rad/s معتبر است. اگر ما فرکانس را به مثلاً $\omega = 5000$ rad/s تغییر دهیم $Z_{eq} = j23\ \Omega$ خواهد شد.

ترکیب موازی امپدانس‌ها

ترکیب موازی القاگر 5 mH و خازن 100 μF در $\omega = 10000$ rad/s درست به همان طریق مقاومت‌های موازی صورت می‌گیرد:

$$Z_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

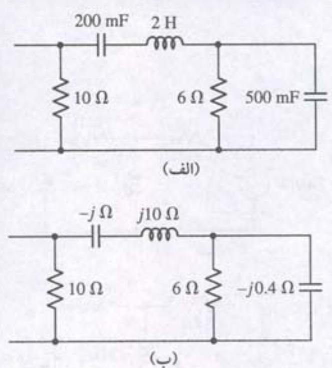
در $\omega = 5000$ rad/s معادل موازی برابر $-j2.17\ \Omega$ است.

عدد یا کمیت مختلط که امپدانس را نشان می‌دهد به فرم قطبی یا مختصات قائم قابل نمایش است. مثلاً امپدانس $50 - j86.6\ \Omega$ گوییم دارای مقاومت $50\ \Omega$ و رآکتانس (واکنش) $-86.6\ \Omega$ است. مؤلفه مقاومتی بخش حقیقی امپدانس و مؤلفه راکتیو بخش موهومی امپدانس است که اغلب با X نشان داده می‌شود. هر دو دارای واحد اهم هستند. در فرم مختصات قائم $Z = R + jX$ و در فرم قطبی $Z = |Z| \angle \theta$. بنابراین مقاومت دارای رآکتانس صفر است، درحالی‌که خازن‌ها و القاگرهای ایده‌آل مقاومت صفر دارند. این را مستقیماً می‌توان از فرم قطبی امپدانس نتیجه گرفت. دوباره $Z = 50 - j86.6\ \Omega$ را ملاحظه کنید که می‌توان آن را به صورت $100 \angle -60°\ \Omega$ هم نوشت. چون زاویه فاز صفر نیست، می‌دانیم که امپدانس یک مقاومت خالص در فرکانس ω نیست. چون $+90°$ هم نیست، القایی خالص هم نیست و به همین ترتیب چون خاصیت خازنی خالص هم ندارد، زاویه فاز $-90°$ نیست. آیا یک ترکیب سری یا موازی خازن و القاگر می‌تواند وجود داشته باشد و دارای رآکتانس صفر باشد؟ قطعاً. یک مدار ساده را درنظربگیرید که در آن $\omega = 1$ rad/s، $L = 1$ H و $C = 1$ F همه با $R = 1\ \Omega$ سری باشند. امپدانس معادل این شبکه برابر $Z = 1 + j(1)(1) - j/(1)(1) = 1\ \Omega$ می‌باشد و مثل این‌است‌که در مدار فقط یک مقاومت 1 اهم وجود دارد.

مثال ۵-۱۰

امپدانس معادل شکل ۱۷-۱۰(الف) را با فرض فرکانس کاری 5 rad/s به دست آورید.

حل را با تبدیل مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها به امپدانس‌های متناظرشان طبق شکل ۱۷-۱۰(ب) آغاز می‌کنیم.



شکل ۱۷-۱۰ (الف) شبکه‌ای که باید در آن امپدانس معادل گذاشت. (ب) به‌جای عناصر امپدانس آن‌ها در $\omega = 5$rad/s گذاشته شده است.

با بررسی شبکه حاصل، مشاهده می‌شود که امپدانس $6\ \Omega$ موازی با $-j0.4\ \Omega$ است. از ترکیب آن‌ها معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6 - j0.4} = 0.02655 - j0.3982\ \Omega$$

که با هر دو امپدانس $-j\ \Omega$ و $j10\ \Omega$ سری است. به این ترتیب داریم:

$$0.0265 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602\ \Omega$$

این امپدانس جدید موازی با $10\ \Omega$ است و بنابراین امپدانس معادل شبکه چنین خواهد بود.

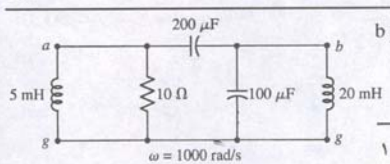
$$10\ ||(0.02655 + j8.602) = \frac{10(0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602}$$
$$= 4.255 + j4.929\ \Omega$$

به همین ترتیب می‌توان امپدانس را در فرم قطبی به صورت $6.511 \angle 49.20°\ \Omega$ هم نشان داد.

تمرین

۱۰-۹ با مراجعه به شکل ۱۸-۱۰، امپدانس ورودی Z_{in} بین پایه‌های (الف) a و g (ب) b و g (ج) a و b را حساب کنید.

جواب: $2.81 + j4.49\ \Omega$؛ $1.798 - j1.124\ \Omega$؛ $0.1124 - j3.82\ \Omega$.



شکل ۱۸-۱۰