

تمرین ترکیبیات – رمز و رمزی

محمدرضا کریمی

۲۸ آذر ۱۳۹۴

۱ سوالات

۱. یال‌های گراف کامل n رأسی را به دو رنگ رنگ کرده‌ایم ($n \geq 3$). ثابت کنید
- (آ) مسیری همیلتونی وجود دارد که یا تک‌رنگ است یا از دو کمان تک‌رنگ تشکیل شده است.
- (ب) اگر دوری تک‌رنگ به طول $2k + 1$ وجود داشته باشد، دوری تک‌رنگ به طول $2k$ هم پیدا می‌شود. ($k \geq 3$)
- (ج) اگر دوری تک‌رنگ به طول $2k$ وجود داشته باشد، یا دوری تک‌رنگ به طول $2k - 1$ وجود دارد یا دو زیرگراف کامل تک‌رنگ k رأسی مجزا. ($k \geq 3$)
- (د) اگر $2m - 1 \leq n \leq 6$ و دوری تک‌رنگ به طول m پیدا می‌شود.
۲. نقاط صفحه را به سه رنگ رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید دو نقطه‌ی هم‌رنگ به فاصله‌ی یک پیدا می‌شوند.
۳. نقاط صفحه را به ۲ رنگ رنگ کرده‌ایم. فرض کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ۱ و رئوس تک‌رنگ وجود دارد. ثابت کنید برای هر $a, b > 0$ که $a + b < 1 < |a - b|$ ، مثلثی تک‌رنگ با اضلاع $a, b, 1$ وجود دارد.
۴. ثابت کنید اگر نقاط صفحه را به دو رنگ رنگ کنیم، لزوماً مثلثی متساوی‌الاضلاع و تک‌رنگ به ضلع ۱ پیدا نخواهیم کرد، اما همیشه مثلث تک‌رنگ به طول اضلاع $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$ پیدا می‌کنیم.

۵. فرض کنید $a_1, \dots, a_{k^2+1}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد صحیح باشد. ثابت کنید همیشه زیردنباله‌ای یکنوا به طول $k+1$ وجود دارد.

۶. فرض کنید f تابعی صحیح‌مقدار باشد که روی مجموعه‌ی $\{1, \dots, 2^{n-1}\}$ تعریف شده است، و به این‌گونه است که برای هر i ، $1 \leq f(i) \leq i$. ثابت کنید دنباله‌ی

$$1 = a_1 < \dots < a_n \leq 2^{n-1}$$

موجود است که

$$f(a_1) \leq \dots \leq f(a_n)$$

همچنین ثابت کنید حکم بالا برای $1 - 2^{n-1}$ درست نیست.

۷. $N = k^n + 1$ نقطه در صفحه داده شده است. ثابت کنید همیشه می‌توان خطی شکسته ولی تقریباً صاف پیدا کرد، یعنی دنباله‌ای از نقاط مثل $a_0, \dots, a_k$ پیدا می‌شوند که تمام زاویه‌های $a_{i-1}a_i a_{i+1}$ حداقل $(1 - (1/n))\pi$ باشند.

۲ راهنمایی

استفاده از این بخش به شدت نهی می‌شود. تنها در صورتی راهنمایی یک سوال را بخوانید که روی آن به اندازه‌ی کافی فکر کرده‌اید.

۱. (آ) با استقرا روی n به راحتی اثبات می‌شود.

۲. –

۳. –

۴. –

۵. برای هر a_i ، طولانی‌ترین زیردنباله‌ی صعودی که از a_i شروع می‌شود را نسبت دهید.

۶. $t(x)$ را بیشترین طول دنباله‌ی به شکل $x = a_1 < a_2 < \dots$ بگیرید که $f(a_1) < f(a_2) < \dots$ ثابت کنید اگر $t(x) \geq t(1) - k$ ، $f(x) \leq 2^k$ ($0 \leq k \leq t(1) - 1$)

۷. پاره‌خط (p, q) تشکیل شده از نقاط را رو به بالا جهت‌دهی کنید و آن را به رنگ i درآورید، اگر زاویه‌ی آن با قسمت مثبت محور x ها بین $\frac{i}{n}\pi$ و $\frac{i+1}{n}\pi$ باشد.

مگو دیگر که حافظ نکته‌دان است
که ما دیدیم و محکم جاهلی بود

موفق باشید