درس پنجم (کاربرد مشتق)

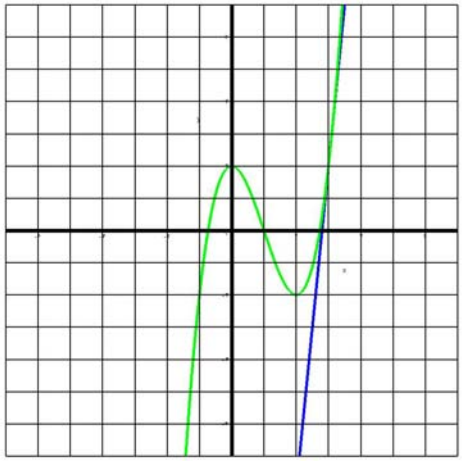
در این درس تعدادی از کاربردهای مشتق را شرح می‌دهیم.

۱) شیب تابع: همان‌طور که قبلاً گفته شد ما با کمک مشتق می‌توانیم شیب تابع را در هر نقطه‌ی به‌دست آوریم.

مثال ۱۵۸. شیب تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱}$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بیابید.

حل:
$$f'(x) = ۲x\frac{۱}{۲\sqrt{x^۲+۱}} \Rightarrow f'(۲) = ۲ \times ۳ \times \frac{۱}{۲\sqrt{۳^۲+۱}} = \frac{۶}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

۲) معادله‌ی خط مماس بر تابع از نقطه‌ای روی نمودار تابع: با یک نقطه روی نمودار تابع می‌توانیم شیب خط مماس در آن نقطه را بیابیم و به کمک شیب و یک نقطه می‌توانیم معادله‌ی خط مماس را محاسبه کنیم.



مثال ۱۵۹. معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بیابید.

حل:
نقطه‌ی روی تابع $f(۳) = ۳^۳ - ۳ \times ۳^۲ + ۲ = ۲ \Rightarrow (۳, ۲)$

شیب تابع $f'(x) = ۳x^۲ - ۶x \Rightarrow f'(۳) = ۳ \times ۳^۲ - ۶ \times ۳ = ۱۰$

معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = ۱۰x - ۲۸$

در شکل روبه‌رو تابع با رنگ سبز و خط مماس با رنگ آبی رسم شده است.

۳) معادله‌ی خط مماس بر شکل از نقطه‌ای روی شکل: مشابه کاربرد قبلی است فقط از مشتق ضمنی استفاده می‌شود.

مثال ۱۶۰. معادله‌ی خط مماس بر شکل $xy + ۵y^۲ = ۷$ را در نقطه‌ی $(۲, ۱)$ بیابید.

حل:
$$xy + ۵y^۲ = ۷ \Rightarrow ۱ \times y + xy' + ۵y'۲y = ۰ \Rightarrow ۱ \times ۱ + ۲y' + ۵y' \times ۲ \times ۱ = ۰ \Rightarrow ۱ + ۱۲y' = ۰$$

$\Rightarrow y' = \frac{-۱}{۱۲}$ شیب شکل $\Rightarrow y = \frac{-۱}{۱۲}x + \frac{۷}{۶}$ معادله‌ی خط مماس بر شکل

۴) معادله‌ی خط عمود بر تابع و شکل‌ها از نقطه‌ای روی نمودار تابع یا شکل: تفاوت خط عمود (قائم) با خط مماس این است که باید شیب عکس و قرینه شود. در زیر مثال‌های ۱۵۹ و ۱۶۰ برای خط عمود حل شده است.

مثال ۱۶۱. معادله‌ی خط عمود بر تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بیابید.

حل:
نقطه‌ی روی تابع $f(۳) = ۳^۳ - ۳ \times ۳^۲ + ۲ = ۲ \Rightarrow (۳, ۲)$

شیب تابع $f'(x) = ۳x^۲ - ۶x \Rightarrow f'(۳) = ۳ \times ۳^۲ - ۶ \times ۳ = ۱۰$

$\Rightarrow -\frac{۱}{۱۰}$ شیب خط عمود $\Rightarrow y = -\frac{۱}{۱۰}x + \frac{۲۳}{۱۰}$ معادله‌ی خط عمود بر تابع

sabiran.blogsir

در شکل این مثال تابع با رنگ سبز و خط عمود با رنگ آبی رسم شده است.

مثال ۱۶۲. معادله‌ی خط قائم بر شکل $xy + 5y^2 = 7$ را در نقطه‌ی $(2, 1)$ بیابید.

حل: $xy + 5y^2 = 7 \Rightarrow 1 \times y + xy' + 5y'2y = 0 \Rightarrow 1 \times 1 + 2y' + 5y' \times 2 \times 1 = 0 \Rightarrow 1 + 12y' = 0$

$\Rightarrow y' = \frac{-1}{12}$ شیب شکل $\Rightarrow$ ۱۲ شیب خط عمود $\Rightarrow y = 12x - 23$ معادله‌ی خط عمود بر شکل

۵) قاعده‌ی هوپیتال:

با استفاده از این قاعده می‌توانیم مقدار حدهایی که برابر $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ هستند را به دست آوریم. کافی است صورت و مخرج چنین کسرهایی را مشتق بگیریم یعنی

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ۱۶۳. مقدار عددی $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1} = \frac{2\times 1}{1} = 2$$

این حد در مثال ۹۵ با روش تجزیه حل شده و همین جواب به دست آمده است.

مثال ۱۶۴. مقدار عددی $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-2}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)'}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)'} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2+2}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

این حد در مثال ۱۰۳ با روش ضرب در مزدوج حل شده و همین جواب به دست آمده است.

مثال ۱۶۵. مقدار عددی $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^4+3)}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{\infty}{\infty}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^4+3)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(\ln(x^4+3))'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{4x^3}{x^4+3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4+3}{4x^4} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^4}{4x^4}+\frac{3}{4x^4}\right)$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4x^4}\right) = \frac{1}{4}+\frac{3}{\infty} = \frac{1}{4}+0 = \frac{1}{4}$$

مثال ۱۶۶. مقدار عددی $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{\frac{1}{1+0^2}}{1} = 1$$

مثال ۱۶۷. مقدار عددی $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}}{1} = 1$$

مثال ۱۶۸. مقدار عددی $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

sohrabi۲۸۲.blog.ir

حل: چون حد $\frac{\infty}{\infty}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

همانطور که می‌بینید جای صورت و مخرج کسر عوض شد. یعنی اگر جای صورت و مخرج عدد را عوض کنیم عدد تغییر نمی‌کند پس مقدار حد برابر عدد یک است.

مثال ۱۶۹. مقدار عددی $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: چون حد $\frac{0}{0}$ است می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$$

در این‌جا دوباره حد $\frac{0}{0}$ است. بنابر نکته‌ی ۱۰۴ مقدار حد $\frac{1}{2}$ می‌شود. بدون استفاده از نکته‌ی ۱۰۴ نیز می‌توانیم دوباره از هوپیتال استفاده کنیم. ملاحظه بفرمایید.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۷۰. مقدار عددی $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: در حدهای توانی که هم پایه و هم توان متغیر دارد باید حتماً به صورت زیر از تابع ln استفاده کنیم. ابتدا مقدار حد را برابر A قرار می‌دهیم سپس مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=A\Rightarrow\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln A$$

این حد برابر $0\times\infty$ است در چنین حدهایی می‌توانیم با بردن صفر به مخرج حالت $\frac{\infty}{\infty}$ ایجاد کنیم و از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to0}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=\ln A$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\ln A\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{0}}=\ln A\Rightarrow0=\ln A\Rightarrow A=e$$

مثال ۱۷۱. مقدار عددی $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{2}{x}}$ را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بیابید.

حل: هم پایه و هم توان متغیر دارد. حد را مساوی A قرار می‌دهیم و با استفاده از ln محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\ln(1+x)=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x}=\ln A$$

حد $\frac{\infty}{\infty}$ است و هوپیتال می‌گیریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln(x+1))'}{(x)'}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{1+x}}{1}=\ln A\Rightarrow\frac{\frac{2}{1+\infty}}{1}=\ln A\Rightarrow\ln A=2\Rightarrow A=e^2$$

مثال ۱۷۲. مقدار عددی $\lim_{x\to0^+}x^x$ را بیابید.

حل: هم پایه و هم توان متغیر دارد. حد را مساوی A قرار می‌دهیم و با استفاده از ln محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to0^+}x^x=A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\ln x^x=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x\ln x=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\ln A$$

حد $\frac{\infty}{\infty}$ است و هوپیتال می‌گیریم.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{x}=\ln A\Rightarrow\lim_{x\to0^+}-x=\ln A\Rightarrow0=\ln A\Rightarrow A=e^0=1$$

sohrabi1976.blog.ir

۶) تابع صعودی و نزولی:

اگر مشتق تابع در یک فاصله مثبت باشد آنگاه تابع صعودی است و اگر منفی باشد تابع نزولی می‌شود. با تعیین علامت مشتق می‌توانیم صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص کنیم.

مثال ۱۷۳. با استفاده از مشتق و رسم جدول مشخص کنید تابع $f(x) = x^۲ + ۶x - ۱$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

حل: مشتق تابع $f'(x) = ۲x + ۶$ است و $۲x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۳$

	$-\infty$		-۳		$+\infty$
$f(x)=x^۲+۶x-۱$		نزولی	مینیمم	صعودی	
$f'(x)=۲x+۶$		$-$	صفر	$+$	

با توجه جدول تعیین علامت که در روبه رو رسم شده است تابع در بازه‌ی $(-\infty, -۳)$ نزولی و در بازه‌ی $(-۳, +\infty)$ صعودی است

مثال ۱۷۴. با استفاده از مشتق و رسم جدول مشخص کنید تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ - ۱۲x + ۱$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

حل: مشتق تابع $f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x - ۱۲$ است که وقتی برابر صفر قرار دهیم یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ریشه‌های ۱ و ۲ می‌شود. با توجه جدول تعیین علامت که در روبه رو رسم شده است تابع در بازه‌های $(-\infty, ۱)$ و $(۲, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(۱, ۲)$ نزولی است

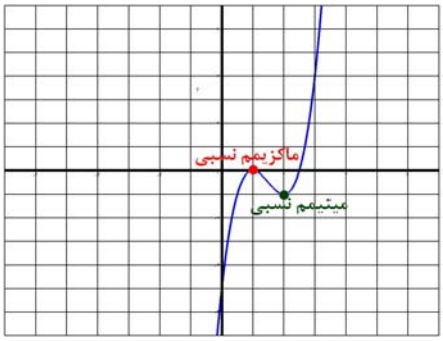
	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۱$		صعودی	ماکزیمم	نزولی	مینیمم	صعودی	
$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲$		$+$		$-$		$+$	

۷) ماکزیمم و مینیمم نسبی و قاعده مشتق دوم:

تعریف ۱۷۵. اگر از مشتق دوباره مشتق بگیریم مشتق دوم نام دارد و آن را با $f''(x)$ نشان می‌دهد. به همین صورت اگر از مشتق دوم، مشتق بگیریم مشتق سوم نام دارد و با نماد $f^{(۳)}(x)$ نشان دهید به همین صورت مشتق چهارم با نماد $f^{(۴)}(x)$ نمایش داده می‌شود و می‌توان مشتق‌های مراتب بالاتر را نیز تعریف کرد

نکته ۱۷۶. اگر در یک نقطه از تابع مشتق برابر صفر و مشتق دوم مثبت باشد آن نقطه مینیمم نسبی و اگر مشتق دوم منفی باشد آن نقطه ماکزیمم نسبی است.

مثال ۱۷۷. ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x - ۵$ را بیابید.



حل: مشتق تابع $f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۲$ است که ریشه‌های آن اعداد ۱ و ۲ است.

$$f''(x) = ۱۲x - ۱۸ \Rightarrow \begin{cases} f''(۱) = ۱۲ \times ۱ - ۱۸ = ۱۲ - ۱۸ = -۶ \\ f''(۲) = ۱۲ \times ۲ - ۱۸ = ۲۴ - ۱۸ = ۶ \end{cases}$$

با توجه به قاعده‌ی مشتق دوم نقطه‌ی $(۱, f(۱)) = (۱, ۰)$ ماکزیمم نسبی و مقدار ماکزیمم نسبی برابر عدد صفر است. همچنین نقطه‌ی $(۲, f(۲)) = (۲, -۱)$ مینیمم نسبی و مقدار مینیمم نسبی برابر -۱ است. در شکل مقابل این تابع رسم شده است.

sohrabi.blog.ir