+ کلید

آزمون پایانی ریاضیات مهندسی پیشرفته (بخش احتمال) - دانشگاه صنعتی قوچان - زمان: ۸۰ دقیقه

۱- رابطه $Y = e^X$ را بین دو متغیر تصادفی در نظر بگیرید.
الف) cdf و pdf متغیر تصادفی Y را بر حسب cdf و pdf متغیر تصادفی X به ازای $y > ۰$ و $y \leq ۰$ تعیین نمایید.
ب) رابطه ای برای محاسبه $P[۱ < Y \leq ۲ \quad or \quad ۲ < X \leq ۳]$ بنویسید. (محاسبه لازم نیست)
ج) اگر داشته باشیم $X \sim G(m, \sigma^۲)$، pdf متغیر تصادفی Y را تعیین نمایید.
۲- متغیر تصادفی لاپلاسین X را با pdf زیر در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{۲} e^{-\alpha|x|}; \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha > ۰$$

الف) احتمال $P[|X| > ۱]$ را بدست آورید.
ب) $E[X]$ را تعیین نمایید.
ج) $E[X^۲]$ را بدست آورید. (با جزئیات محاسبات)
۳- یک تاس fair دو بار ریخته می شود. نتیجه اولین آزمایش را $X_۱$ و نتیجه دومین آزمایش را $X_۲$ می نامیم. متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = |X_۱ - X_۲|$ تعریف می کنیم. مطلوبست:
الف) تعیین فضای نمونه Y.
ب) محاسبه $P[Y \leq ۴]$.
ج) محاسبه $P[X_۲ = ۱ | Y = ۲]$.
۴- شش عدد به تصادف و بطور یکنواخت در بازه $(۰, ۱)$ انتخاب می شوند. مطلوبست محاسبه احتمال رخدادهای زیر:
$E_۱ = \{$ " از سه عدد اول انتخابی، دو تا در بازه $(۰, \frac{۱}{۲})$ باشد. عددهای چهارم و ششم در بازه $(۰/۹, ۱)$ بوده و عدد پنجم کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد. " $\}$
$E_۲ = \{$ " عدد سوم بیشتر از عدد چهارم باشد. " $\}$

موفق باشید، قربان صباغ
۱۶ آبان ۱۳۹۶

کوییز دوم ریاضیات مهندسی پیشرفته (بخش احتمال) - دانشگاه مهندسی فناوری های نوین قوچان
زمان: ۲۵ دقیقه

۵- در یک سیستم مخابراتی نرخ ارسال $۱۰^۶$ بیت بر ثانیه است. اگر احتمال خطای دریافت هر بیت $۱۰^{-۵}$ باشد، احتمال آنکه در بازه زمانی $\frac{۱}{۲}$ ثانیه ۲ خطا یا کمتر رخ دهد چقدر است؟
۶- در یک سیستم انتقال باینری، برای ارسال بیت ۰ ولتاژ ۳− ولت، و برای ارسال بیت ۱ ولتاژ ۳+ ولت ارسال می گردد. سیگنال دریافتی به نویز گوسی N با pdf $f_N(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-x^۲/۲\sigma^۲}$ آغشته می شود. با فرض آنکه احتمال ارسال بیتها برابر بوده و متغیر تصادفی ورودی و خروجی را به ترتیب با X و Y نشان دهیم و داشته باشیم $Y = X + N$
الف) CDF متغیر تصادفی Y را بر حسب CDF متغیر تصادفی N بیان نمایید.
ب) pdf متغیر تصادفی Y را بر حسب pdf متغیر تصادفی N بیان نمایید.

موفق باشید، قربان صباغ

حل سوالات پایانترم ریاضیات مهندسی پیشرفته

$\boxed{1}$

الف) $Y = e^X$ $\qquad$ $P[Y \leq y] = 0 \; ; \; \text{for } y \leq 0$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[e^X \leq y] = P[X \leq \ln y] = F_X(\ln y) \qquad (\text{برای } y<0 \text{ صفر است})$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) \quad ; \quad \text{for } y > 0$$

ب) $$P[1 \leq Y \leq 2 \text{ or } 2 \leq X \leq 3] \overset{\text{disjoint}}{=} P[1 \leq Y \leq 2] + P[2 \leq X \leq 3]$$

$$= F_Y(2) - F_Y(1) + F_X(3) - F_X(2) = F_X(\ln 2) - F_X(\ln 1) + F_X(3) - F_X(2)$$

ج) $X \sim G(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \xrightarrow[\text{الف}]{} f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(\ln y - m)^2/2\sigma^2}$$

$\boxed{2}$ $\qquad f_X(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \; ; \quad -\infty < x < \infty \; , \; \alpha > 0$

الف) $$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{فرد}} \underbrace{\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}}_{\text{زوج}}}_{\text{فرد}} dx = \cancel{2\frac{\alpha}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx} = 0$$

ب) $$P[|X| > 1] = 1 - P[|X| \leq 1] = 1 - \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}}_{\text{زوج}} dx = 1 - 2\frac{\alpha}{2}\int_0^1 e^{-\alpha x} dx =$$

$$= 1 - \alpha \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right|_0^1 = 1 + e^{-\alpha x}\Big|_0^1 = 1 + e^{-\alpha} - 1 = e^{-\alpha}$$

ج) $$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}}_{\text{زوج}} dx = \frac{\alpha}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \int_0^{\infty} x^2 \underbrace{e^{-\alpha x} dx}_{d\left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right)} =$$

$$= \cancel{\alpha}\left[x^2 \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\cancel{\alpha}}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \frac{e^{-\alpha x}}{-\cancel{\alpha}} dx \right] = (0 - 0) + \int_0^{\infty} 2x \underbrace{e^{-\alpha x} dx}_{d\left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right)} =$$

$$= 2x \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2 \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} dx = (0 - 0) + \frac{2}{\alpha} \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right|_0^{\infty} = \frac{-2}{\alpha^2}(0 - 1) = \frac{2}{\alpha^2}$$

$\boxed{3}$ $Y = |X_1 - X_2|$

X_1 نتیجه پرتاب بار اول تاس
X_2 " " " دوم "

الف) $S_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ب) $P[Y \le 4] = 1 - P[Y = 5]$

$Y = 5$ if $\begin{cases} X_1 = 6,\ X_2 = 1 \longrightarrow 1/36 \\ X_1 = 1,\ X_2 = 6 \xrightarrow{\text{یا}} 1/36 \end{cases}$

$= 1 - \frac{1}{18} = \boxed{\frac{17}{18}}$ $\Leftarrow P[Y=5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$= P[X_1 = 3, X_2 = 1] = 1/36$

2.) $P[X_2 = 1 \mid Y = 2] = \frac{P[X_2 = 1, Y = 2]}{P[Y = 2]} = \frac{P[Y = 2 \mid X_2 = 1]\, P[X_2 = 1]}{P[Y = 2]}$

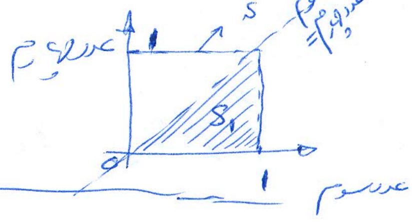
$P[Y = 2] = P[(X_1 = 6, X_2 = 4), (X_1 = 5, X_2 = 3), (X_1 = 4, X_2 = 2), (X_1 = 3, X_2 = 1),$
$(X_1 = 4, X_2 = 6), (X_1 = 3, X_2 = 5), (X_1 = 2, X_2 = 4), (X_1 = 1, X_2 = 3)] = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P[Y = 2 \mid X_2 = 1] = P[X_1 = 3] = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P[X_2 = 1 \mid Y = 2] = \frac{P[Y = 2 \mid X_2 = 1]\, P[X_2 = 1]}{P[Y = 2]} = \frac{1/6 \times 1/6}{2/9} = \frac{1/36}{2/9} = \boxed{\frac{9}{72}}$

$\boxed{4}$ $P[E_1] = \underbrace{\binom{3}{2}(1/3)^2(2/3)^1}_{\text{سه عدد اول}} \times \underbrace{(0.1)^2}_{\text{عدد چهارم و ششم}} \times \underbrace{1/2}_{\text{عدد پنجم}} = \cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{9}_3} \times \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{1}{900}}$

$P[E_2] = P\,\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}$



$\boxed{5}$ $\alpha = 10$ در یک ثانیه (X = خطاها در نیم ثانیه)

$\alpha = \frac{10}{2} = 5$ نیم ثانیه $\Longrightarrow P[X \le 2] = \sum_{k=0}^{2} e^{-5} \times \frac{5^k}{k!} = e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) = \frac{37}{2} e^{-5}$

$\boxed{6}$ الف) $P[Y \le y] = P[X + N \le y]$

$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[Y \le y, X = 3] + P[Y \le y, X = -3] = P[X + N \le y \mid X = 3] \times \frac{1}{2} + P[X + N \le y \mid X = -3] \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} P[N \le y - 3] + \frac{1}{2} P[N \le y + 3] = \frac{1}{2} F_N(y - 3) + \frac{1}{2} F_N(y + 3)$

ب) $f_Y(y) = \frac{1}{2} f_N(y - 3) + \frac{1}{2} f_N(y + 3) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y-3)^2/2\sigma^2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y+3)^2/2\sigma^2}$

موفق باشید، نوروز مبارک