بسم الله الرحمن الرحیم

نمونه سوالات حل شده درس خطوط انتقال مخابراتی

دانشگاه ازاد اسلامی واحد تهران جنوب

استاد دکتر محمد باقر علایی

–

برگرفته از سایت دکتر علایی

تهیه کننده :محسن درویش کسا

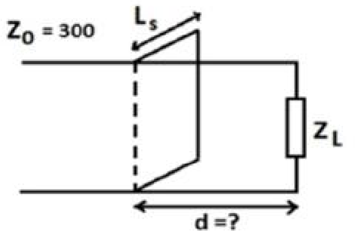
شماره دانشجویی9212912871

www.darvishkasa.blog.ir

سوالات امتحان جلسه هفتم 91/2/3

1-یک خط انتقال مخابراتی با مقادیر داده شده به یک بار Z_L متصل است. اگر با یک استاب اتصال کوتاه موازی تطبیق انجام شود، مطلوب است طول استاب و فاصله ی آن تا بار

$Z_L = 100\measuredangle -45° = 100e^{-j45}$



حل:

$$100e^{-j45} = 100Cos[-45] + 100jSin[-45] = 100(0.707 - 0.707j) = 70.7 - 70.7j$$
$$\bar{Z_L} = \frac{70.7 - 70.7j}{300} = 0.23 - j0.23 = P$$
$$\bar{y_L} = 2.2 + j2.2 = Q$$

ابتدا دایره ی واحد 1 را رسم می کنیم. نقطه ی P را روی دیاگرام مشخص کرده دایره به شعاع OP و مرکز O رسم می کنیم. شعاع OP را ادامه می دهیم تا دایره را در Q قطع کند. این دایره، دایره ی واحد 1 را در دو نقطه ی A و B قطع می کند.

فاصله ی Q تا دو نقطه ی A و B مقدار d و 'd را می دهد. برای محاسبه ی d و 'd نقاط Q , A , B را تا دایره ی بیرونی ادامه می دهیم. از Q تا A ساعتگرد حرکت می کنیم مقدار d بدست می آید. برای بدست آوردن 'd هم به همین ترتیب از Q تا B را ساعتگرد می شماریم.

$d = 0.47\lambda$
$d' = 0.11\lambda$

مقدار $\bar{y_{S1}}$ و $\bar{y_{S1}}'$ را نیز از روابط زیر بدست می آوریم:

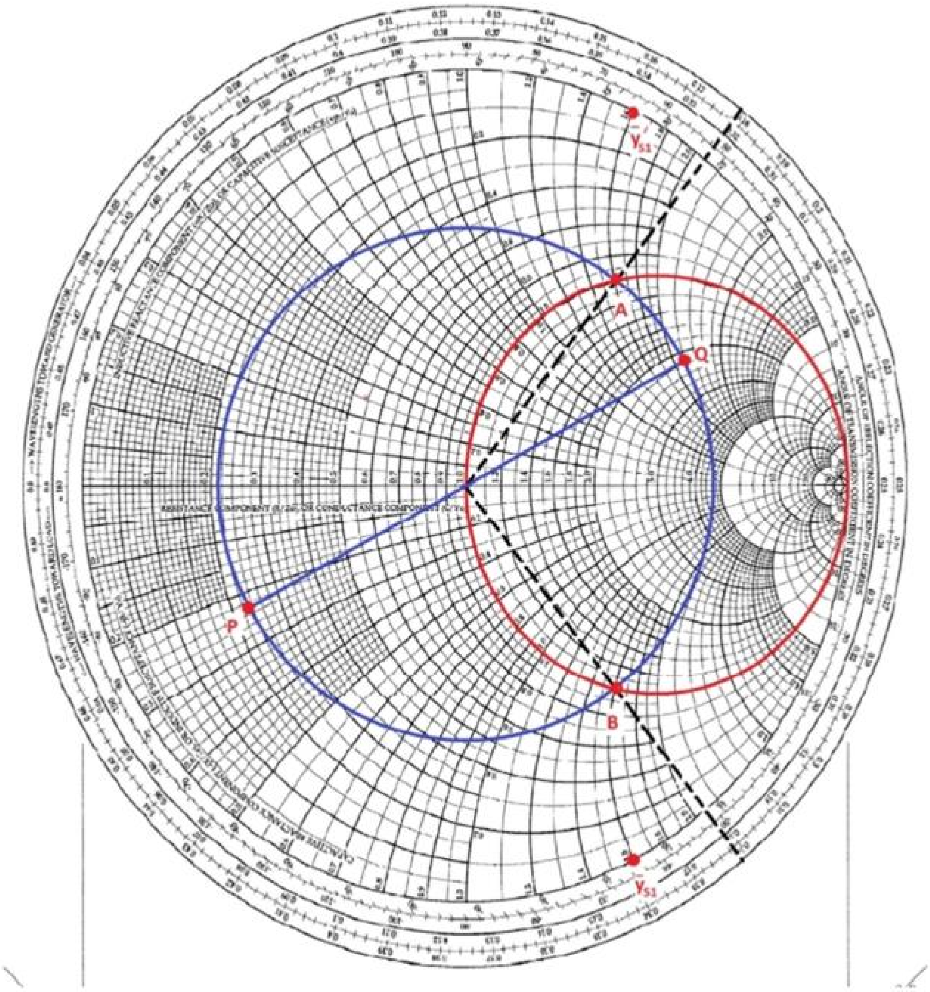
$\bar{y_1} = \bar{y_{s1}} + \bar{y_{d1}}$
$\bar{y_{S1}} = 1 - 1 - 1.6j \longrightarrow \bar{y_{S1}} = -1.6j$
$\bar{y_1}' = \bar{y_{s1}}' + \bar{y_{d1}}'$
$\bar{y_{S1}}' = 1 - 1 + 16j \longrightarrow \bar{y_{S1}}' = 1.6j$

این نقاط را روی دیاگرام مشخص می کنیم، از سمت راست محور افقی ساعتگرد تا این نقاط می شماریم، L_{S1} و L_{S1}' بدست می آیند.

$L_{S1} = 0.88\lambda$
$L_{S1}' = 0.411\lambda$

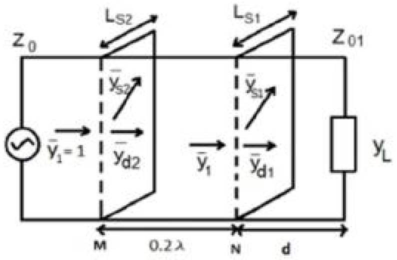
The Complete Smith Chart

Black Magic Design



2- امپدانس یک خط انتقال و امپدانس بار Z_L با مقادیر زیر داده شده است. تطبیق با دو استاب اتصال کوتاه انجام می شود اگر امپدانس مشخصه هر دو استاب $Z_{01} = Z_{02} = 100$ باشد و استاب اول به فاصله d از بار قرار گرفته باشد و فاصله دو استاب 0.2λ باشد و طول استاب دوم 0.15λ باشد، مطلوب است فاصله بار تا استاب اول و طول استاب اول

$Z_L = 200 + j100$



حل:

برای ترسم دیاگرام ابتدا نقطه P را روی شکل مشخص می کنیم سپس دایره ی OP را رسم می کنیم و این شعاع را ادامه می دهیم تا دایره را در نقطه ی Q قطع کند.

$$\bar{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = 1 + j0.5 = P$$
$$Q = 0.8 - j0.4$$

از سمت راست محور افقی ساعتگرد به اندازه ی 0.15λ روی دایره ی بیرونی حرکت می کنیم، این نقطه را می خوانیم: (1). اما بدلیل وجود Z_{02} (امپدانس مشخصه ی استاب دوم با امپدانس مشخصه ی خط متفاوت است). مقدار واقعی $\bar{y_{S2}}$ باید در ضریبی ضرب شود. به صورت زیر محاسبه می شود:

واقعی$\bar{y_{S2}} = -j0.725 \longrightarrow$ بدست آمده $\bar{y_{S2}} =$ واقعی$\bar{y_{S2}} \times \frac{Z_{02}}{Z_0} = -j0.35$

$\bar{y_{d2}} = 1 - \bar{y_{S2}} = 1 + j0.35$

دایره ی واحد 1 را منتقل می کنیم. به این ترتیب که مرکز این دایره را O' می نامیم، دایره ی OO' را رسم می کنیم. محل استاب دوم روی دایره واحد 1 است (چون تطبیق شده است). محل استاب اول روی دایره انتقال یافته 1 است. (یعنی از دایره 1 به اندازه ی 0.2λ به سمت بار (غیرساعتگرد)).
از سمت راست محور افقی غیرساعتگرد به اندازه ی 0.2λ حرکت کرده سپس مقدار نقطه بدست آمده را می خوانیم (2) از این نقطه به O وصل می کنیم، تقاطع این خط با دایره OO' را O'' می نامیم.
به شعاع OO'' و مرکز O'' یک دایره می زنیم. حال دایره ی 1 منتقل شده است.
حال $\bar{y_{d2}}$ را محاسبه کرده و مقدار آن را روی اسمیت چارت مشخص می کنیم :

$\bar{y_{d2}} = 1 - \bar{y_{S2}} = 1 + j0.35$

به شعاع $O\bar{y_{d2}}$ و مرکز O دایره می زنیم (دایره). این دایره، دایره ی انتقال یافته (دایره) را در دو نقطه قطع می کند بنابراین $\bar{y_1}'$, $\bar{y_1}$ بدست می آید:

$N = \bar{y_1} = 0.65 + j0.85$
$N' = \bar{y_1}' = 0.34 - j0.24$

می دانیم قسمت حقیقی $\bar{y_1}$ با قسمت حقیقی $\bar{y_{d1}}$ برابر است. برای بدست آوردن قسمت موهومی $\bar{y_{d1}}$ ($\bar{y_{d1}}$ همان y_L است که به اندازه ی d منتقل شده) باید روی دایره حقیقی ثابت 0.65 حرکت کنیم تا دایره SWR مربوط به Q را قطع کند.

$\bar{y_{d1}} = 0.65 + j0.2$

$\bar{y_{d1}}' = 0.65 - j0.2$

مقدار $\bar{y_{S1}}$ را روی شکل پیدا می کنیم، از سمت راست محور افقی به صورت ساعتگرد تا این نقطه را می خوانیم که همان مقدار L_{S1} بدست می آید. به همین ترتیب $\bar{y_{S1}}'$ را نیز روس شکل مشخص کرده و از سمت راست محور افقی تا این نقطه را خوانده تا مقدار L_{S1}' حاصل شود.

$\bar{y_{S1}} = \bar{y_1} - \bar{y_{d1}} = 0.65 + j0.85 - 0.65 - j0.2 = j0.65$

$L_{S1} = 0.332\lambda$

$\bar{y_{S1}}' = \bar{y_1}' - \bar{y_{d1}}' = 0.65 - j0.85 + j0.2 - 0.65 = j0.85$

$L_{S1}' = 0.352\lambda$

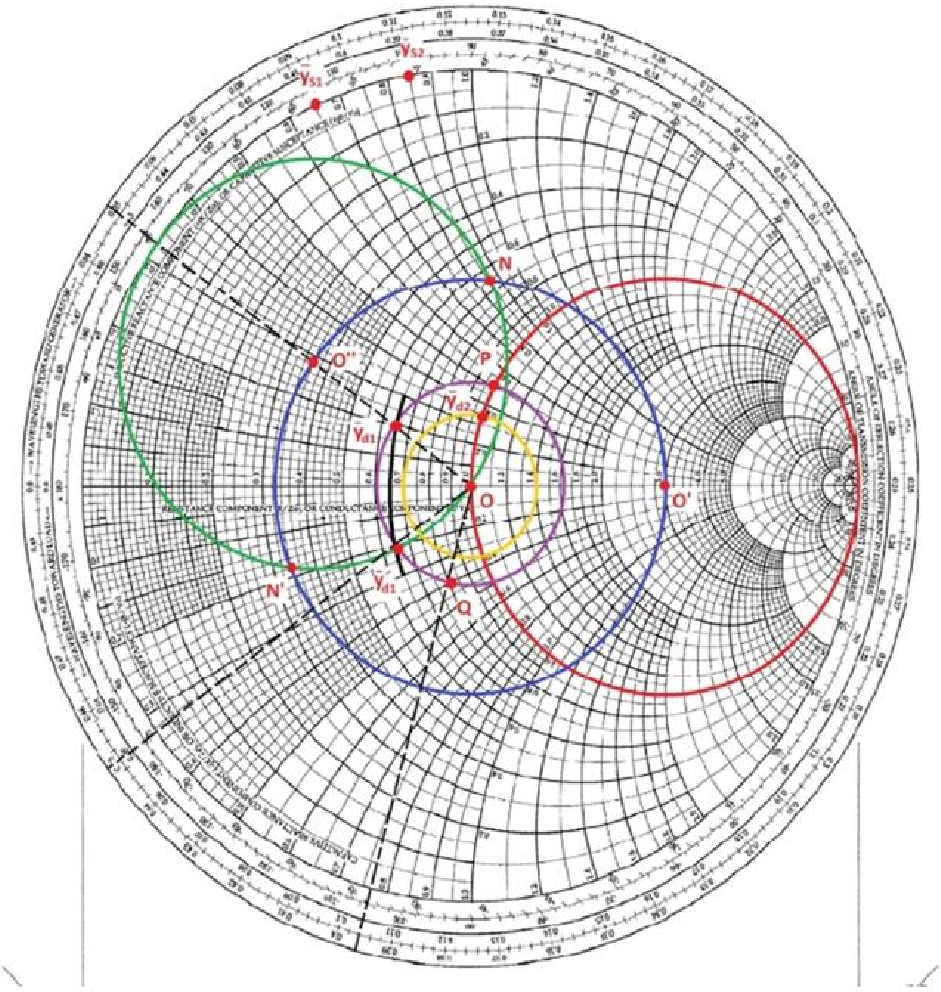
برای محاسبه d باید روی دایره ی SWR مربوط به y_L ، از نقطه ی Q به صورت ساعتگرد تا $\bar{y_{d1}}$ حرکت می کنیم (روی دایره خارجی)، فاصله ی بدست آمده همان مقدار d است. برای محاسبه ی d' نیز فاصله ی نقطه ی Q تا $\bar{y_{d1}}'$ را ساعتگرد از روی دایره خارجی می خوانیم.

$d = 0.154\lambda$

$d' = 0.54\lambda$

The Complete Smith Chart

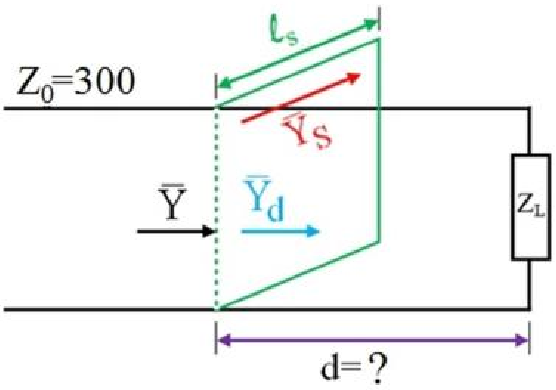
Black Magic Design



به نام خدا

خطوط انتقال مخابراتی　　　　　جلسه امتحان ۱۳۹۱/۲/ ۳

۱- یک خط انتقال مخابراتی با مقادیر داده شده به یک بار متصل است . اگر با یک استاب اتصال کوتاه موازی تطبیق انجام شود مطلوبست:



-طول استاب (ℓ_S=?)

-فاصله آن تا بار (d=?)

با فرض:

$Z_L = 100 \measuredangle{-45} = 100\ e^{-j45}$

$Z_0 = 300\Omega$

حل:

۱- ابتدا Z_L را از حالت مختصات قطبی به صورت موهومی $Z_L = R + JX$ می نویسیم.

$$e^{-j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$Z_L = 100\ e^{-j45} = 100\cos(-45) + 100\ j\sin(-45)$$

$$Z_L = 100\frac{\sqrt{2}}{2} + 100\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

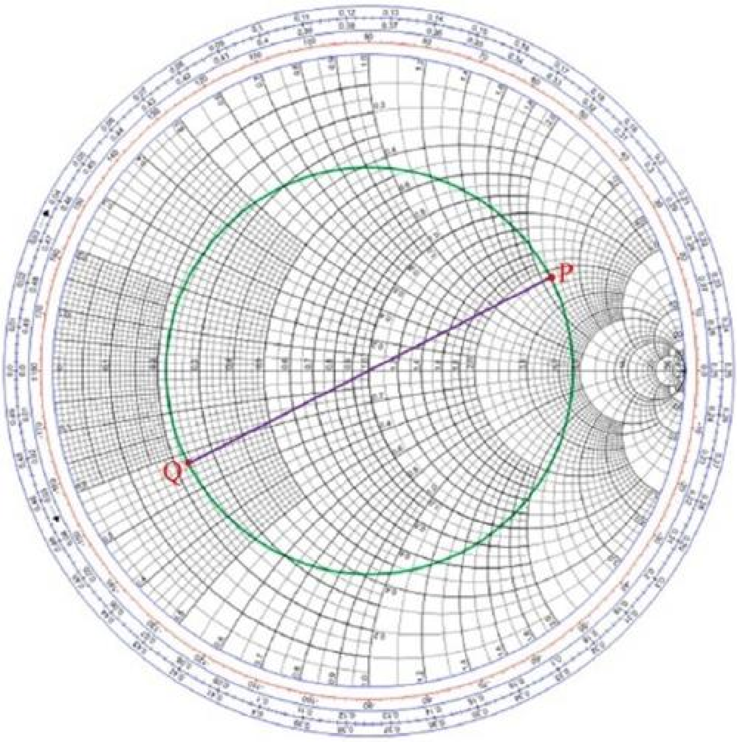
$$Z_L = 70.71 - j70.71$$

۲- حالا طبق معمول همیشه ابتدا نرمالیزه و سپس را به دست می آوریم:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{70.71 - j\,70.71}{300} = 0.23 - j0.23$$

و با رسم دایره SWR با توجه به شکل زیر مقدار $\bar{Y}_L$ به دست می‌آید:

$\bar{Y}_L = 2.2 + j2.2$



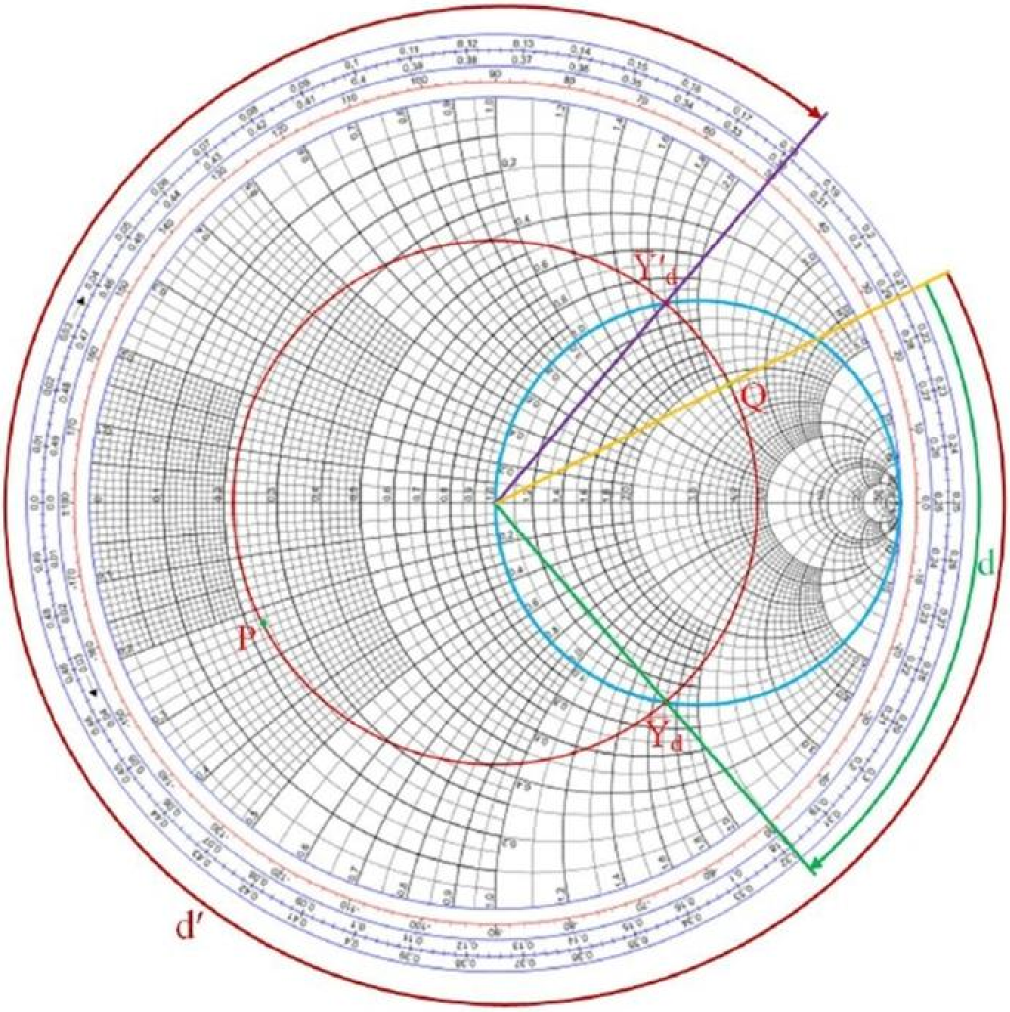
۳- دایره SWR ، دایره واحد را در دو نقطه A و B قطع می نماید (شکل صفحه بعد)، که با توجه به آنها دو مقدار برای $\bar{Y}_d$ به دست می آید که عبارتند از: $\bar{Y}_d = 1 - j1.7$

$\bar{Y}'_d = 1 + j1.7$

۴- اکنون با توجه به شکل صفحه بعد مقدار d و d' را محاسبه می نماییم. بدین منظور از نقطه Q در جهت ساعتگرد حرکت می نماییم تا به $\bar{Y}_d$ و $\bar{Y}'_d$ برسیم:

$d = 0.318\lambda - 0.212\lambda = 0.106\lambda$

$d' = 0.5\lambda - (0.212\lambda - 0.181\lambda) = 0.469\lambda$



۵- با توجه به مقادیر به دست آمده برای $\overline{Y}_d$ و رابطه زیر مقدار $\overline{Y}_S$ را تعیین می کنیم.

$\overline{Y}_1=1$

$\overline{Y}_1 = \overline{Y}_S + \overline{Y}_d \Longrightarrow \overline{Y}_S = \overline{Y}_1 - \overline{Y}_d$

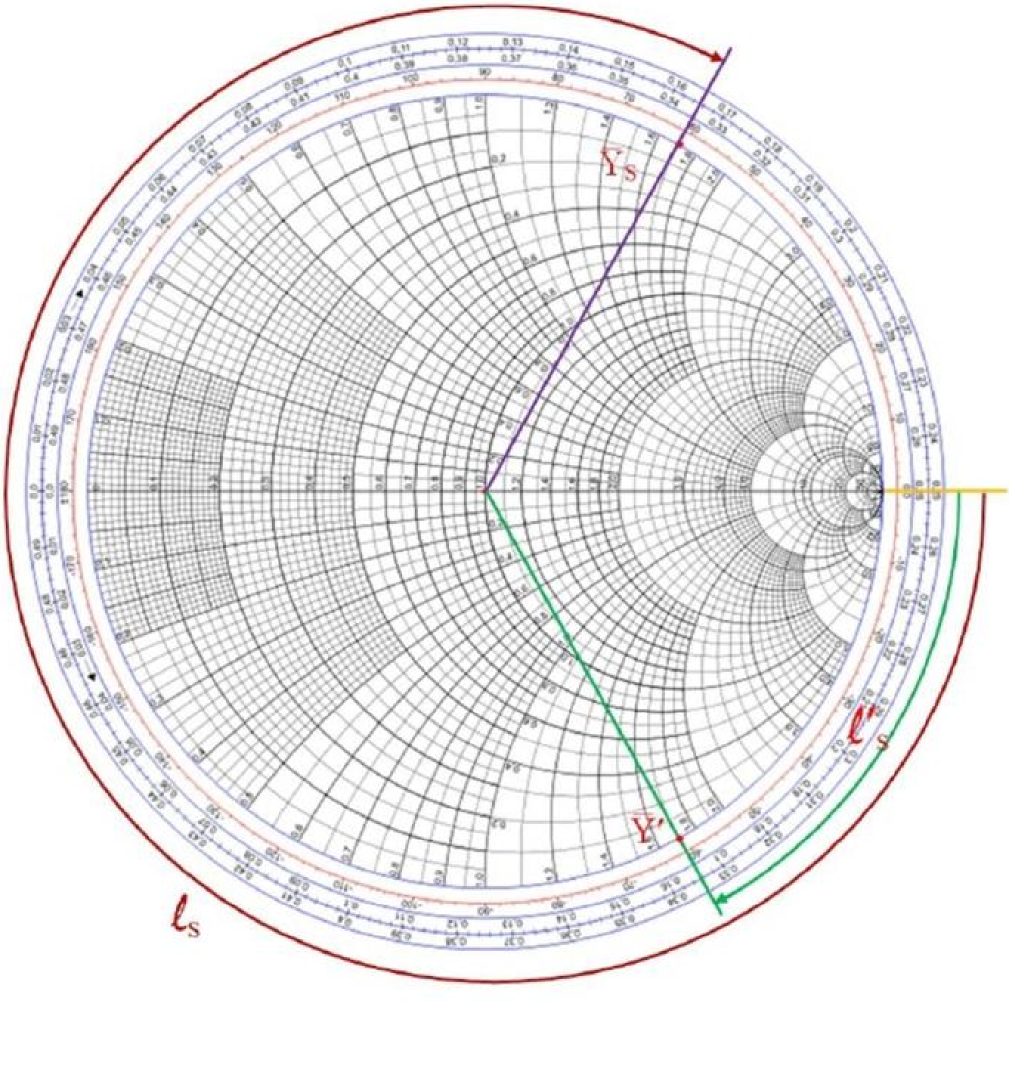
$\overline{Y}_S = 1 - (1 - j1.7) = j\,1.7$

$\overline{Y}'_S = 1 - (1 + j1.7) = -j\,1.7$

۶- اکنون نقاط $\bar{Y}_S$ و $\bar{Y}'_S$ را روی نمودار تعیین می کنیم . از سمت راست محور افقی حرکت می نماییم تا به نقاط فوق برسیم. مقادیر ℓ_S و ℓ'_S برابر خواهند بود با:

$$\ell_S = 0.5\lambda - (0.25\lambda - 0.165\lambda) = 0.415\lambda$$

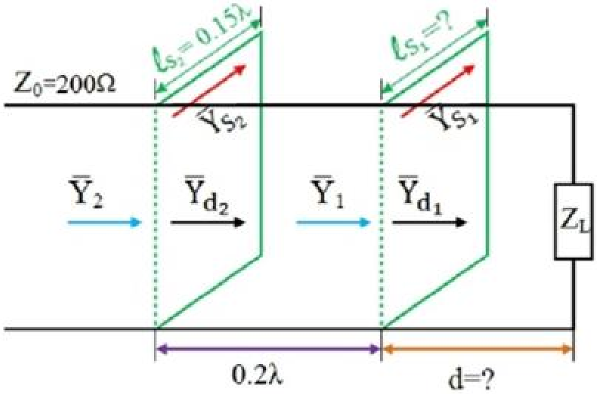
$$\ell'_S = 0.335\lambda - 0.25\lambda = 0.085\lambda$$



به نام خدا

خطوط انتقال مخابراتی　　　　　　　　جلسه امتحان ۳ /۱۳۹۱/۲

۲- امپدانس یک خط انتقال Z_0 و امپدانس بار Z_L با مقادیر زیر داده شده اند.
تطبیق با دو استاب اتصال کوتاه انجام می شود . اگر امپدانس مشخصه هر دو استا ب $Z_{0_1} = Z_{0_2} = 200\Omega$ باشد و استاب اول به فاصله d از بار قرار گرفته باشد و فاصله دو استاب 0.2λ و طول استاب دوم $\ell_{S_2} = 0.15\lambda$ باشد، مطلوبست:



الف) فاصله بار تا استاب اول d

ب)طول استاب اول؟ $\ell_{S_1} =$

$Z_0=200\Omega$

$Z_L= 200 + j100$

مراحل حل مسئله به ترتیب زیر است:

۱- محاسبه Z_L نرمالیزه، رسم دایره SWR و به دست آوردن $\bar{Y}_L$

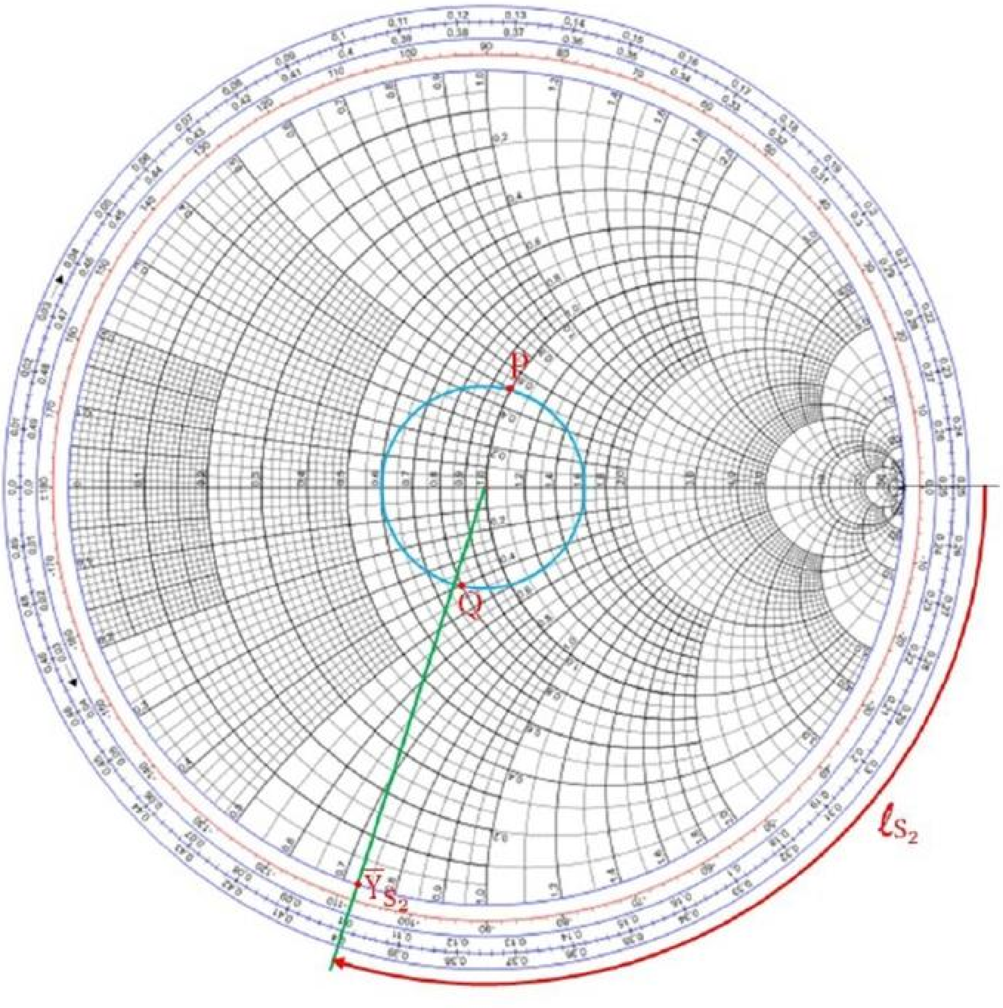
$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{200 + j100}{200} = 1 + j0.5$$

$\bar{Y}_L = 0.8 - j0.4$

۲- از روی $\bar{Y}_{S_2}$ مقدار ℓ_{S_2} را به دست می آوریم . بدین منظور از سمت راست محور افقی به اندازه طول استاب دوم (یعنی 0.15λ) در جهت ساعتگرد حرکت می نماییم و

مقدار $\overline{Y}_{S_2}$ را از روی نمودار می خوانیم (شکل زیر) که برابر است با: $\overline{Y}_{S_2} = -j0.73$

باید توجه داشت که این مقدار، $\overline{Y}_{S_2}$ واقعی می باشد.



۴- اما مقدار امپدانس مشخصه استاب دوم (یعنی Z_{0_2}) با Z_0 خط متفاوت است. بنابراین مقدار $\overline{Y}_{S_2}$ واقعی با $\overline{Y}_{S_2}$ فرق می کند. برای به دست آوردن $\overline{Y}_{S_2}$ از رابطه زیر استفاده می نماییم.

$$\bar{Y}_{S_2}\text{ واقعی} = \bar{Y}_{S_2} \times \frac{Z_0}{Z_{0_2}} \qquad \bar{Y}_{S_2} = \bar{Y}_{S_2}\text{ واقعی} \times \frac{Z_{0_2}}{Z_0}$$

بنابراین داریم:

$$\bar{Y}_{S_2} = -j0.73 \times \frac{100}{200} = -j0.365$$

۵- اکنون $\bar{Y}_{d_2}$ را با توجه به مقدار $\bar{Y}_{S_2}$ و رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\bar{Y}_2 = \bar{Y}_{S_2} + \bar{Y}_{d_2} \Longrightarrow \bar{Y}_{d_2} = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_{S_2}$$

$$\bar{Y}_{d_2} = 1 - \bar{Y}_{S_2} = 1-(-j0.365)$$

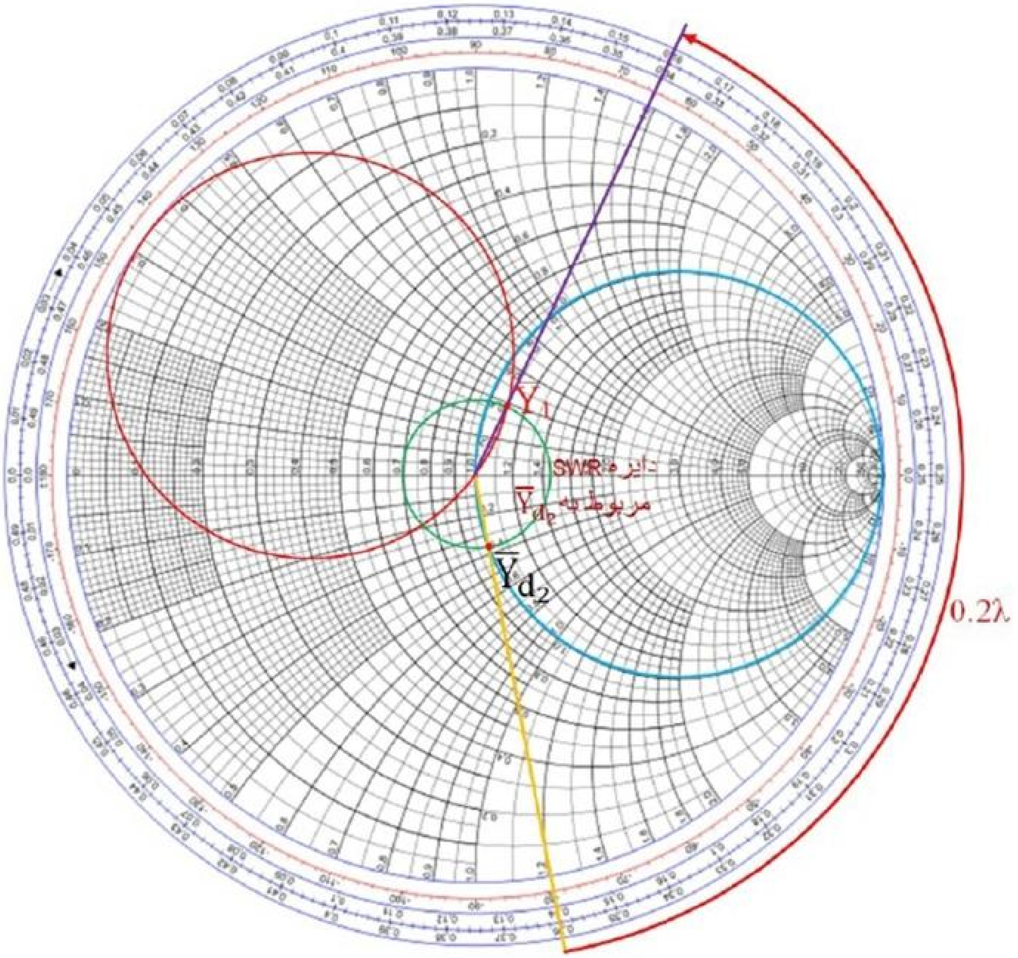
$$\bar{Y}_{d_2} = 1 + j0.365$$

۶- برای تعیین مقدار $\bar{Y}_1$ ابتدا دایره واحد ۱ (دایره آبی) را به اندازه $0.2\,\lambda$ به سمت بار (خلاف ساعتگرد) انتقال می دهیم. سپس با انتقال $\bar{Y}_{d_2}$ به اندازه $0.2\,\lambda$ در جهت خلاف ساعتگرد مقدار $\bar{Y}_1$ را به دست می آوریم.

اول دایره واحد را به اندازه 0.2λ انتقال دهیم. (دایره قرمز)

برای انتقال $\bar{Y}_{d_2}$ به اندازه 0.2λ به سمت بار ابتدا باید دایره SWR آن (دایره سبز) را رسم کنیم. سپس خلاف ساعتگرد به اندازه 0.2λ آن را جا به جا کنیم. $\bar{Y}_1$ به دست خواهد آمد. (حتما $\bar{Y}_1$ تقاطع دایره SWR مربوط به $\bar{Y}_{d_2}$ با دایره انتقال یافته خواهد بود، اما نقطه تقاطعی است که درست به فاصله 0.2λ از $\bar{Y}_{d_2}$ قرار دارد. در این سوال با توجه به شکل نقطه تقاطع بالایی می باشد.)

در این سوال با توجه به شکل صفحه بعد داریم: $\bar{Y}_1 = 1.1 + j\,0.38$



۷- تعیین $\overline{Y}_{d_1}$: برای تعیین مقدار $\overline{Y}_{d_1}$ باید دایره R ثابت مربوط به $\overline{Y}_1$ را ادامه دهیم تا دایره اصلی SWR (که P و Q روی آن قرار دارند) قطع نماید. با توجه به شکل صفحه بعد دو مقدار برای $\overline{Y}_{d_1}$ به دست خواهد آمد که عبارتند از:

$\overline{Y}_{d_1}=1.1 + j0.5$

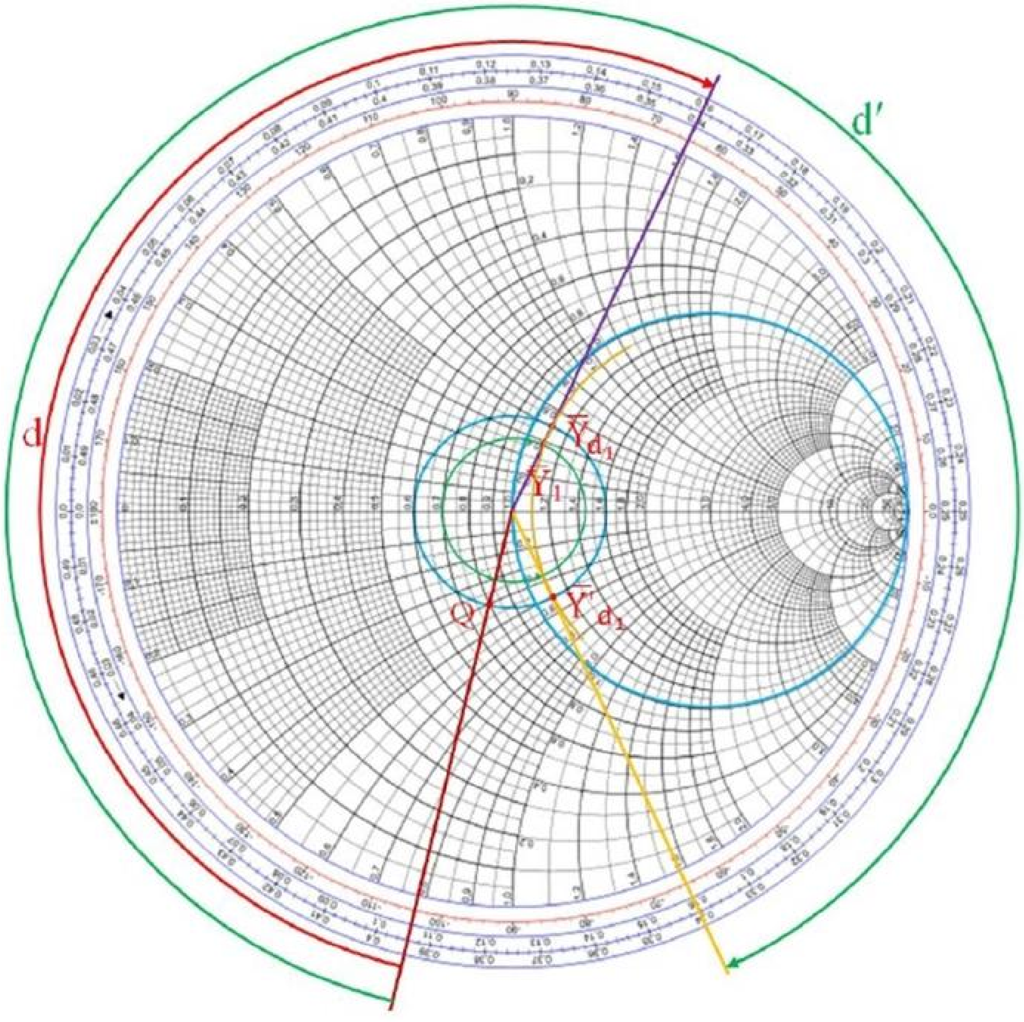
$\overline{Y}'_{d_1}=1.1 - j0.5$

۸- تعیین d: اکنون با توجه به مقادیر $\overline{Y}_{d_1}$ و $\overline{Y}'_{d_1}$ مقدار d و d' را به دست می آوریم .

بدین منظور از نقطه Q در جهت ساعتگرد حرکت می کنیم تا به نقاط $\overline{Y}_{d_1}$ و $\overline{Y}'_{d_1}$ برسیم. با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:

$$d = 0.16\lambda + 0.5\lambda - 0.394\lambda = 0.266\lambda$$

$$d' = 0.5\lambda - (0.394 - 0.34)\,\lambda = 0.446\lambda$$



۹- تعیین $\overline{Y}_{S_2}$: با داشتن مقدار $\overline{Y}_{d_1}$ و $\overline{Y}'_{d_1}$ می توان $\overline{Y}_{S_2}$ را از رابطه ذیل محاسبه نمود.

$$\overline{Y}_1 = \overline{Y}_{S_1} + \overline{Y}_{d_1} \Longrightarrow \overline{Y}_{S_1} = \overline{Y}_1 - \overline{Y}_{d_1}$$

$$\overline{Y}_{S_1} = 1.1 + j\,0.38 - (1.1 + j0.5) = -\,j\,0.12$$

$$\overline{Y'}_{S_1} = 1.1 + j\,0.38 - (1.1 - j0.5) = j\,0.88$$

10- تعیین طول استاب اول (ℓ_{S_1}): چون امپدانس مشخصه استاب اول نیز با امپدانس مشخصه خط متفاوت است، $\overline{Y}_{S_1}$ با $\overline{Y}_{S_1}$ واقعی یکی نیست، بنابراین ابتدا باید $\overline{Y}_{S_1}$ واقعی را از رابطه زیر محاسبه نموده، سپس برای یافتن ℓ_{S_1} نقطه $\overline{Y}_{S_1}$ را روی نمودار مشخص کوده و فاصله آن را از سمت راست محور افقی تعیین نماییم تا ℓ_{S_1} به دست آید. خواهیم داشت:

$$\overline{Y}_{S_1}\text{ واقعی} = \overline{Y}_{S_1} \times \frac{Z_0}{Z_{0_1}}$$

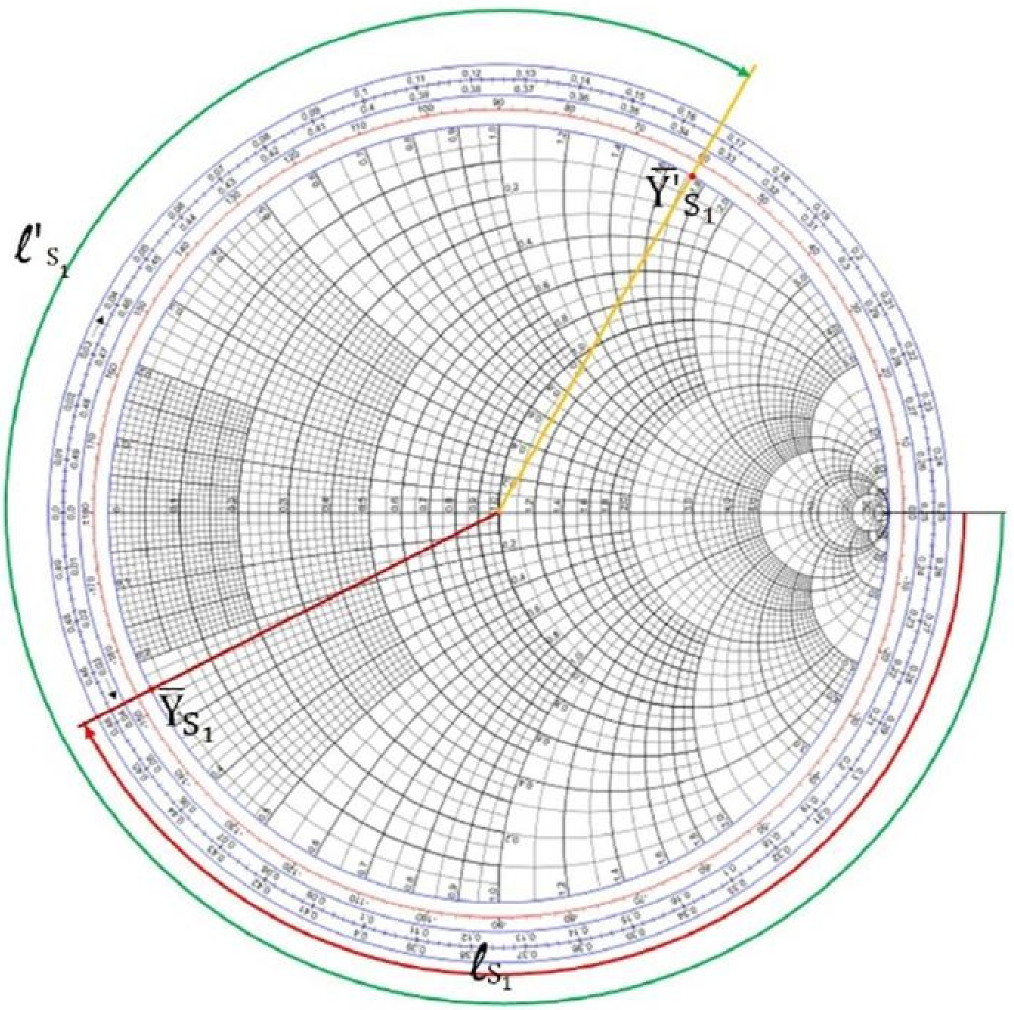
$$\overline{Y}_{S_1}\text{ واقعی} = -\,j\,0.12 \times \frac{200}{100} = -j\,0.24$$

$$\overline{Y'}_{S_1}\text{ واقعی} = j\,0.88 \times \frac{200}{100} = j1.76$$

اکنون نقاط فوق را روی نمودار معین می کنیم و از سمت راست محور افقی در جهت ساعتگرد حرکت می نماییم و با توجه به شکل صفحه بعد برای طول استاب اول یعنی ℓ_{S_1} خواهیم داشت:

$$\ell_{S_1} = 0.462\lambda - 0.25\lambda = 0.212\lambda$$

$$\ell'_{S_1} = 0.5\lambda - (0.25\lambda - 0.166\lambda) = 0.416\lambda$$



$\overline{Y}'_{S_1}$
ℓ'_{S_1}
$\overline{Y}_{S_1}$
ℓ_{S_1}

به نام خدا

خطوط انتقال مخابراتی جلسه دهم ۲۴ /۱۳۹۱/۲

مثال ها:

۱.خط انتقالی به طول 10km در انتها به بار مناسبی ختم گردیده است. ثابت تضعیف و ثابت فازی خط در فرکانس 1000Hz متناظرا 0.03 neper/Km و 0.03 Radian/Km می باشند. چنانچه ولتاژ انتهای خط درفرکانس 1000Hz مساوی $4\angle 0^\circ$Volts باشد، ولتاژ انتهای ارسال خط را محاسبه کنید.

حل- داده شده : $L = 10\ , \alpha = 0.03\ , \beta = 0.03\ , V_R = 4\angle 0^\circ$

بنابراین: $\gamma \ell = (\alpha + j\beta) = (0.03 + j\,0.03)10 = (1 + j)\times 0.3$

داریم: $V_S = V_R \cos h\gamma\ell + I_R Z_0 \sinh\gamma\ell$

از آنجایی که خط به بار مناسبی ختم شده: $Z_R = Z_0$

بنابراین $V_R = I_R Z_0$، پس: $V_S = V_R \cos h\gamma\ell + V_R \sinh\gamma\ell$

$V_S = V_R e^{\gamma\ell}$

مقادیر داده شده را در آن قرار می دهیم، به دست می آوریم:

$V_S = 4e^{(1+j)0.3} = 4e^{0.3}e^{j0.3} = 4e^{0.3}(\cos 0.3 + j\sin 0.3)$

$= 4 \times 1.3499(0.9563 + j0.02924)$

$= 503996(0.9563 + j\,0.2924) = 5.163 + j1.579$

بنابراین: $V_S = 5.394 \angle 17^\circ$ Volts

---

۲. یک خط انتقال بی تلفات با امپدانس مشخصه $50\angle 0^\circ$ وطول نصف طول موج را در انتها باز(مدار باز) می نماییم. مقدار ولتاژ r.m.s مدار باز 10v است. مقدار ولتاژ r.m.s و جریان r.m.s در فاصله یک هشتم طول موج از سر مدار باز خط حساب کنید.

حل- داریم: $V=\cos h\gamma\ell + I_R Z_0 \sinh\gamma\ell$

$$I = \frac{V_R}{Z_0}\sinh\gamma y + I_R \cos\gamma y$$

که در آن y فاصله اندازه گیری شده از انتهای دریافت در اینجا سر مدار باز، است.

داده شده: $Z_0 = 50\angle 0^\circ, V_R = 10V, I_R = 0, y = \frac{\lambda}{8}$

چون خط بی تلفات است، $\alpha=0$ و $\gamma=\alpha + j\beta$ پس $\gamma=j\beta$ می شود.

$$V=V_R \cos hj\beta y + I_R Z_0 \sin hj\beta y$$

$$I=\frac{V_R}{Z_0}\sin hj\beta y + I_R \cos hj\beta y$$

اما $\cosh j\beta y=\cos\beta y$ و $\sinh j\beta y=j\sin\beta y$ بنابراین:

$$V=V_R \cos\beta y + jI_R Z_0 \sin\beta y$$

$$I=j\frac{V_R}{Z_0}\sin\beta y + I_R \cos\beta y$$

حال $\beta y = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$، مقادیر داده شده را درآن قرار می دهیم، داریم:

$V = 1($

$I = j\frac{10}{50}\sin\frac{\pi}{4} = j\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = j\,0.1414 = 0.1414\angle 90^\circ$ Amps.(r.m.s)

که در آن I و V جریان و ولتاژ در فاصله $\frac{\lambda}{8}$ از انتهای مدار باز می باشد.

---

۳. یک خط انتقال با امپدانس مشخصه $500\angle\text{-}43^\circ$ و ثابت انتشار $0.07 + j0.08$ بر کیلومتر به بار مناسبی ختم شده است. یک ولتاژ $5\angle 0^\circ$v در انتهای ارسال به خط اعمال می کنیم. ولتاژ و جریان r.m.s مختلط را در فاصله 10Km از انتهای ارسال محاسبه کنید.

حل- داده شده:

$X=10Km, Z_0=500\angle\text{-}43^\circ$

$V_S= 5\angle 0^\circ, \gamma =0.07 + j0.08$

هنگامی که خطی به بار مناسبی ختم شده باشد، مانند یک خط نامتناهی عمل می کند و معادله ولتاژ در هر نقطه یک خط نامتناهی می شود:

$V=V_S e^{-\gamma l}$

مقادیر داده شده را در آن قرار می دهیم، داریم:

$V = 5e^{-(0.07+j0.08)\times 10}$

$= 5e^{-(0.7+j0.8)} = 5e^{-0.7}(\cos 0.8 - j\sin 0.8)$

$= 5 \times 0.4966(0.06947 - j0.7193) = 2.483(0.70 - j0.72)$

$= 1.738 - j1.787 = 2.5\angle 45.8^\circ$

در هر نقطه ای از خط با بار انتهایی مناسب، امپدانس ورودی همان امپدانس مشخصه است.

اگر I جریان در فاصله 10Km از انتهای ارسال باشد.

$$I = \frac{V}{Z_0} = \frac{2.5\angle -45.8^\circ}{500\angle -43^\circ} = 5 \times 10^{-3}\angle -2.8^\circ \text{ Amp}$$

$$= 5\angle -2.8^\circ = \text{mili-amp}$$

---

۴. امپدانس مشخصه خط معینی $710\angle 14^\circ$ اهم، $\gamma = 0.007 + j0.028$ بر کیلو متر است. خط به یک مقاومت 300 اهم ختم شده . امپدانس ورودی خط را چنانچه طول آن 100Km باشد محاسبه کنید.

حل- داده شده:

$Z_0 = 710\angle 14^\circ$ $\gamma = 0.007 + j0.028$ $Z_R = 300$ $\ell = 10$

$$\gamma\ell = (0.007 + j0.028)100 = 0.7 + j2.8$$

امپدانس ورودی یک خط با تلفات به طول ℓ ومختوم به یک امپدانس Z_R از رابطه زیر به دست می آید:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_R \cos h\gamma l + Z_0 \sin h\gamma l}{Z_0 \cos h\gamma l + Z_R \sin h\gamma l}$$

مناسب است که مقادیر $\sin h\gamma l$ و $\cos h\gamma l$ را به طور مجزا قبل از جایگزین کردن مقادیر در معادله فوق محاسبه نماییم:

$$\sin h\gamma l = \sin h(0.7 + j2.8) = \sin h0.7 \cos 2.8 + j \cos h0.7 \sin 2.8$$

$$\sin h\gamma l = 0.76 \times (-0.94) + j1.26 \times 0.33$$

$\sin h\gamma l = -0.71 + j0.42$

$\cos h\gamma l = \cos h(0.7 + j2.8)$

$\cos h\gamma l = \cos h0.7 \cos 2.8 + j \sin h0.7 \sin 2.8$

$\cos h\gamma l = 1.26 \times (-0.94) + \mathrm{j}0.76 \times 0.33$

$\cos h\gamma l = -1.18 + \mathrm{j}0.26$

چون $2.8radian = 160.44$ می باشد پس $\cos 2.8 = \cos 19.12 = 0.09$ و
و نیز: $\sin 2.8 = \sin 19.12 = 0.3272$

$Z_0 = 710\angle 14^\circ = 710(\cos 14^\circ + j \sin 14^\circ)$

$= 710(0.97 + j0.24) = 688.7 + j170.4$

تمام این مقادیر را درمعادله Z_{IN} قرار می دهیم، داریم:

$$Z_{IN} = 710\angle 14^\circ \left\{\frac{300(-1.18 + j0.25) + (688 + j170.4)(-0.71 + j0.42)}{(688.7 + j170.4)(1.18 + j0.25) + 300(-0.71 + j0.42)}\right\}$$

$$= 710\angle 14^\circ \left\{\frac{-914.05 + \mathrm{j}242.98}{-1119.26 + \mathrm{j}97.13}\right\}$$

$$= 710\angle 14^\circ \left\{\frac{995\angle 165^\circ}{1119.6\angle 174.5^\circ}\right\}$$

$$= \frac{710\times 995}{1119.6} \angle 14^\circ + 165^\circ - 174.5^\circ = 680.4\angle 4.5^\circ \mathrm{amp.}$$

---

۵. امپدانس انتهای ارسال یک خط کم تلفات را محاسبه کنید ، در حالی که Z_0 مساوی 55Ω، امپدانس انتهای دریافت $155+j75\Omega$ بوده و طول خط 1.183 برابر طول موج است.

حل- داده شده: $Z_0 = 55$, $Z_R = 115 + j75$, $\ell = 1.183\lambda$

بنابر این:

$$\ell = 1.183\lambda = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \times 1.183\lambda = 2\times 3.14\times 1.183 = 7.43 \text{ radian}$$

$$= 7.43\times 57.3\text{degree} = 426^\circ$$

که معادل 66° است. مقادیر را در معادله Z_{IN} قرار می دهیم، داریم:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}{Z_0 + jZ_R \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

$$= 55 \frac{(115 + j75) + j55 \tan 66^\circ}{55 + j(115 + j75) \tan 66^\circ}$$

$$= 55 \frac{(115 + j75) + j55 \times 2.356}{55 + j(115 + j75) \times 2.356}$$

$$= 55 \frac{(115 + j75) + j229.58}{65 + j270.94 - 176.7} = 55 \frac{115 + j304.58}{-121.7 + j207.94}$$

$$= 55 \frac{(115 + j304.58)(121.7 + j207.94)}{(-121.7 + j207.94)(121.7 + j207.94)}$$

$$= 55 \frac{31160j + 14000 - 54190 + j24340}{(j207.94)^2 - (121.7)^2}$$

$$= 55 \frac{-40190 + j55500}{-73480 - 14810}$$

$$= 55 \frac{(4.02 \times 10^4 - j5.55 \times 10^4)}{88190} = 55 \frac{(4.02 - j5.55)10^4}{8.82 \times 10^4}$$

$$= \frac{55}{8.82}(4.02 - j5.55) = 6.236(4.02 - j5.55)$$
$$= 25.06 - j34.61$$

Z_{IN} در اینجا امپدانس انتهای ارسال مطلوب است.

---

۶. خط انتقالی به‌طول 100m در فرکانس 100MHz عمل می کند و دارای ثوابت زیر است:

$Z_0=50\angle -5^\circ$ $\alpha=0.001$Neper/meter $\beta=\pi/1.8$ radian/meter

حال این خط را به باری متصل می کنیم و مقدار ضریب بازتابش اندازه گیری شده در فاصله 4m از بار مقدار $0.5\angle 30^\circ$ بدست آمده است. امپدانس ورودی خط انتقال را حساب کنید.

حل- ولتاژ وجریان در هر نقطه یک خط انتقال بر طبق معادلات عباتند از:

$$V = be^{-\gamma x} + ae^{\gamma x}$$
$$I = \frac{b}{Z_0}e^{-\gamma x} - \frac{\alpha}{Z_0}e^{\gamma x}$$

بنابراین در اینجا Z_{IN} را در انتهای ارسال محاسبه می کنیم:

$$x = 0 \ , I = I_S \ , V = V_S$$
$$V_S = a + b \ , I_S = \frac{b - a}{Z_0}$$
$$Z_{IN} = \frac{V_S}{I_S} = \frac{b + a}{b - a}Z_0 = \frac{1 + \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}}Z_0$$

$$\frac{V_\Gamma}{V_R} = \frac{a e^{\gamma x}}{b e^{-\gamma x}} = \frac{a}{b} e^{2\gamma x}$$

جدول مقدار فوق را بدست آورید.

$$0.5 = \frac{a}{b} e^{2(0.001)(100-4)} \qquad 0.5 = \frac{a}{b} e^{0.192}$$

$$\frac{a}{b} = 0.5 \times e^{-0.192} = 0.5 \times 0.8252 = 0.4126$$

این مقدار $\frac{a}{b}$ و مقادیر داده شده را در معادله فوق قرار می دهیم، بدست آوریم:

$$Z_{IN} = 50\angle -5^\circ \frac{1+0.4126}{1-0.4126} = 50\angle -5^\circ \frac{1.4126}{0.5874}$$

$$= 50 \times 2.4045\angle -5^\circ = 120.25\angle -5^\circ \text{ ohms.}$$

---

۷. ضریب بازتابش ولتاژ در یک نقطه A روی یک خط بی تلفات $0.2\angle{-30^\circ}$ بدست آمده است. مقدار آن را در فاصله $\frac{\lambda}{12}$ از A به سمت مولد حساب کنید.

حل- فرض کنید یک نقطه B روی خط بی تلفات در فاصله $\frac{\lambda}{12}$ از A در فاصله x از مولد قرار داشته باشد. بنابراین نقطه A در فاصله $(x+\frac{\lambda}{12})$ از مولد یا انتهای ارسال واقع می شود.

اگر Γ_a و Γ_B ضرایب بازتابش ولتاژ در نقاط A,B باشند $\Gamma_A = 0.2\angle -30^\circ$ و Γ_B را باید بدست آوریم.

در مثال قبل ثابت کردیم که ضریب بازتابش ولتاژ در هر نقطه به فاصله X از انتهای ارسال از رابطه زیر داده می شود. $\Gamma_x = \frac{a}{b} e^{2\gamma x}$

از خط بی تلفات $\alpha = 0$ پس $\Gamma_x = \frac{a}{b} e^{2j\beta x}$ اما $\Gamma_A = 0.2\angle -30^\circ$ بنابراین

$$\Gamma_A = 0.2\angle -30^\circ = \frac{a}{b} e^{2j\beta(x+\frac{\lambda}{12})}$$

$$\Gamma_B = \frac{a}{b} e^{2j\beta x}$$

معادله اول را بر دومی تقسیم می کنیم، بدست می آوریم:

$$\frac{0.2\angle -30^\circ}{\Gamma_B} = \frac{e^{2j\beta\,(x+\frac{\lambda}{12})}}{e^{2j\beta x}}$$

$$\frac{0.2\angle -30^\circ}{\Gamma_B} = e^{2j\beta\frac{\lambda}{12}} = e^{2j2\frac{\pi}{\lambda}(\frac{\lambda}{12})} = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\Gamma_B = \frac{0.2\angle -30^\circ}{e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{0.2\angle -30^\circ}{1\angle 60^\circ} = 0.2\angle -90^\circ$$

---

۸. امپدانس مشخصه خط یعنی $7\angle\text{-}16^\circ$ است هنگامی که فرکانس است.در این فرکانس تابع ضعیف 0.01 neper/km و تابع فاز 0.035 rad/km است. اگر این خط با طول 100Km به یک مقاومت 300Ω ختم شود نسبت ولتاژ فرستده (امپدانس منبع ولتاژ را صفر فرض کنید) و ولتاژ گیرنده را حساب کنید.

حل- معادله ولتاژ خط می شود:

$$V = V_S \cos h\gamma x - I_S Z_0 \sin h\gamma x$$

اگر طول خط ℓ باشد در $X=\ell$ داریم

$$V = V_R$$

$$V_R = V_S \cos h\gamma l - I_S Z_0 \sin h\gamma l$$

$$= V_S \left\{\cos h\gamma l - \frac{I_S Z_0}{V_S}\sin h\gamma l\right\} = V_S \left\{\cos h\gamma l - \frac{Z_0}{Z_{IN}}\sin h\gamma l\right\}$$

مقدار $\frac{Z_0}{Z_{IN}}$ را از معادله بدست میاوریم.

$$V_R = V_S \left\{\cos h\gamma l - \sin h\gamma l \frac{Z_0 \cos h\gamma x + Z_R \sin h\gamma x}{Z_R \cos h\gamma x + Z_0 \sin h\gamma x}\right\} =$$

$$= V_S \frac{Z_R (\cos^2 h\gamma l - \sin^2 h\gamma l)}{Z_R \cos h\gamma l + Z_0 \sin h\gamma l} = \frac{V_S Z_R}{Z_R \cos h\gamma l + Z_0 \sin h\gamma l}$$

$$\frac{V_S}{V_R} = \cos h\gamma l + \frac{Z_0}{Z_R}\sin h\gamma l$$

قبل از جایگذاری مقادیر داده شده مناسب است که مقادیر $\cos h\gamma l$ و $\sin h\gamma l$ را به طور مجزا به‌دست بیاوریم. حال داریم:

$$\gamma l = (\alpha + j\beta)l = (0.01 + j0.035)100 = (1 + j3.5)$$

$$\cos h\gamma l = \cos h(1 + j3.5)$$

$$= \cos h1 \cos 3.5 + j \sin h1 \sin 3.5$$

$$= 1.543 \cos 20.550^\circ + j1.175 \sin 200.55^\circ$$

$$= 1.543(-\cos 20.550^\circ) + j1.170 \sin(-20.55^\circ)$$

$$= -1.543 \times -0.9362 + j0.175 \times -0.3516$$

$$= -1.45 - j10.4131 = -1.503\angle 15.85^\circ$$

$$\sin h\gamma l = \sin h(1 + j3.5)$$

$$= \sin h1 \cos 3.5 + j \cos h1 \sin 3.5$$

$$= 1.175(-0.9362) + j1.543(-0.3516) = -1.101 - j0.5424$$

$= -1.227\angle 26.23^\circ$

این مقادیر و نیز مقادیر داده شده را در معادله جایگذاری کرده، به دست می آوریم:

$$\frac{V_S}{V_R} = -1.445 - j0.4131 + \frac{710\angle -16^\circ}{300} \times -1.227\angle 26.23^\circ$$

$$= -1.1445 - j0.4131 - \frac{710 \times 1.227}{300}\angle 10.23^\circ$$

$$= 1.445 - j0.4131 - 2.904\angle 10.23^\circ$$

$$= -1.445 - j0.4131 - 2.904(\cos 10.23^\circ + j\sin 10.23^\circ)$$

$$= -1.445 - j0.4138 - 2.859 - j0.5159 = -4.304 - j0.929$$

$$= -4.402\angle 77.8^\circ$$

نسبت بر حسب نپر $= \ln\left|\frac{V_S}{V_R}\right| = \ln 4.402 = 1.48\text{neper}$

نسبت بر حسب db $= 1.48 \times 8.686 = 12.87\text{dbs}$

---

۹. یک خط سیم باز با امپدانس مشخصه $692\angle\text{-}12^\circ\Omega$ به یک مقاومت 200Ω خاتمه یافته است. طول خط 100Km است و توسط یک مولد 1 ولتی در فرکانس 1000Hz تغذیه می شود. ضریب بازتابش ولتاژ را تعیین کنید.

حل- داده شده: $Z_0 = 692\angle -12^\circ \quad , Z_R = 200$

این مقادیر را در معادله قرار می دهیم، به دست می آوریم:

ضریب بازتابش ولتاژ $= \Gamma = \dfrac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \dfrac{200 - 692\angle -12^\circ}{200 + 692\angle -12^\circ}$

$$= \frac{200 - (676.7 - j143.9)}{200 + (676.7 - j143.9)} = \frac{-476.7 + j134.2}{876.7 - j143.9}$$

$$= \frac{497.8\angle 163.9^\circ}{888.4\angle 350.7^\circ} = 0.56\angle -187.6^\circ$$

$$= 0.56\angle 172.4^\circ$$

---

۱۰. یک ژنراتور 1 ولت 1000Hz به یک خط سیم باز به طول 1000Km مختوم به Z_0 (امپدانس مشخصه) و با پارامترهای زیر:

R=10.4 ohms/Km L=0.00367H/Km

G=0.8×10^{-6}ohms/Km C=0.00835µf/Km

قدرت اعمال می کند. قدرت تغذیه شده به بار انتهای دریافت را محاسبه کنید.

حل- مقدار Z_0 ومقدار Y قبلا در مثال۵ محاسبه شده این مقادیر عبارتند از:

$Z_0 = 692\angle -12^\circ$ و $\gamma = (0.00755 + j0.0355)\text{perkm}$

$$\gamma l = (0.00755 + j0.0355)1000 = 7.55 + j35.5$$

از آنجاییکه خط به Z_0 ختم شده است، داریم $Z_0 = Z_{IN}$ بطوری که:

$$Z\ I_S = \frac{E_S}{Z_0} = \frac{10}{692\angle -12^\circ} = 0.0145\angle 12^\circ \text{ Amp}$$

$e^{\gamma l} = \frac{I_S}{I_R}$ از تعریف ثابت انتشار

$$I = I_S e^{-\gamma l} = 0.00145\angle 12^\circ e^{-(7.55+j35.5)}$$

$= 0.00145\angle 12^{\circ}\, e^{-7.55} e^{-j35.5}$

$= 0.00145\angle(12 \times 3.472\angle - 203.8^{\circ})^{\circ}$

$e^{-j35.5}$ معادل زاویه 0.55rad- یا 203.8°- است.

$I_R = 0.000685\angle - 191.8^{\circ}$

قدرت تغذیه شده در انتهای دریافت P_R است و از رابطه زیر به دست می آید:

$P_R = |I_R|^2 R_P = (0.000685)^2 \times 692 \cos 120^{\circ}$

$= (0.000685)^2 \times 692 \times 0.9781$

$= 317.9 \times 10^{-6}$ Watt = 317.9 μ-Watt

---

۱۱. خط انتقالی به طول 50Km دارای امپدانس مشخصه $692\angle\text{-}12^{\circ}\Omega$ تابع فاز 0.0355 radian/Km و تابع تضعیف 0.00755 neper/Km است. ولتاژ در انتهای ارسال 10 ولت در فرکانس 1000Hz است و خط به یک مقاومت 300Ω خاتمه یافته است. جریان انتهای ارسال و جریان انتهای دریافت و ولتاژ و راندمان انتقال حساب کنید.

حل- داده شده:

$l = 50 \qquad Z_0 = 692\angle - 12^{\circ} \qquad \gamma = (0.00755 + j0.0355) \qquad Z_R = 300$

$\gamma l = (0.0075 + j0.0355)50 = 0.3775 + j1.7751$

مناسب است که قبل از آغاز محاسبه مقادیر مطلوب، مقادیر $\cos h\gamma l$ و $\sin h\gamma l$ را به طور جداگانه محاسبه نماییم. حال داریم:

$\sin h\gamma l = \sin h(0.3775 + j1.775)$

$= \sinh 0.3775 \cos 1.775 + j\cosh 0.3775 \sin 1.775$

$= 0.387\times(-0.204) + j1.072 \times 0.978 = -0.079 + j1.05$

$= 1.06\angle 94.2^\circ$

$\cos h\gamma l = \cos h(0.3775 + j1.775)$

$= \cos h0.3775 \cos 1.775 + j \sin h0.3775 \sin 1.775$

$= 1.072 \times -0.204 + j0.387 \times -0.978$

$= -0.218 - j0.379 = 0.437\angle 120.1^\circ$

$(1.775\text{rad}=101.8^\circ)$

برای تعیین مقدار جریان در انتهای ارسال، ابتدا باید امپدانس انتهای ارسال Z_S را محاسبه کنیم. مقادیر فوق را در معادله زیر قرار می دهیم.

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_R \cos h\gamma l + Z_0 \sin h\gamma l}{Z_0 \cos h\gamma l + Z_R \sin h\gamma l}$$

$$Z_{IN} = 692\angle 120^\circ \left\{ \frac{300 \times 0.437\angle 120.1^\circ + 692\angle -12^\circ \times 1.06\angle 94.2^\circ}{692\angle -12^\circ \times 0.437\angle 120.1^\circ + 1.06\angle 94.2^\circ} \right\}$$

$$= 692\angle 120^\circ \frac{131.1\angle 120.1^\circ + 733.52\angle 82.2^\circ}{301.4\angle 108.1^\circ + 318\angle 94.2^\circ}$$

$$= \frac{692 \times 131.1\angle 108.1^\circ + 692 \times 733.52\angle 70.2^\circ}{301.4\angle 108.1^\circ + 318\angle 94.2^\circ}$$

$$= \frac{9072.12\angle 108.1^\circ + 507595.84\angle 70.2^\circ}{301.4\angle 108.1^\circ + 318\angle 94.2^\circ}$$

$$= \frac{9072.12(\cos\ 108.1^\circ + j \sin 108.1^\circ) + 507595.84(\cos\ 70.2^\circ + j \sin 70.2^\circ)}{301.4(\cos\ 108.1^\circ + j \sin 108.1^\circ) + 318(\cos\ 94.2^\circ + j \sin 94.2^\circ)}$$

$$= \frac{9072.12(-0.710+j0.9505) + 507595.84(0.3387+j\ 0.9409)}{301.4(-0.3107+j0.9505) + 318(0.0732+j\ 0.9973)}$$

$$= \frac{-28214.3 + 172075 + j(86276 + 477648)}{-93.74 - 23.29 + j(317 + 295.2)}$$

$$= \frac{143861 + j563924}{-117 + j\,612} = \frac{582 \times 10^3 \angle 75.4^\circ}{623 \angle 100.8^\circ}$$

$934\angle -25.4^\circ$ ohms.

حال $Z_{IN} = \frac{V_S}{I_S}$ ، بنابراین:

$$I_S = \frac{V_S}{Z_{IN}} = \frac{10}{934\angle -25.4^\circ} \text{ Amp} = 0.001071\angle 25.4^\circ \text{ Amp}$$

ولتاژ انتهای ارسال V_R با جایگذاری مقادیر زیر در معادله V_R محاسبه خواهد شد:

$X=\ell \qquad V= V_R$

$$V_R = V_s[\cosh\gamma l - Z_0 I_S \sinh\gamma l] = V_s\left[\cosh\gamma l - \frac{Z_0}{Z_{IN}}\sinh\gamma l\right]$$

$$V_R = 10\left[-0.218 + j0.379\,\frac{692\angle -12^\circ}{934\angle -25.4^\circ} \times 1.069\angle 4.2^\circ\right]$$

$$= 10[-0.218 + j0.379 - 0.775\angle 107.6^\circ]$$

$$= 10[-0.218 + j0.379 - (0.232 + j0.737)]$$

$$= 10[0.014 - j0.358] = 3.6\angle\text{-}88^\circ \text{Volt}$$

جریان انتهای دریافت I_R از رابطه $Z_R = \frac{V_R}{I_R}$ به دست می آید، بنابراین:

$$I_R = \frac{V_R}{Z_R} = \frac{3.6\angle -88^\circ}{300} = 0.012\angle -88^\circ \text{ Amp}$$

برای تعیین راندمان انتقال η، اول باید P_R ، P_S را محاسبه کنیم.

قدرت تغذیه شده بار $= P_R = |I_R|^2 R_R = (0.012)^2 \times 300 = 0.432$ Watt

قدرت ورودی $= P_S = V_S I_S \cos\theta = 10 \times 0.001071 \times \cos 25.4^\circ = 0.960$ Watt

حال راندمان انتقال خواهد شد:

$$\eta = \frac{P_R}{P_S} \times 100 = \frac{0.432}{0.960} \times 100 = 45.6\%$$

---

۱۲. مقاومت و اندوکتانس عناصر سری وموازی یک شبکه T معادل یک طول 10Km از خطی با امپدانس مشخصه $280\angle -30^\circ$ اهم و ثابت انتشار $0.08\angle 40^\circ$ بر کیلومتر در فرکانس $5000/2\pi$Hz را حساب کنید.

حل- داده شده:

$\ell = 10$,$Z_0 = 280\angle - 30^\circ$,$\gamma = 0.08\angle 40^\circ$,$\omega = 2\pi f = 5000$

پس:

$$f = \frac{5000}{2\pi}$$

$$\gamma l = 10 \times 0.08\angle 40^\circ = 0.8\angle 40^\circ = 0.8(\cos 40^\circ + j\sin 40^\circ)$$

$$= 0.8\ (0.7660 - j\ 0.6428) = 0.6128 + j0.5142$$

مناسب است که مقادیر $\sin h\gamma l$ و $\tan h\gamma \frac{l}{2}$ را بطور مجزا به دست آوریم:

$$e^{\gamma l} = e^{(0.6128 + j0.5142)} = e^{0.6128} . e^{j0.5142} = e^{0.6128} \angle 0.5142$$

$$= e^{0.6128} \angle 29.47 = 1.84\ (\cos 29.47^\circ + j\sin 29.47^\circ)$$

$$= 1.60 + j0.91$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-0.6128\angle -29.47^\circ} = 0.54\ (\cos 29.47^\circ - j\sin 29.47^\circ)$$

$$= 0.47 - j0.27$$

$\sin h\gamma l = (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})/2 = \frac{1.60+j\,0.91-(0.47-j\,0.27)}{2}$

$= \frac{1.14+j\,1.18}{2} = 0.57 + j0.59 = 0.82 \angle 46^\circ$

$\tan h\frac{\gamma l}{2} = \frac{e^{\gamma l/2} - e^{-\gamma l/2}}{e^{\gamma l/2} + e^{-\gamma l/2}} = \frac{e^{\gamma l}-1}{e^{\gamma l}+1} = \frac{1.60+j0.91-1}{1.60+j0.91+1}$

$=0.31 + j0.24 = 0.39\angle 37.87^\circ$

$Z_{IN}/2 = Z_0 \tanh(\frac{\gamma l}{2}) = 280 \angle{-30^\circ} \times 0.39\angle 37.87^\circ = 109.2\angle 7.87^\circ$

$= 109.2 (\cos 7.87^\circ + j7.87^\circ) = 108.1 + j14.95$

چون این مقدار دارای یک بخش موهومی مثبت (مولفه راکتیو) است، جزء مربوطه اندوکتیو است. بنابراین، عنصر سری شبکه- T دارای اجزاء زیر است:

$R = 180.1\text{ohms} \quad \omega L=14.95 \quad L=14.95/5000 \quad H=2.99mH$

مشابها داریم:

$Z_2 = \frac{Z_0}{\sinh \gamma l} = \frac{280\angle -30^\circ}{0.82\angle 46^\circ} = 341.5 \angle{-76^\circ}$

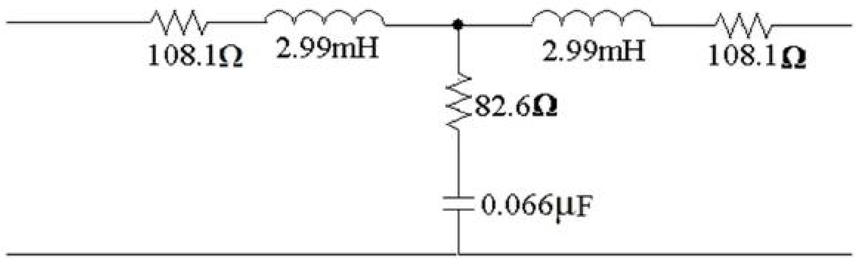
$=341.5(\cos 76^\circ - j\sin 76^\circ) = 82.6 - j331.3$

مجددا، از آن جایی که این کمیت دارای یک بخش موهومی منفی است (جزء راکتیو منفی)، جزء مربوطه خازنی است . بنابراین عنصر موازی شبکه T دارای اجزاء زیر است:

$R = 82.6 \text{ ohms} \qquad \omega c = 331.3$

$C = \frac{331.8}{5000} F = 66.26 \times 10^{-3} F = 0.066\mu F$

بدین سان عناصر سری و موازی مدار معادل T یک خط به طول 10Km در شکل زیر نشان داده شده است.



۱۳. عناصر سری یک شبکه T که معادل با یک خط انتقال یکنواخت بطول 5Km در فرکانس 5000/2π Hz است هر یک دارای یک مقاومت 175Ω اندوکتانس 10mH هستند وعناصر موازی شامل خازن 0.2μf سری با مقاومت 270Ω هستند. امپدانس مشخصه و ثابت انتشار با داشتن اتحادهای زیر تعیین کنید.

$$\tanh(\alpha + j\beta) = A + jB$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2A}{1 + A^2 + B^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2B}{1 - (A^2 + B^2)}$$

حل- داده شده:

$\ell = 5 \qquad f = \frac{5000}{2\pi}$

پس:

$\omega = 2\pi f = 5000$

$Z_1/2 = 175 + j5000\times10\times1^{-3} = (175 + j50)$

$Z_2 = 270 - j/(5000\times0.2\times10^{-6}) = (270 - j1000)$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_1/2 = Z_0 \tan h \frac{\gamma l}{2} = (175 + j50)$$

$$Z_2 = Z_0 / \sin h\gamma l = (270 - j1000)$$

از تقسیم دو معادله فوق بر هم داریم:

$$\tan h \frac{\gamma l}{2} . \sin h\gamma l = \frac{175 + j50}{270 - j1000} = \frac{17.5 + j5}{27 - j100}$$

برای حل این معادله قرار می دهیم:

$$\tan h \frac{\gamma l}{2} = t$$

$$t . \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{17.5 + j5}{27 - j100} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{2t^2}{2(1 - t^2) + 2t^2} = \frac{x}{x + 2y}$$

$$t^2 = \frac{17.5 + j5}{17.5 + j5 + 2(27 - j100)} = \frac{17.5 + j5}{71.5 - j195} = \frac{35 + j10}{143 - j390}$$

$$t^2 = \frac{36.4 \angle 15.05^\circ}{415.39 \angle -69.97^\circ}$$

$$t = \sqrt{\frac{36.4}{415.39}} \angle \frac{15.95 + 69.87}{2} = 0.284 \angle 42.91^\circ$$

$$\tan h \frac{\gamma l}{2} = 0.284 \angle 42.91^\circ$$

$$\tan h\,(\alpha + j\beta) \frac{l}{2} = 0.284\,(\cos 42.91^\circ - j\sin 42.91^\circ)$$

$$\tan h\left(\frac{\alpha l}{2} + j\frac{\beta l}{2}\right) = 0.2081 + j0.1934$$

حال از اتحاد داده شده استفاده می کنیم:

$$\frac{\alpha l}{2}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2A}{1+A^2+B^2}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2\times 0.2081}{1+(0.2081)^2+(0.1934)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{0.4162}{1+0.3433+0.0354^2}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{0.4162}{1.0807}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}0.385$$

$$=\frac{1}{2}(0.41)\ \text{neper}$$

پس $\alpha=\frac{0.41}{2}\times\frac{2}{5}$ چون ℓ=5 و $\alpha=0.08\ neper/Km$ مشابها با استفاده از اتحاد دیگر:

$$\frac{\beta l}{2}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2B}{1-(A^2+B^2)}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{20.1934}{1-(0.0433^2+0.0374^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{0.3868}{0.9193}=\frac{1}{2}\tanh^{-1}0.4218$$

$$1=22.87^\circ=0.3983\text{rad}$$

$$\beta=(0.1983/5)\ \text{rad/Km}$$

$$\gamma=(\alpha+j\beta)=0.08+j0.079\text{per Km}$$

$$Z_1/2=Z_0\tan h\frac{\gamma l}{2}$$

$$Z_0=Z_1/\left[2\ \tan h\frac{\gamma l}{2}\right]=\frac{175+j50}{0.2081+j0.1934}=773.8\angle 27^\circ\text{ohms}$$

بنابراین، مقدار مطلوب ثابت انتشار $(0.08+j0.079)$ و امپدانس مشخصه $773.8\angle 27^\circ$ است.

---

۱۴. انتهای یک خط انتقالی بی تلفات را که دارای امپدانس مشخصه 50Ω (مقاومتی) و طول 50m است باز می کنیم. اگر ولتاژ مدار باز $100\angle 0^\circ$ ولت باشد ولتاژ و جریان را

در فاصله 10 متری از سر مدار باز با فرض این که فرکانس ژنراتور 20MHz است، محاسبه کنید.

حل- داده شده : α=0، چون خط بی تلفات است

$Z_0 = 50\Omega \quad V_R = 100\angle 0^\circ \quad I_R = 0 \quad \ell = 10 \quad f = 20MHz$

y=10m

$\lambda = 300/f(MHz) = 300/20m = 15m$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\times 3.14}{15} = 0.418$ rad

$\beta y = 4018$ rad $= 239^\circ\ 29'\ 47''$

مقادیر داده شده را در معادلات قرار می دهیم، داریم:

$V = 100\cosh(0 + j\beta)\,y + 0\times 50 \sinh(0 + j\beta)\,y$

$I = \frac{100}{50}\sinh(0 + j\beta)y + 0 \times \cosh(0 + j\beta)y$

$V = 100\cosh j\beta y = 100\cos y\beta$

$I = 2\sinh j\beta y = 2j\sin \beta y$

با قرار دادن βy در آن داریم:

$V = 100\cos(239^\circ\ 29'\ 47'') = 100\cos(180 + 59^\circ\ 29'\ 47'')$

$= -100\cos 59^\circ\ 30'$ approx. $= -100 \times 0.5057 = -50.75$ Volts

$= 50.75\angle 180^\circ$ Volts

$I = 2j\sin(239^\circ\ 29'\ 47'') = 2j\sin(180 + 59^\circ\ 29'\ 47'') = 2j\sin 59^\circ\ 29'\ 47''$

$= 2j\sin 59^\circ\ 30'$ approx. $= -2j\times 0.8616 = -j1.7232 = 1.7232\angle 90^\circ$amp.

۱۵. یک خط انتقال به امپدانس مشخصه 600Ω مختوم به یک راکتانس $j150\Omega$ گردیده. امپدانس ورودی یک قطعه 25 سانتی متری از آن را در فرکانس 300MHz حساب کنید. می توانید از نمودار اسمیت استفاده کنید.

حل- داده شده:

$Z_0= 600\Omega$ $Z_R= j150$ohms $\ell= 25\ cm= \frac{1}{4}\ m$ f=300MHz

$\lambda=300/f$ (in MHz) m=300/300=1m

اما $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ بنابراین $\beta = 2\pi$ و $\beta l = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

هنگامی که $\beta = \frac{\pi}{2}$ است، داریم: $Z_{IN} = \frac{{Z_0}^2}{Z_R}$

حال مقادیر داده شده را در عبارت فوق قرار می دهیم، داریم:

$$Z_{IN} = \frac{600^2}{j150} = \frac{2400}{j} = -j\ 2400\ \text{ohms}$$

---

۱۶. ثابت های اولیه برای خط انتقال خاصی که در فرکانس 7.5KHz عمل می کند عبارتند از:

R=2.6 ohm/Km L=2.4mH/Km

C=0.0078µf/Km G=0.11µΩ/Km

در انتهای ارسال یک طول 50Km از چنین خطی، یک ژنراتور ایده آل با ولتاژ r.m.s 10v، متصل شده و انتهای خط مختوم به یک بار تطبیق شده گردیده ، قدرت مصرف شده در بار را حساب کنید.

حل- منتهی شدن خط به بار تطبیق شده، به معنی آنست که خط به امپدانش مشخصه اش Z_0 خاتمه یافته است. بنابراین امپدانس ورورودی خط Z_0 خواهد بود. بیاییم اول Z_0 و γ خط را تعیین کنیم. با استفاده از نماد سازی داریم:

$$\text{امپدانس سری} = Z = R + j\omega L = 2.6 + j\,2\pi \times 7.5 \times 10^3 \times 2.4 \times 10^3$$

$$Z = 2.6 + j\,113.04 = 113.04 \angle 88.4^\circ$$

$$\text{ادمیتانس موازی} = Y = G + j\omega C = 0.11 \times 10^{-6} + j2\,\pi \times 7.5 \times 10^3 \times 0.0078 \times 10^{-6}$$

$$= 367.38 \times 10^{-6} \angle 89.8^\circ \text{approx.}$$

این مقادیر را در معادله زیر قرار می دهیم:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{113.04 \angle 88.4^\circ}{367.38 \times 10{-}6 \angle 89.8^\circ \text{approx.}}} = 10^3 \sqrt{\frac{11.3}{367.38}} \angle \frac{88.7^\circ - 89.8^\circ}{2}$$

$$Z_0 = 630.8 \angle{-0.5^\circ}$$

$$\gamma = \sqrt{Z \times Y} = \sqrt{11.3\angle 88.70^\circ \times 367.38 \times 10^{-6}\angle 89.8^\circ}$$

$$= 10^3\sqrt{11.3 \times 367.38} \angle \frac{88.7^\circ + 89.8^\circ}{2} = 0.2042 \angle{-89.25^\circ}$$

$$= 0.2042\,(\cos 89.25^\circ + j\sin 89.25^\circ)$$

$$= 0.2042 \times 0.131 + j0.2041 \times 0.9999$$

$$= 0.002676 + j0.20$$

بنابراین:

$$\gamma \ell = 53\,(0.002676 + j0.20) = 0.134 + j1.0$$

$$I_S = \frac{V_S}{Z_{IN}} = \frac{V_S}{Z_0} = \frac{10}{630 \angle{-0.5^\circ}} = 0.01568\angle - 0.5^\circ \text{Amp}$$

از آنجایی که خط به امپدانس مشخصه Z_0 خود خاتمه یافته است، می توان آن را معادل یک خط نامتناهی در نظر گرفت و بنابراین می توان برای یافتن جریان I_R معادله زیر را به کار برد:

$$I = I_S e^{-\gamma l}$$

$$I = 0.01568\ \angle 0.5^\circ e^{-(0.134+j1.0)} = 0.01568\ \angle 0.5^\circ .\ e^{-0.134} .\ e^{-j1}$$

$$= 0.01568\ \angle 0.5^\circ \times 0.874\ (\cos 1.0^\circ + j\sin 1.0^\circ)$$

اما 1rad معادل است با 57.3° ، بنابراین:

$$I_R = 0.01568 \angle 0.5^\circ \times 0.874\ (\cos 57.3^\circ + j\sin 57.3^\circ)$$

$$= 0.01568 \angle 0.5^\circ \times 0.874\ (0.5402 + j0.7182)$$

$$= 0.01393 \angle 0.5^\circ \times 1 \angle 57.3^\circ = 0.01393 \angle 56.8^\circ$$

قدرت P_R مصرف شده در بار این گونه به دست می آید: $P_R = |I_R|^2 . R_R$

که در آن R_R قسمت حقیقی (مقاومتی) بار است. بنابراین:

$$P_R = (0.01393)^3 \times 630.8 = 0.1224W = 122.4\ mW$$

۱۷.یک خط انتقال دارای ثابت های اولیه زیر در هر کیلومتر می باشد.

$R=10.4\Omega$ $L=0.0036H$ $G=0$ $c=0.0083\mu f$

در فاصله نامشخص از انتها ارسال یک نقص باز شدگی مدار ایجاد شده . اندازه گیری امپدانس ورودی نشان می دهد که ماکزیمم در فرکانسهای 1420Hz و1860Hz اتفاق می افتد. مقادیر دقیق و تقریبی فاصله تا محل عیب را محاسبه کنید.

حل- (i) مقدار تقریبی – سرعت ها در ازاء میانگین مقادیری که ماکزیمم امپدانس در آن ها به دست آمده محاسبه می شوند . بنابراین در فرکانس $\frac{1420+1860}{2} = 1600Hz$ از معادله زیر به دست می آوریم:

$Z = R + j\omega L = 10.4 + j2\pi \times 1600 \times 0.0036$

$= 10.4 + j36.2 = 37.6 \angle 74^\circ$

$Y = G + j\omega C = j2\pi \times 1600 \times 0.0083 \times 10^{-6}$

$= j8.34 \times 10^{-5} = 8.34 \times 10^{-5} \angle 90^\circ$

این مقادیر Z و Y را در معادله زیر قرار می دهیم، داریم:

$\gamma = \sqrt{Z \times Y} = \sqrt{37.6 \angle 74^\circ \times 8.34 \times 10^{-5} \angle 90^\circ} = 0.056 \angle 82^\circ$

$\alpha + j\beta = 0.05\ (\cos 82^\circ + j\sin 82^\circ) = 0.0078 + j0.0554$

$\alpha = 0.0078 \quad ,\beta = 0.0554$

$V = \omega/\beta = \frac{2\pi \times 1600}{0.0554} = 1.814 \times 10^5$ Km/sec

آنگاه فاصله تقریبی از معادله زیر این گونه به دست می آید:

$d = 1.814 \times 10^5/2(1860 - 1420) = 206.1$ Km

(ii) مقدار دقیق- در این جا ما β را در هر دو فرکانس مفروض محاسبه می کنیم:

(a) در $f_1 = 1420$ KHz

$Z_1 = R_1 + j\omega_1 L = 10.4 + j2\pi \times 1420 \times 0.0036$

$= 10.4 + j32.1 = 33.73 \angle 72^\circ$

$Y_1 = G_1 + j\omega_1 C = 0 + j2\pi \times 1420 \times 0.0083 \times 10^{-6}$

$7.5 \times 10^{-6} \angle 90^\circ$

$\gamma_1 = \sqrt{Z_1 \times Y_1} = \sqrt{33.73 \angle 72^\circ \times 7.5 \times 10^{-6} \angle 90^\circ}$

$= 0.0499 \angle 81^\circ = 0.0499\ (\cos 81^\circ + j\sin 81^\circ)$

$\alpha_1 = 0.0078 \quad \beta_1 = 0.0499$

$V_1 = \omega_1 / \beta_1 = 2\pi \times 1420 / 0.0493 = 1.81 \times 10^5 Km/sec$

(b) مشابها در مورد در $f_1 = 1420$ KHz

$Z_2 = R_2 + j\omega_2 L = 10.4 + j2\pi \times 1860 \times 0.0036$

$= 10.4 + j42.1 = 43.3 \angle 76.1^\circ$

$Y_2 = G_2 + j\omega_2 C = j2\pi \times 1860 \times 0.0083 \times 10^{-6}$

$9.7 \times 10^{-5} \angle 90^\circ$

$\gamma_2 = \sqrt{Z_2 \times Y_2} = \sqrt{43.3 \angle 76.1^\circ \times 9.7 \times 10^{-5} \angle 90^\circ}$

$= 0.0648 \angle 83.05^\circ = 0.00784 + j\ 0.0643$

$\alpha_2 = 0.00784 \quad \beta_2 = 0.0643$

$V_2 = \omega_2 / \beta_2 = 2\pi \times 1860 / 0.0643 = 1.82 \times 10^5 Km/sec$

فاصله دقیق تا محل عیب از معادله زیر این گونه به دست می آید:

$d = V_1 \times V_2 / 2(V_1 f_2 - V_2 f_1)$

$$d = \frac{1.81 \times 10^5 \times 1.82 \times 10^5}{2(1.81 \times 10^5 \times 1860 - 1.82 \times 10^5 \times 1420)} = 209.8\text{Km}$$

---

۱۸. یک خط انتقال سیم باز که دارای $Z_0 = 650\angle -12^\circ \Omega$ است, در انتهای دریافت به Z_0 خاتمه یافته است . اگر این خط توسط یک منبع با مقاومت داخلی 300Ω تغذیه شود فاکتور بازتابش و تلفات بازتابش را در ترمینال های (پایانه های) انتهای ارسال محاسبه کنید.

حل- داده شده: $Z_1 = 300\Omega$

$Z_2 = Z_0 = 650\angle -12^\circ = 650\,(\cos 12^\circ - j\sin 12^\circ) = 636 - j138$

(i) این مقادیر را در معادله زیر قرار می دهیم:

$K = 2\sqrt{300 \times 650} / |(300 + 636 - j135)|$

$= (884)/(936 - j135) = (884)/(946) = 0.935$

(ii) مقادیر داده شده را در معادله زیر قرار می دهیم، داریم:

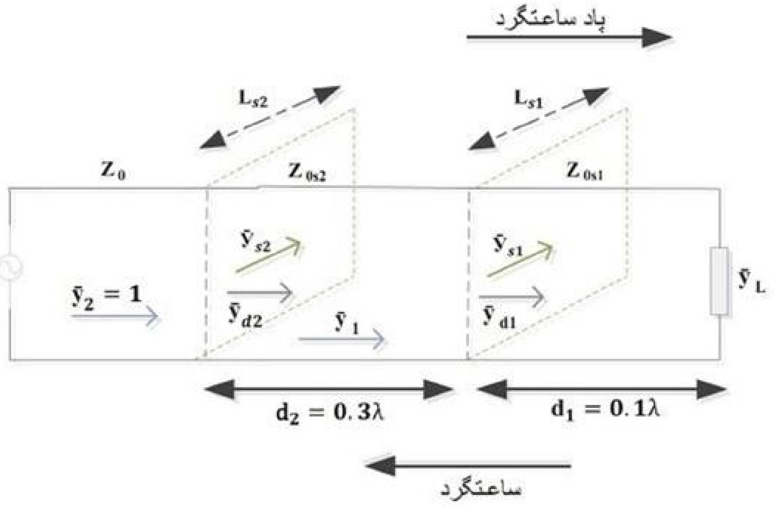
تلفات باز تابش $= 20 \log (1/0.935) = 20 \log (1.07) = 20 \times 0.294$

$= 5.88\text{db}$

جلسه ی ششم

مثال:

اگر مقادیر داده شده و شکل به صورت زیر باشد مطلوب است بدست آوردن طول استاب ها.



مفروضات عبارتند از:

$$Z_L = 30 + j20$$

$$\begin{cases} Z_0 = 100\,\Omega \\ Z_{0s1} = 100\,\Omega \\ Z_{0s2} = 100\,\Omega \end{cases}$$

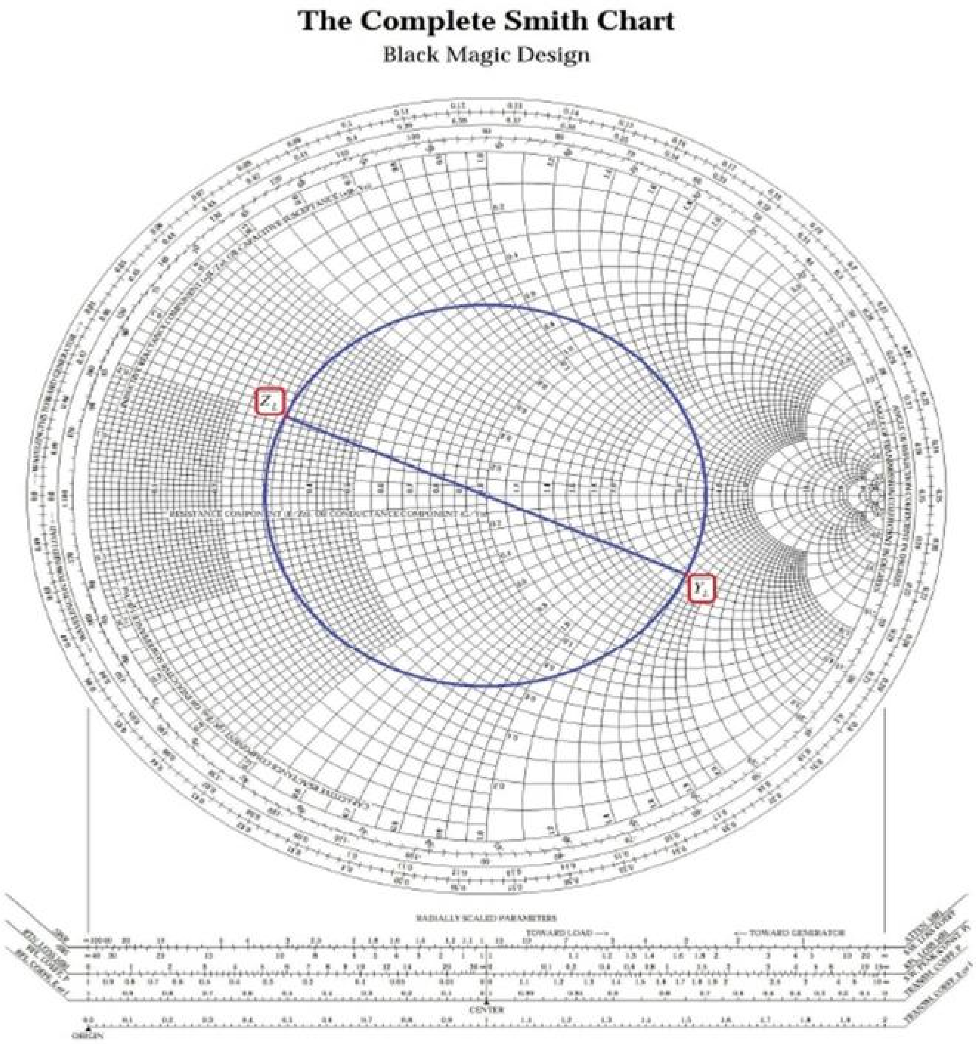
حل مثال:

$$\overline{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0}$$

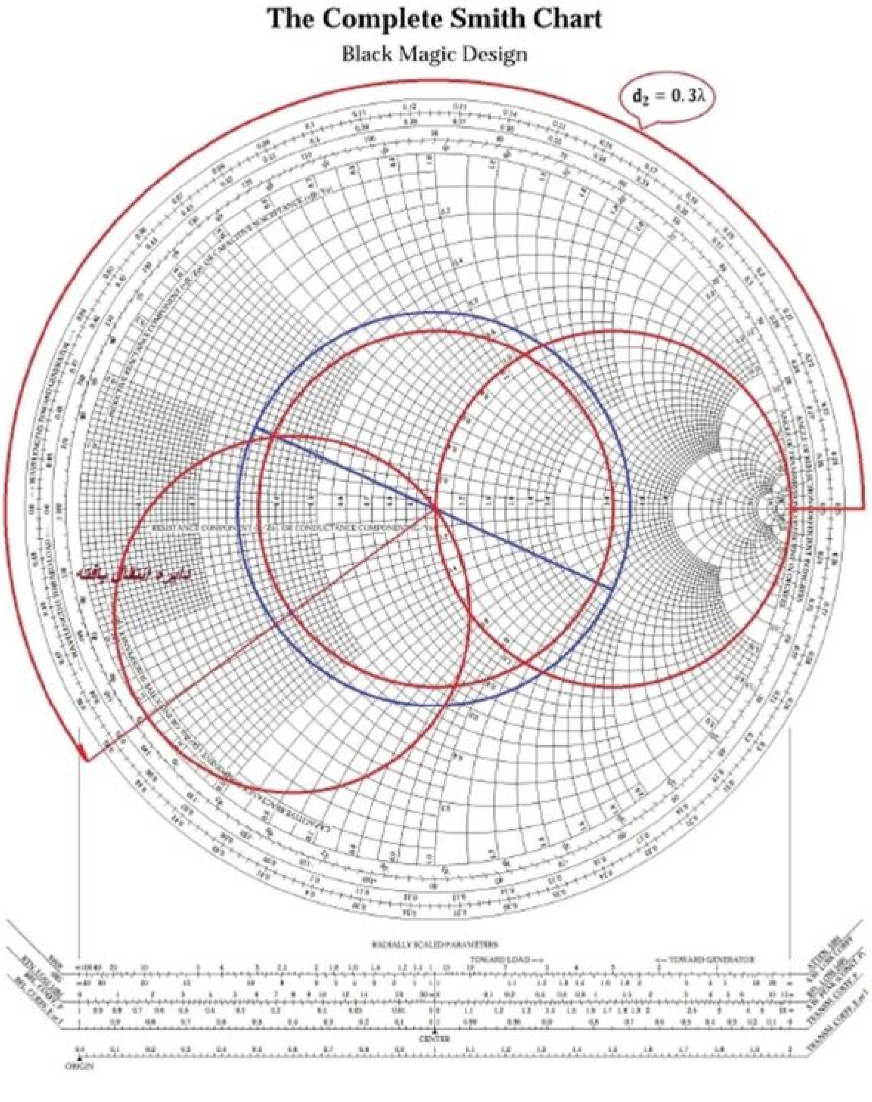
$$\overline{Z_L} = \frac{30 + j20}{100\,\Omega} = 0.3 + j0.2$$

با توجه به ($\overline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{L}}$) که توسط فرمول بدست آوردیم آن نقطه را روی محور مشخص و به اندازه آن، از نقطه ی مرکز پرگار را باز نموده ویک دایره رسم می کنیم سپس به وسیله ی خط کش یک خط صاف از نقطه ی ($\overline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{L}}$) نسبت به نقطه ی مرکز رسم می نماییم هرجا این دایره را قطع کرد آن نقطه ($\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{L}}$) می باشد.

$$\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{L}} = \mathbf{2.3} - \boldsymbol{j}\mathbf{1.5}$$

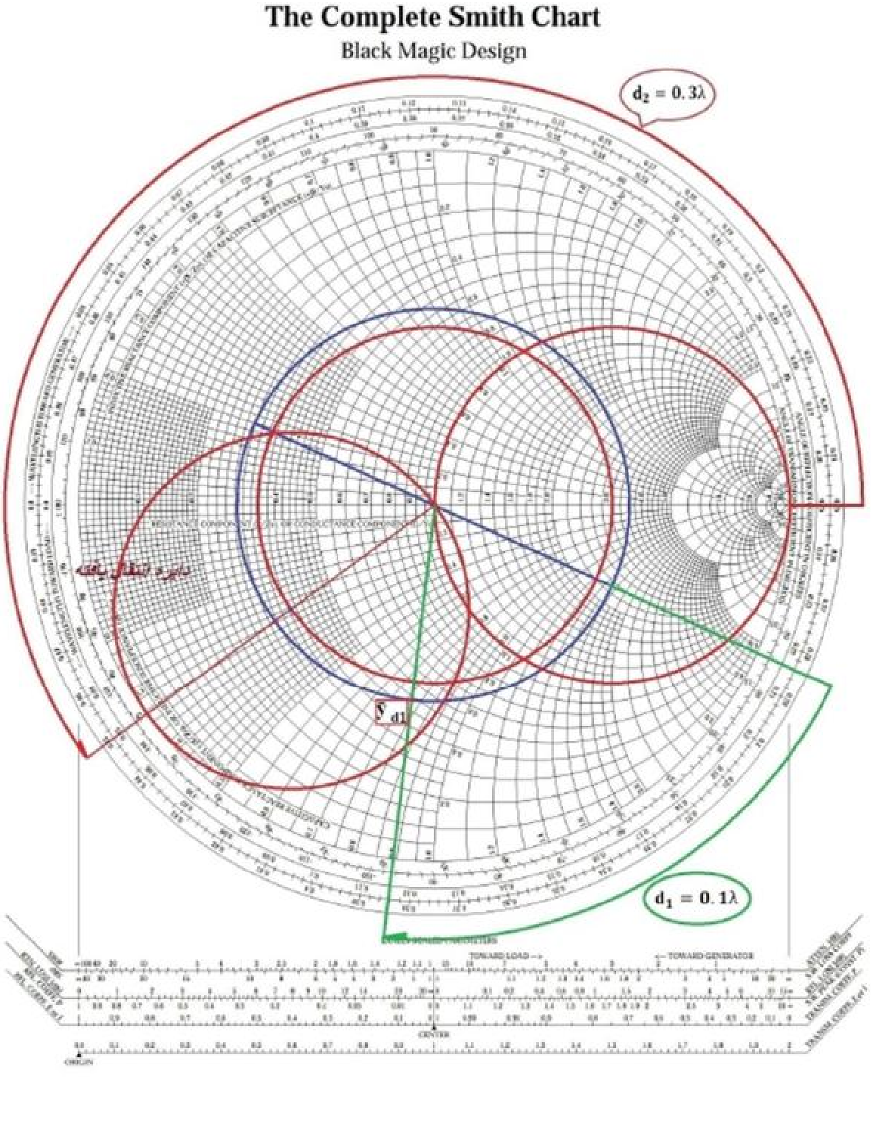


به اندازه (d_2) پادساعتگرد محور یک را نتقال می دهیم،یعنی با توجه به شکل زیر یک خط صاف از مرکز به سمت نقطه ای که (d_2) به آنجا رسیده می کشیم هرجا دایره ی انتقالی مرکز را قطع کرد آنجا به اندازه ی دایره ی 1 ، دایره ای رسم میکنیم که دایره ی انتقالی در شکل مشخص شده است.



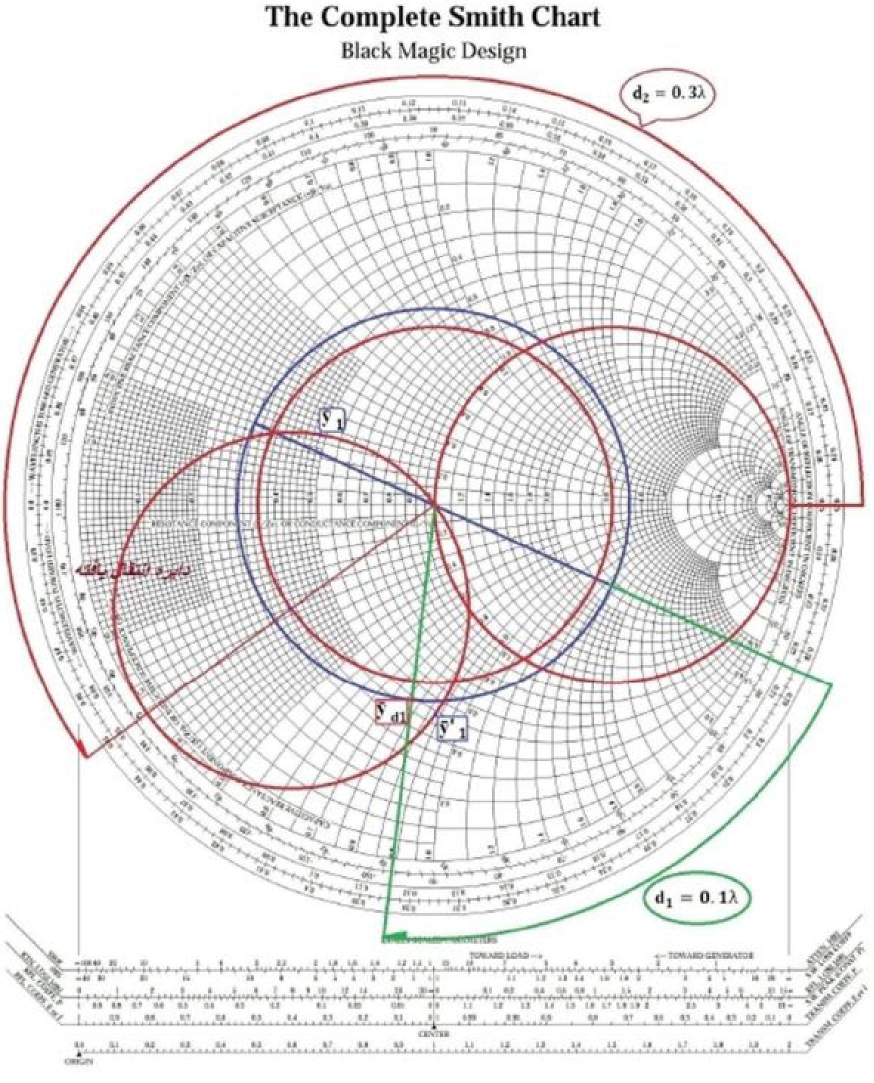
سپس از ($\bar{y}_L$) به اندازه ی (d_1) ساعتگرد حرکت می کنیم و یک خط صاف از مرکز به سمتی که (d_1) به آنجا رسیده رسم میکنیم، هرجا محور (SWR) را قطع کرد آنجا ($\bar{y}_{d1}$) می باشد.

$$\bar{y}_{d1} = 0.47 - j0.76$$



حال به وسیله ی مقدار حقیقی ($\bar{y}_{d1}$) روی محور حقیقی حرکت کرده به صورتی که در دو نقطه محور انتقالی را قطع کند این دو نقطه یکی ($\bar{y}_1$) و دیگری ($\bar{y}'_1$) می باشد.

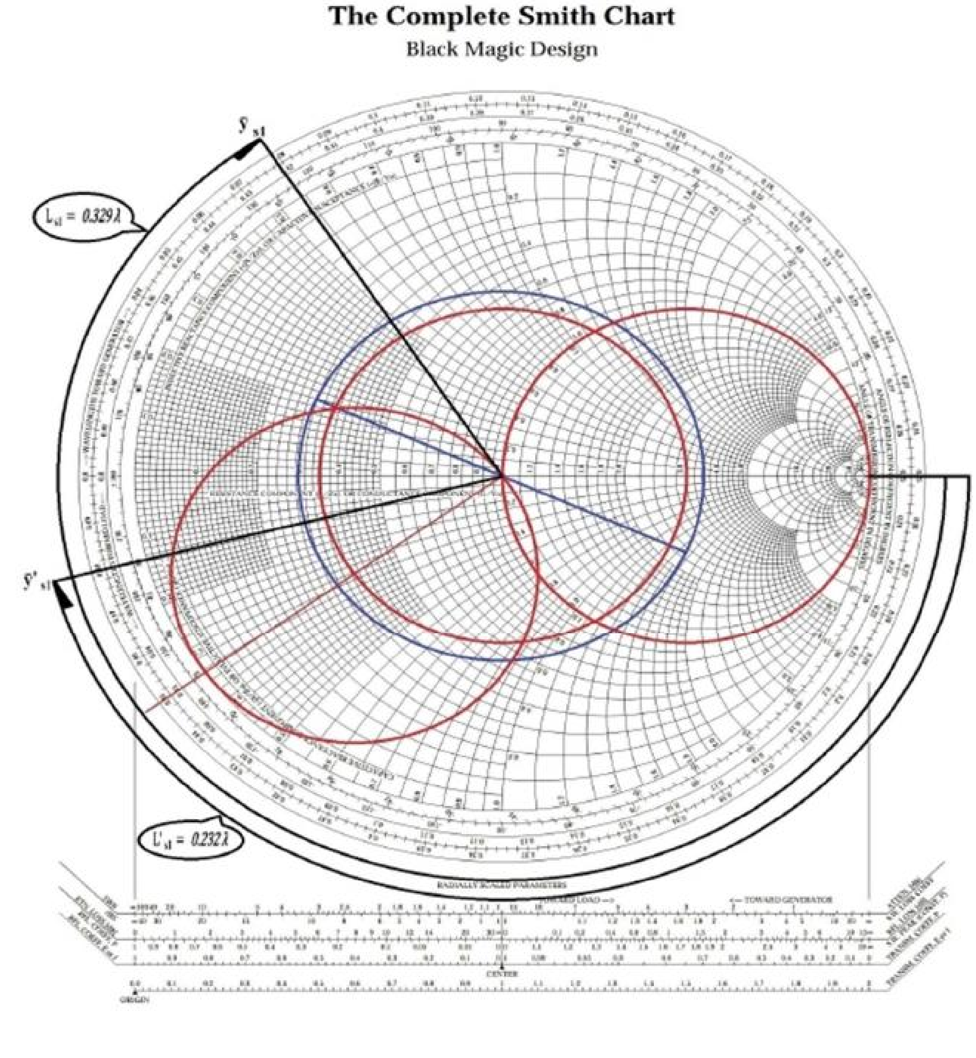
$\bar{y}_1 = 0.47 + j0.22$ و $\bar{y}'_1 = 0.47 - j0.88$



باتوجه به فرمول های مربوطه ($\bar{y}_{s1}$) و ($\bar{y}'_{s1}$) را بدست آورده سپس مقادیر (L_{s1}) و (L'_{s1}) به صورت ساعتگرد حرکت می کنیم و اندازه ی آن ها را تا ($\bar{y}_{s1}$) و ($\bar{y}'_{s1}$) یادداشت می نماییم.

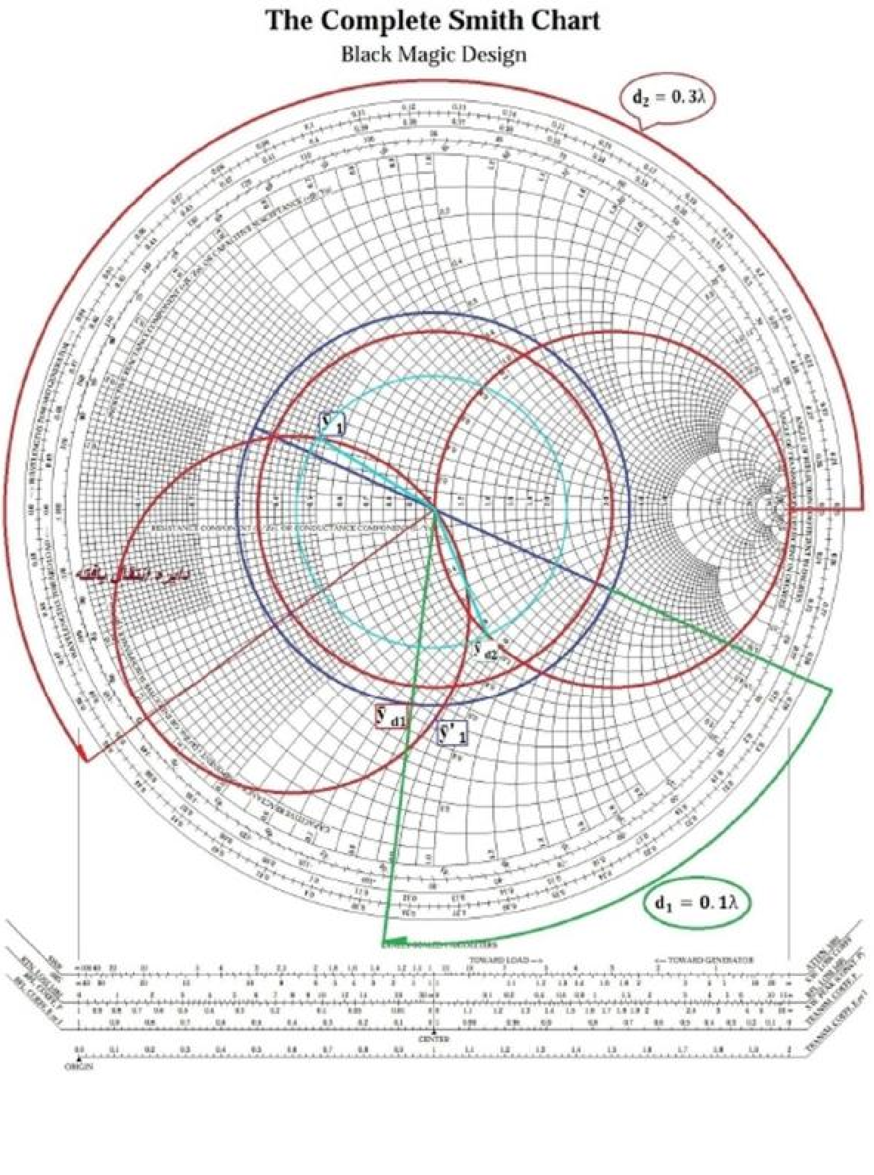
$$\bar{y}_1 = 0.47 + j0.22 \Rightarrow \bar{y}_{s1} = \bar{y}_1 - \bar{y}_{d1} = +j0.54\ \mho \Rightarrow L_{s1} = 0.329\lambda$$

$$\bar{y}'_1 = 0.47 - j0.88 \Rightarrow \bar{y}'_{s1} = \bar{y}'_1 - \bar{y}_{d1} = -j0.12\ \mho \Rightarrow L'_{s1} = 0.232\lambda$$



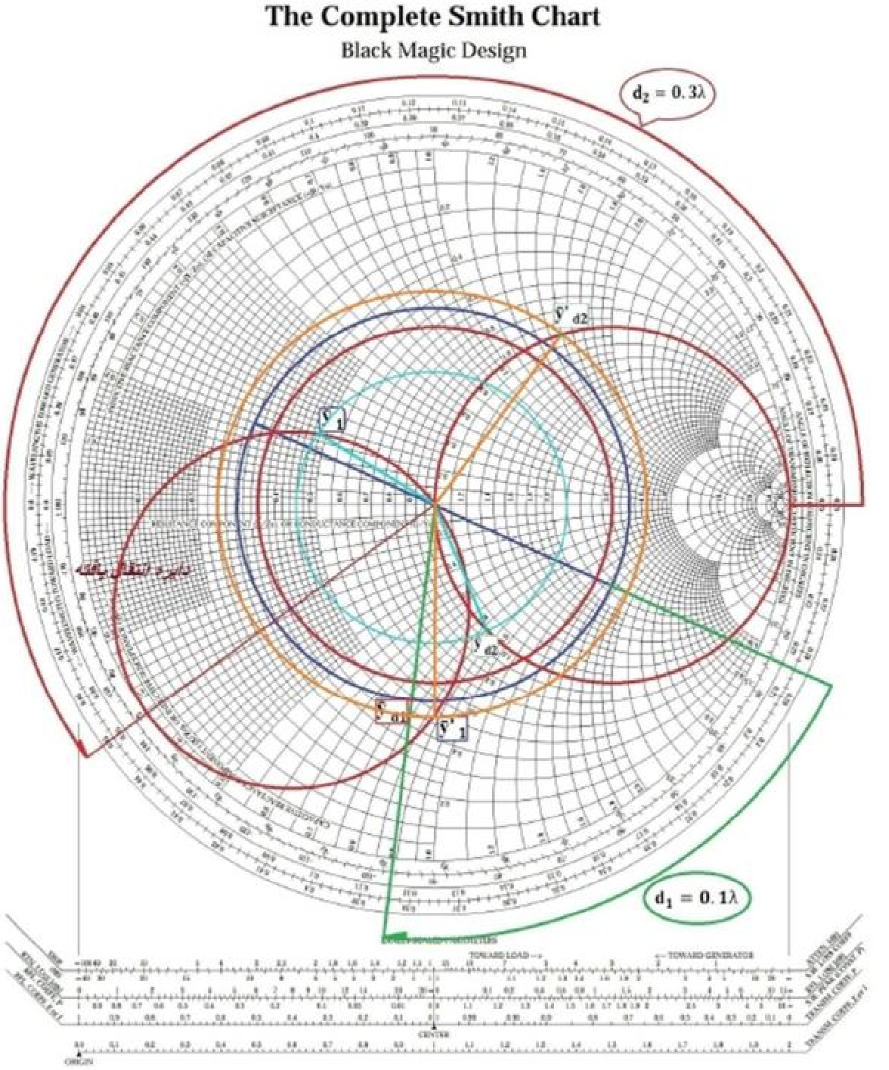
حال پرگار را به اندازه ی ($\bar{y}_1$) باز کرده و یک دایره از مرکز رسم می نماییم، هرجا دایره ی حقیقی 1 را قطع کرد آن نقطه را ($\bar{y}_{d2}$) در نظر می گیریم.

$$\bar{y}_{d2} = 1 - j0.85$$



سپس پرگار را به اندازه ی ($\bar{y}'_1$) باز کرده و یک دایره از مرکز رسم می نماییم، هرجا دایره ی حقیقی 1 را قطع کرد آن نقطه را ($\bar{y}'_{d2}$) در نظر می گیریم.

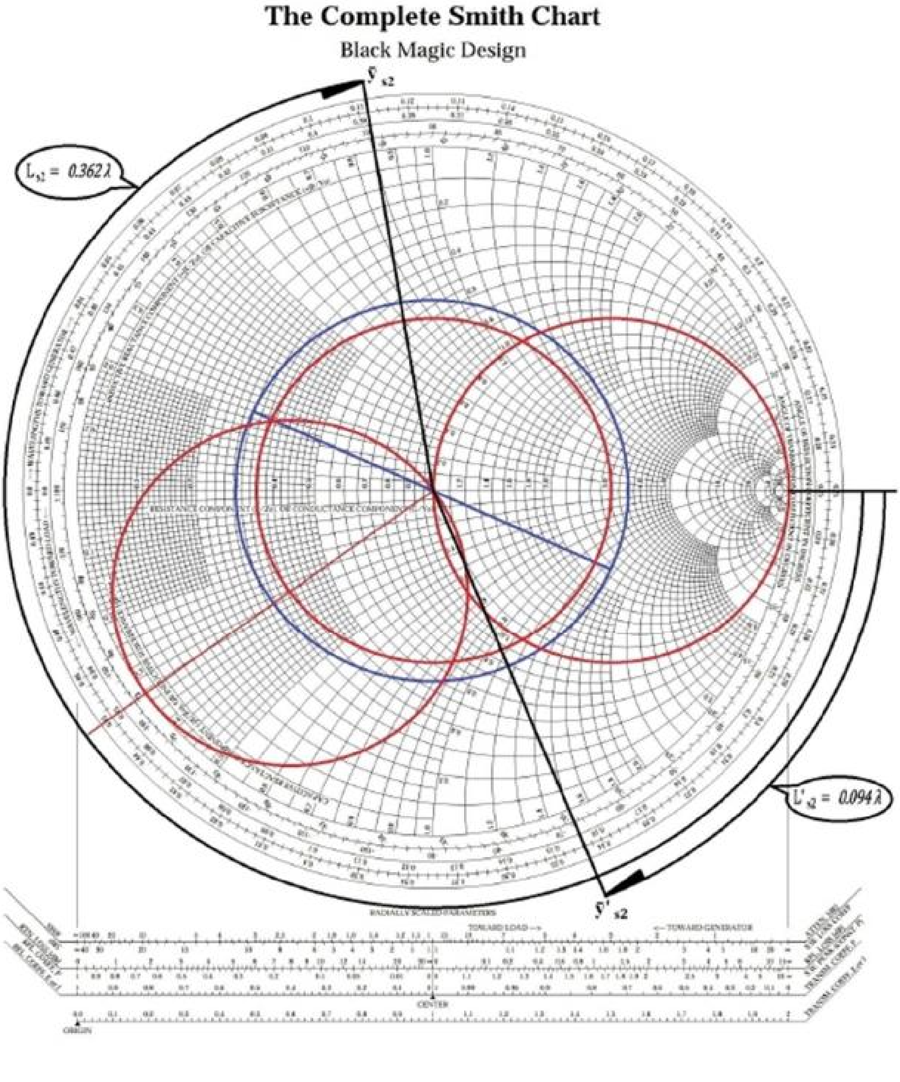
$$\bar{y}'_{d2} = 1 + j1.5$$



باتوجه به فرمول های مربوطه ($\bar{y}_{s2}$) و ($\bar{y}'_{s2}$) را بدست آورده سپس مقادیر (L_{s2}) و (L'_{s2}) به صورت ساعتگرد حرکت می کنیم و اندازه ی آن ها را تا ($\bar{y}_{s2}$) و ($\bar{y}'_{s2}$) یادداشت می نماییم.

$$\bar{y}_{d2} = 1 - j0.85 \Longrightarrow \bar{y}_{s2} = \bar{y}_2 - \bar{y}_{d2} = +j0.85\,\mho \Longrightarrow L_{s2} = 0.362\lambda$$

$$\bar{y}'_{d2} = 1 + j1.5 \Longrightarrow \bar{y}'_{s2} = \bar{y}_2 - \bar{y}'_{d2} = -j1.5\,\mho \Longrightarrow L'_{s2} = 0.094\lambda$$



در این مثال اگر امپدانس مشخصه ی خط و استاب ها با هم مساوی نباشند دوباره آن را حل می کنیم.

$\mathbb{Z}_L = 30 + j20$

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_0 = 100\ \Omega \\ \mathbb{Z}_{0s1} = 50\ \Omega \\ \mathbb{Z}_{0s2} = 200\ \Omega \end{cases}$$

در این گونه موارد ادمیتانس استاب ها عوض می شود، در نتیجه طول استاب ها نیز تغییر می کند.

یعنی مقادیر زیر تغییر می کند.

$\bar{y}_{s1}$	$\bar{y}'_{s1}$
$\bar{y}_{s2}$	$\bar{y}'_{s2}$
L_{s1}	L'_{s1}
L_{s2}	L'_{s2}

روابط زیر را داریم

$\overline{\mathbb{Z}_L} = \frac{\mathbb{Z}_L}{\mathbb{Z}_0}$	$y_L = \frac{1}{\mathbb{Z}_L}$
$y_0 = \frac{1}{\mathbb{Z}_0}$	$\bar{y}_L = \frac{1}{\mathbb{Z}_1}$

$$\bar{y}_L = y_L \cdot y_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_{s1} = y_{s1} \cdot y_{0s1}$$

$$\bar{y}_{s1} = \bar{y}_1 - \bar{y}_{d1} \quad \Rightarrow \quad y_s \cdot y_{0s1} = y_1 \cdot y_0 - y_{d1} \cdot y_0$$

با حل معادلات فوق داریم

$$\bar{y}_{s1} = (\bar{y}_1 - \bar{y}_{d1})\frac{y_0}{y_{0s1}}$$