

ریاضی ۲ یازدهم تجربی با طعم گلابی
فصل ۲: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم



تالیف : مهندس حسین کاویانی

حل معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$ به روش کلی Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{و} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

✓ اگر کنجاوید و براتون جالبه که بدونین روش Δ از کجا اومده؟! فیلم مربوط به اثبات اون رو حتماً ببینید.

$\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله ۲ ریشه ساده حقیقی دارد (نمودار در نقطه محور X ها را قطع می کند)

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

معادله یک ریشه مضاعف دارد

(نمودار بر محور X ها مماس است.)، (مربع کامل است).

معادله ریشه حقیقی ندارد

$$\Delta < 0 \Rightarrow$$

(نمودار محور X ها را قطع نمی کند)

مثال ۱: به ازای کدام مقدار a نمودار منحنی سهمی $y = ax^2 - 3x - 2$

الف) محور X ها را در دو نقطه قطع می کند؟

ب) بر محور X ها مماس است؟ طول نقطه مماس کدام است؟

ج) با محور طول ها برخورد نمی کند؟

مثال ۲: به ازای کدام مقدار m در معادله $x^2 - 2x + a - 3 = 0$ اختلاف دو ریشه بر ابر صفر است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۳

نکته: اگر $y = f(x), y = g(x)$ به گونه ای باشند که معادله برخورد آن ها یعنی $f(x) = g(x)$ درجه دوم بشود آن گاه سه حالت زیر، ممکن است رخ دهد:

(الف) در دو نقطه برخورد (تلاقی) داشته باشند.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

طول نقاط برخورد \Rightarrow

$$\begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

(ب) یکدیگر را قطع نکرده باشند. (فاقد نقطه برخورد و اشتراک)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

فاقد برخورد

(ج) بر هم مماس باشند. (دارای مماس مشترک)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

طول نقطه تماس همان ریشه مضاعف معادله برخورد است. $x = \frac{-b}{2a}$

مثال ۳: به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = 2x + m$ و منحنی $y = x^2 + 4x + 5$ (الف) در دو نقطه متقاطع اند؟

(ب) بر هم مماس اند؟

(ج) نقطه مشترکی ندارند؟ (فاقد برخورد)

✓ یازدهمی های عزیزم معادله درجه ۲ در همه جا از جمله مباحث مفصل کنکور کاربرد زیادی دارد پس لازمه علاوه بر روش کلی (Δ) روش سرعتی و فاص حل معادله درجه ۲ رو نیز یاد بگیری.

$$a x^2 + b x + c = 0$$

(۱) اگر $c=0$ باشد ، برای حل معادله کافی است از x فاکتور بگیریم که قطعاً معادله دو جواب دارد که یک جواب $x=0$ خواهد بود.

$$a x^2 + b x = 0 \Rightarrow x (a x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a x + b = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} \end{cases}$$

مثال : $3 x^2 - 5 x = 0 \Rightarrow x (3 x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

(۲) وقتی $b=0$ باشد یا معادله به صورت $(\text{عدد})^2 = \text{عدد}$ باشد از خاصیت توان زوج و ریشه گیری استفاده میکنیم.

خاصیت (۱) : $u^2 = a \xrightarrow{a > 0 \text{ مثبت}} u = \pm \sqrt{a}$

خاصیت (۲) : $u^2 = a \xrightarrow{a < 0 \text{ منفی}} \text{جواب ندارد}$

خاصیت (۳) : $u^2 = 0 \xrightarrow{a = 0} u = 0$ ریشه مضاعف دارد

مثال : $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

البته باید سرعتی و ذهنی یهو جواب آخر رو بگی!!

مثال : $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

اولاً x^2 نا منفی است و هیچگاه جواب -4 نمیشود و ثانیاً $\sqrt{-4}$ تعریف نشده است.

مثال : $-x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$

مثال: $(x + 1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 5 \Rightarrow x + 1 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$

مثال: $(x + 1)^2 + 5 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -5$

۳) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد.

($a + b + c = 0$) آنگاه حتما یک جواب معادله $x = 1$ و جواب دیگر آن $x = \frac{c}{a}$ است.

اثبات: $x = 1 \Rightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
 $\Rightarrow x = 1$ یک جواب است

می دانیم حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم همیشه برابر $\frac{c}{a}$ است. پس اگر یک ریشه $x = 1$ باشد دیگر

$x = \frac{c}{a}$ خواهد بود.

مثال: $7x^2 + 12x - 19 = 0 \xrightarrow{\frac{a+b+c=0}{7+12-19=0}} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{-19}{7} \end{cases}$

✓ (اگر بیکاری و حال داری مثال بالا را به روش Δ حل کن!)

۴) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $a + c = b$ آنگاه حتما یک ریشه

$x = -1$ و ریشه دیگر $x = -\frac{c}{a}$ است.

اثبات: $x = -1 \xrightarrow{ax^2 + bx + c = 0} a - b + c = 0 \Rightarrow a + c = b$

پس یک ریشه $x = -1$ است چون صدق کرده! از طرفی چون ضرب

ریشه ها باید $\frac{c}{a}$ شود پس ریشه دیگر $x = -\frac{c}{a}$ است.

مثال: $3x^2 - 5x - 8 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} = \frac{+8}{3} \end{cases}$

۵) اگر مدل های ۱ تا ۴ نبود و $a = 1$ نیز باشد، شاید بتوان آن را با اتحاد جمله مشترک به دو پرانتز تجزیه کرد

یادآوری:

$$x^2 + \underbrace{(a+b)}_{\text{جمع غیر مشترک ها}} x + \underbrace{ab}_{\text{ضرب غیر مشترک ها}} = (x+a)(x+b)$$

جمع غیر مشترک ها ضرب غیر مشترک ها

مثال: $x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$

✓ اگر هم هیچ کدام از ۵ حالت خاص نبود، فب برو سراغ روش Δ