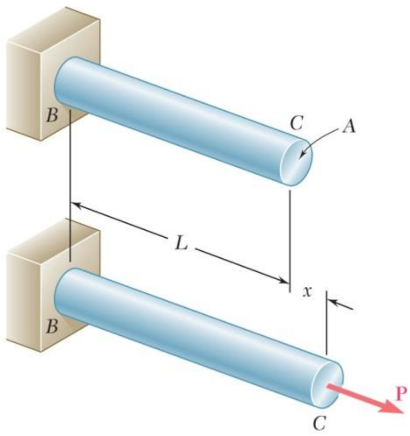
فصل هشتم: روش‌های انرژی

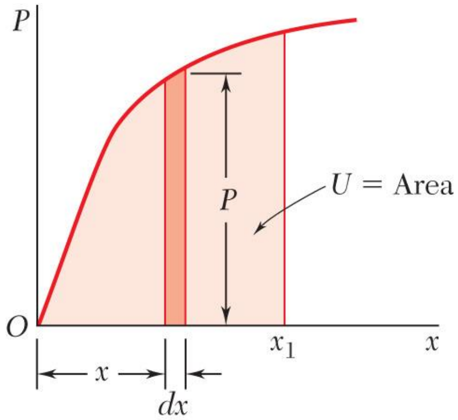


انرژی کرنشی

میله BC مطابق شکل تحت بار محوری P که به تدریج افزایش می‌یابد قرار دارد.

وقتی طول میله به اندازه dx افزایش یابد کار انجام شده توسط نیروی P برابر است با:

$$dU = P\,dx \qquad (۸-۱)$$



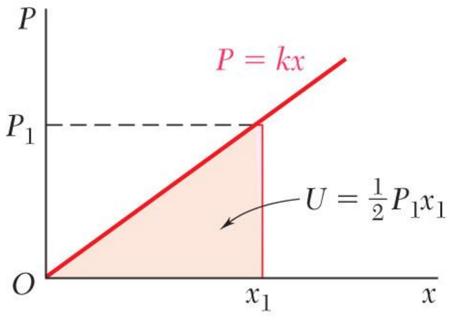
این عبارت معادل با مساحت سطحی با پهنای dx است که زیر نمودار بار- تغییر شکل قرار دارد.

پس کار کل انجام شده بوسیله بار P هنگامی که میله به اندازه x_1 تغییر طول دهد از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۸-۲)

××

کار نیروی P سبب افزایش انرژی در میله می‌شود. این انرژی افزوده شده را انرژی کرنشی می‌نامند.



در صورتی که رابطه بین بار و جابجایی خطی باشد مقدار انرژی کرنشی برابر است با:

(۸-۳)

برای حذف اثرات اندازه، انرژی کرنشی بر واحد حجم محاسبه می‌شود:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L} \quad \Rightarrow \quad u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \, d\varepsilon = \text{چگالی انرژی کرنشی} \qquad (۸-۴)$$

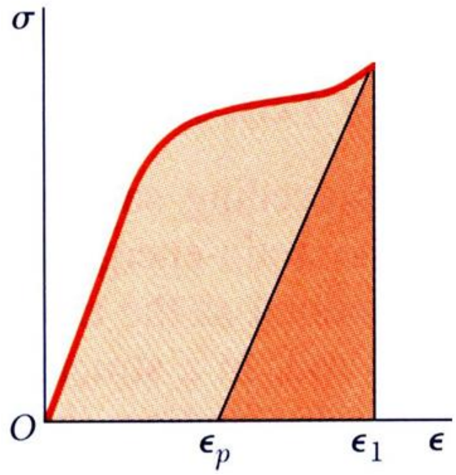
××

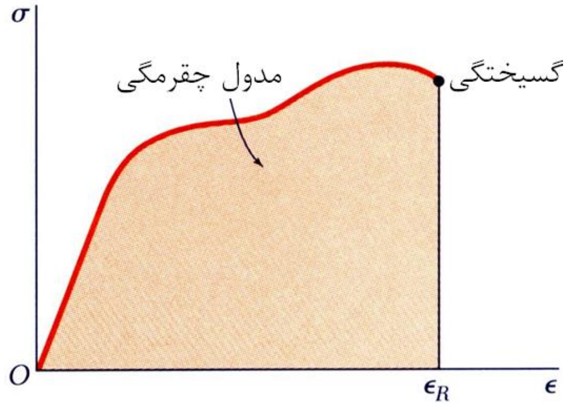
چگالی انرژی کرنشی

چگالی انرژی کرنشی کل برابر با مساحت زیر منحنی تنش- کرنش تا نقطه ε_1 است.

وقتی بار برداشته شود تنش صفر می‌شود اما تغییر شکل دائمی ε_p در ماده باقی می‌ماند.

تنها قسمتی از انرژی کرنشی که متناظر با سطحی مثلثی است بازیابی شده و بقیه انرژی مصرف شده در تغییر شکل بصورت گرما تلف می‌گردد.

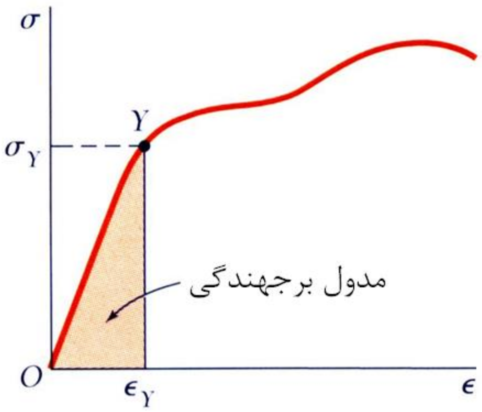




××

مقدار انرژی بر واحد حجم که سبب گسیختگی می‌گردد به چکش‌خواری و استحکام نهایی آن بستگی دارد.

اگر تنش کمتر از حد تسلیم ماده باشد قانون هوک صادق بوده و می‌توان نوشت:

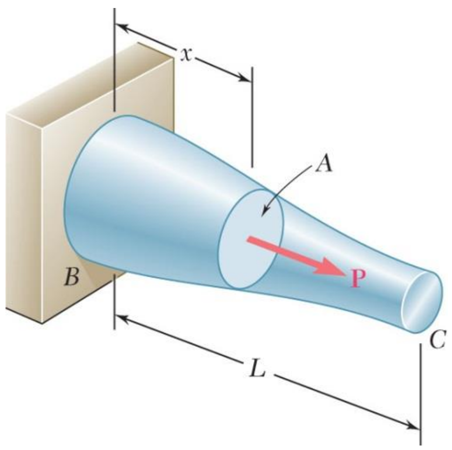


(۸-۵)

چگالی انرژی کرنشی حاصل از $\sigma_1=\sigma_Y$ مدول برجهندگی نامیده می‌شود:

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \quad = \text{مدول برجهندگی} \qquad (۸\text{-}۶)$$

××



انرژی کرنشی برای تنش‌های نرمال

اگر توزیع تنش در جسم غیر یکنواخت باشد خواهیم داشت:

$$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \qquad (۸\text{-}۷)$$

$$U = \int u\, dV \quad = \text{انرژی کرنشی کل} \qquad (۸\text{-}۸)$$

بنابراین از معادله (۸-۵) وقتی تنش زیر تنش تسلیم باشد

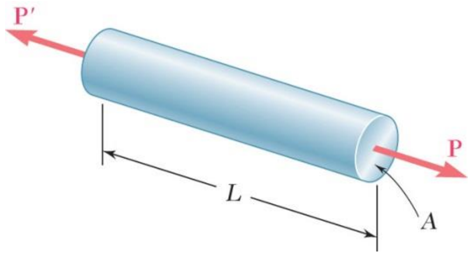
یعنی برای $u < u_Y$ داریم:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad = \text{انرژی کرنشی الاستیک} \qquad (۸\text{-}۹)$$

در بارگذاری محوری $\sigma_x=P/A$ و $dV=Adx$ است بنابراین:

(۸-۱۰)

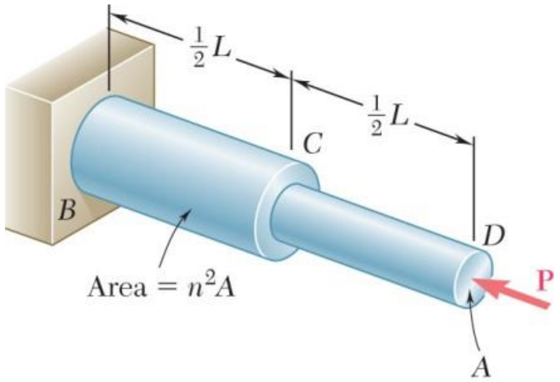
××



در نتیجه انرژی کرنشی کل برای میله‌ای با سطح مقطع یکنواخت برابر است با:

(۸-۱۱)

مثال (۸-۱): انرژی کرنشی کل را برای میله زیر تعیین کنید.

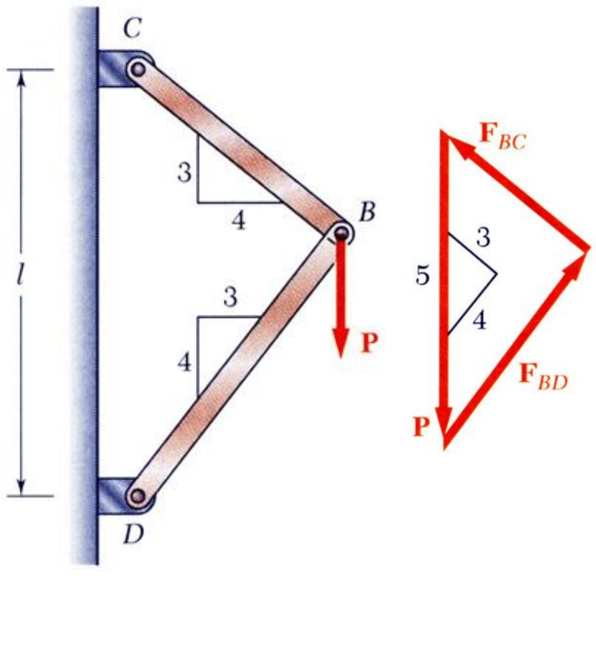


حل: از رابطه (۸-۱۱) انرژی کرنشی کل برابر است با:

$$U=\sum_i \frac{P_i^2 L_i}{2A_i E_i}=\frac{P^2\left(\frac{L}{2}\right)}{2AE}+\frac{P^2\left(\frac{L}{2}\right)}{2n^2AE}=\frac{P^2L}{4AE}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

××

مثال (۸-۲)



مطابق با شکل بار P در نقطه B توسط دو میله همجنس و با سطح مقطع برابر نگه داشته می‌شود. انرژی کرنشی مجموعه را تعیین کنید.

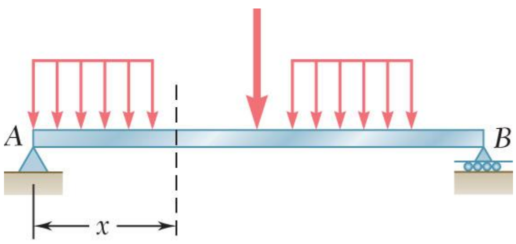
حل: از هندسه مسأله می‌دانیم: $L_{BC}=0.6l \qquad L_{BD}=0.8l$

از استاتیک بدست می‌آید: $F_{BC}=+0.6P \quad F_{BD}=-0.8P$

بنابراین انرژی کرنشی مجموعه برابر است با:

$$U=\frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE}+\frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE}=$$

××



انرژی کرنشی برای تنش‌های نرمال

برای تیری که در معرض بارگذاری خمشی قرار دارد انرژی کرنشی برابر است با:

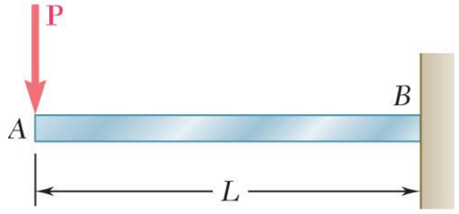
$$\sigma_x = \frac{M\,y}{I} \quad \Rightarrow$$

با توجه به اینکه $dV = dA\,dx$ است خواهیم داشت:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA\,dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int_A y^2 dA\right)dx \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad (۸-۱۲)$$

××

مثال (۸-۳)



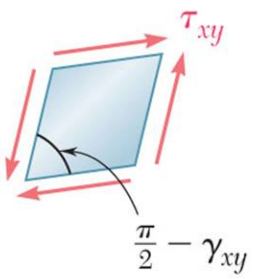
انرژی کرنشی تیر یکسرگیردار زیر را تعیین کنید. تنها اثر تنشهای قائم را به حساب آورید.

حل: گشتاور خمشی در نقطه‌ای دلخواه از تیر به فاصله x از سر A برابر است: $\quad M = -Px$

بنابراین با استفاده از معادله (۸-۱۲) انرژی کرنشی کل تیر عبارت است از:

(۸-۱۳)

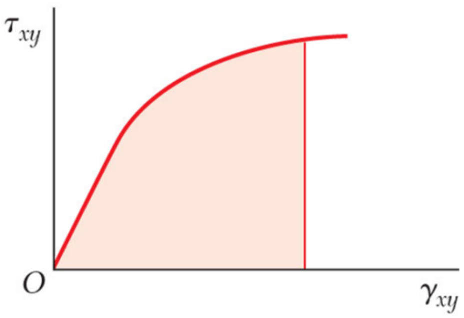
××



انرژی کرنشی برای تنش‌های برشی

چگالی انرژی کرنشی در ماده‌ای که تحت تنش برشی صفحه‌ای قرار دارد مساوی است با:

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \qquad (۸-۱۴)$$



وقتی τ_{xy} زیر حد تسلیم باشد خواهیم داشت:

$$u = \tfrac{1}{2} G\gamma_{xy}^2 = \tfrac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad (۸-۱۵)$$

انرژی کرنشی کل هم از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۸-۱۶)

××

برای میله‌ای که گشتاور پیچشی تحمل می‌کند انرژی کرنشی کل برابر است با:

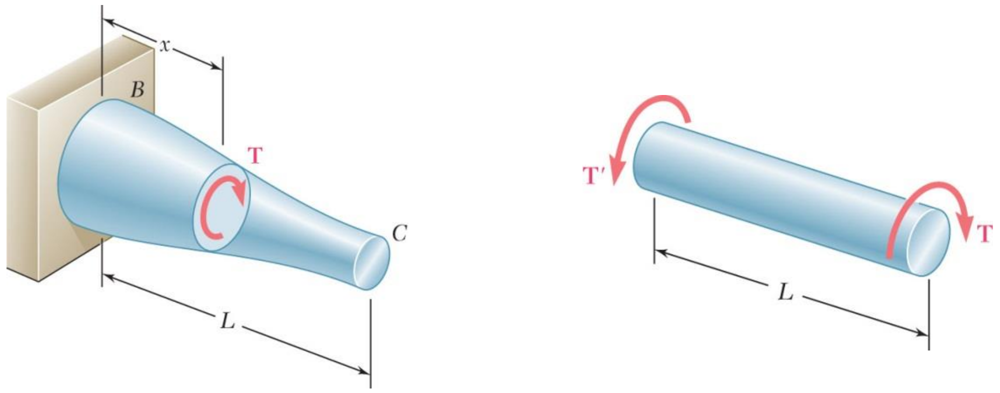
$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

با قرار دادن $dV=dA\,dx$ خواهیم داشت:

$$U=\int\frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}dV=\int_0^L\int_A\frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}dAdx=\int_0^L\frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A\rho^2dA\right)dx=\int_0^L\frac{T^2}{2GJ}dx \qquad (۸-۱۷)$$

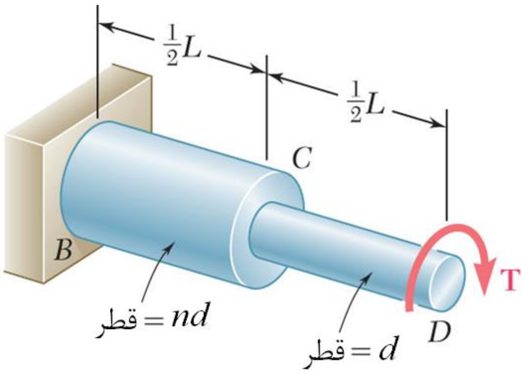
بنابراین برای یک میله یکنواخت این انرژی از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۸-۱۸)



××

مثال (۸-۴)



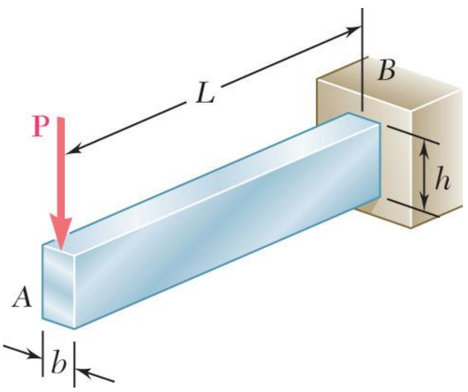
انرژی کرنشی کل را برای محور دایره‌ای شکل مقابل تعیین کنید.

حل: از رابطه (۸-۱۸) انرژی کرنشی کل برابر است با:

$$U=\sum_i\frac{T_i^2L_i}{2G_iJ_i}=\frac{T^2\left(\frac{L}{2}\right)}{2GJ}+\frac{T^2\left(\frac{L}{2}\right)}{2G\left(n^4J\right)}=$$

××

مثال (۸-۵)



انرژی کرنشی تیر یکسرگیردار زیر را تعیین کنید. اثر هر دو تنش قائم و برشی را به حساب آورید.

حل: از مثال (۸-۳) می‌دانیم انرژی کرنشی ناشی از تنش قائم یعنی σ_x برابر است با:

$$U_\sigma=\frac{P^2L^3}{6EI}$$

برای تعیین انرژی کرنشی ناشی از تنشهای برشی ابتدا باید مقدار این تنش‌ها را تعیین کنیم.

این تنش برای تیری با مقطعی مستطیلی به پهنای b و عمق h از معادله (۵-۶) بدست می‌آید:

××

با قرار دادن این τ_{xy} در معادله (۸-۱۶) خواهیم داشت:

$$U_\tau = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{\left[\frac{3P}{2bh}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\right]^2}{2G} dV = \frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2 \int \left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

با توجه به اینکه $dV=bdydx$ بوده و با ساده‌سازی بدست می‌آید:

انتگرال‌گیری از عبارت بالا و قرار دادن $c=h/2$ در آن نتیجه زیر را در پی خواهد داشت:

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2}\left[y - \frac{2}{3}\frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{y^5}{c^4}\right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

××

پس انرژی کرنشی کل تیر برابر است با:

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

با توجه به اینکه $I/A=h^2/12$ است می‌توان نوشت:

با توجه به اینکه $G \geq E/3$ است عبارت داخل پرانتز از $1+0.9(h/L)^2$ کمتر است.

بنابراین اگر اثر برش را نادیده بگیریم خطای نسبی از $0.9(h/L)^2$ کمتر خواهد بود.

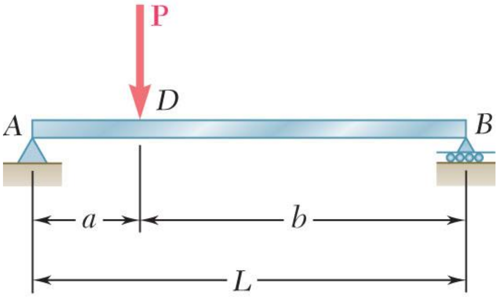
برای تیری با نسبت $h/L<1/10$ درصد خطا از 0.9% کمتر است.

بنابراین در مهندسی، چشم‌پوشی از اثر برش هنگام محاسبه انرژی کرنشی تیرهای باریک متداول است.

××

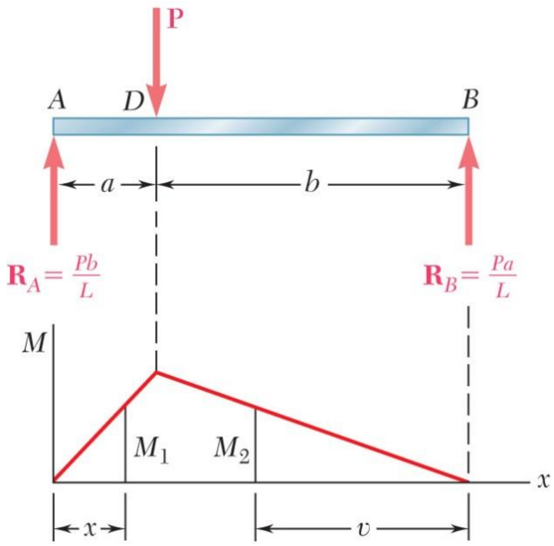
مثال (۸-۶)

در صورتی که تنها تنشهای نرمال حاصل از خمش را در نظر بگیریم انرژی کرنشی تیر را برای بارگذاری نشان داده شده بدست آورید.



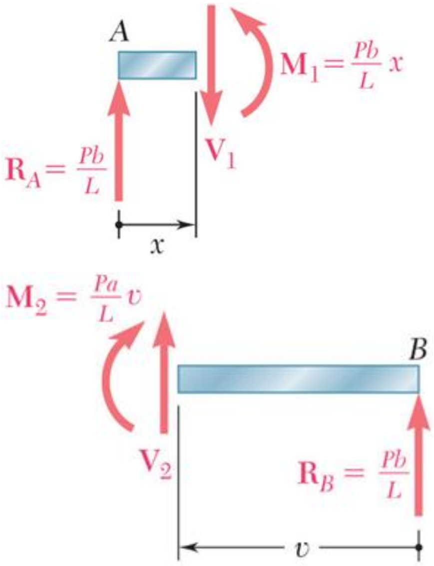
$$I = 1.0323\times10^{-4}\ \text{m}^4 \quad , \quad P = 178\ \text{kN}$$
$$L = 3.75\ \text{m} \quad , \quad a = 1\ \text{m} \quad , \quad b = 2.75\ \text{m} \quad , \quad E = 200\ \text{GPa}$$

حل: ابتدا با استفاده از دیاگرام آزاد تیر عکس‌العمل تکیه‌گاهها را تعیین می‌کنیم.



××

مطابق با این دیاگرام گشتاور خمشی روی قسمتهای AD و BD برابر است با:



برای یافتن انرژی کرنشی روی حجم تیر انتگرال می‌گیریم:

$$U = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}dv$$

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv = \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right)$$

××

با فاکتورگیری و ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b) =$$

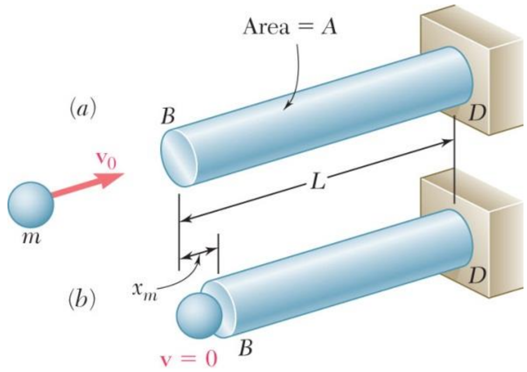
با جاگذاری بدست می‌آید:

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL} = \frac{\left(178\times10^3\right)^2 (1)^2 (2.75)^2}{6\left(62\times10^9\right)\left(1.0323\times10^{-4}\right)(3.75)} = 515.8\ \text{N.m}$$

××

بارگذاری ضربه‌ای

مطابق شکل جسمی به جرم m با سرعت v_0 به انتهای یک میله اصابت می‌کند.



میله در اثر ضربه تغییر شکل داده و تنش در آن به مقدار ماکزیمم σ_m رسیده و سپس ناپدید می‌گردد.

مقدار انرژی جنبشی ماکزیمم برابر است با:

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \qquad (۸-۱۹)$$

همچنین فرض می‌کنیم نمودار تنش- کرنش بدست آمده از آزمون کشش استاتیک برای بارگذاری ضربه‌ای هم صادق است.

××

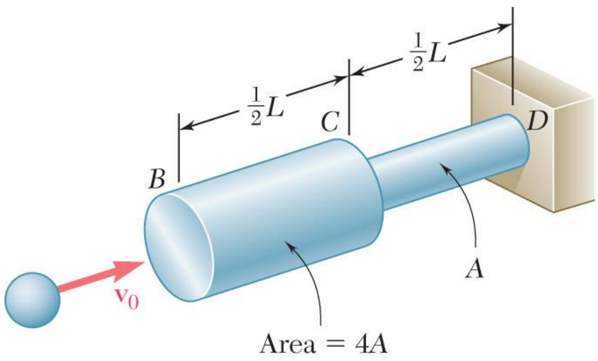
مقدار ماکزیمم انرژی کرنشی برابر است با:

(۸-۲۰)

در نتیجه برای یک میله یکنواخت خواهیم داشت:

$$U_m = \frac{\sigma_m^2}{2E} V \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_m^2}{2E} V = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \qquad \sigma_m = \sqrt{\frac{m v_0^2 E}{V}} \qquad (۸-۲۱)$$

مثال (۸-۷): جسمی به جرم m و سرعت v_0 به انتهای میله BCD اصابت می‌کند. اگر قطر قسمت BC دو برابر قطر قسمت CD باشد مقدار ماکزیمم تنش نرمال را در میله محاسبه کنید.



××

حل: بدلیل تغییر قطر میله، توزیع تنش در آن یکنواخت نیست و در نتیجه نمی‌توان از معادله (۸-۲۱) استفاده کرد:

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} = \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV \neq \frac{\sigma_m^2 V}{2E}$$

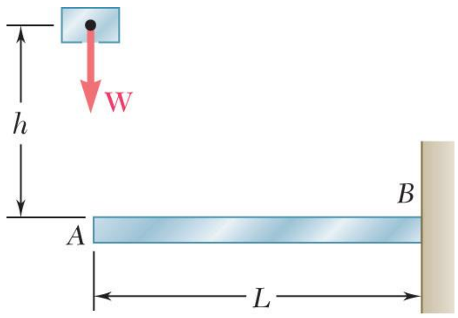
با توجه به این مطلب، برای حل مسأله ابتدا نیروی استاتیک P_m که انرژی کرنشی آن با انرژی کرنشی ضربه مساوی است محاسبه می‌کنیم:

$$U_m = \frac{P_m^2 (L/2)}{2AE} + \frac{P_m^2 (L/2)}{2 \times 4AE} = \frac{5}{16} \frac{P_m^2 L}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{16} \frac{P_m^2 L}{AE} = \frac{1}{2} m v_0^{\,2}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{AEmv_0^{\,2}}{L}}$$

تنش ماکزیمم برابر است با:

××



مثال (۸-۸)

آجری به وزن W از ارتفاع h روی انتهای آزاد تیر یکسرگیردار سقوط می‌کند.

مقدار ماکزیمم تنشها را در تیر تعیین کنید.

حل: تنش نرمال در امتداد طولی و نیز یکی امتدادهای عرضی سطح مقطع

عرضی آن بصورت خطی تغییر می‌کند.

بنابراین توزیع تنش در تیر یکنواخت نبوده و نمی‌توان از معادله (۸-۲۱) استفاده کرد:

در نتیجه برای یافتن تنش ماکزیمم ابتدا نیروی استاتیک P_m که انرژی کرنشی مساوی با ضربه ایجاد می‌کند تعیین می‌کنیم.

××

برای تیر یکسرگیرداری که انتهای آزاد آن تحت بار است انرژی کرنشی برابر است با:

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_m^2 L^3}{6EI} = Wh \quad \Rightarrow$$

بنابراین تنش ماکزیمم ناشی از نیروی استاتیک P_m عبارت است از:

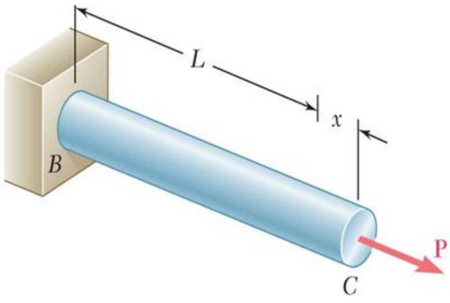
$$\sigma_m = \frac{M_m c}{I} = \frac{P_m Lc}{I} = \sqrt{\frac{6EIWh}{L^3}}\frac{Lc}{I} = \sqrt{\frac{6WhE}{L\left(I/c^2\right)}}$$

از مثالهای اخیر می‌توان دید عوامل زیر تنش ماکزیمم ناشی از ضربه را کاهش می‌دهد:

- یکنواختی تنش، مدول الاستیسیته پایین با استحکام تسلیم بالا، حجم زیاد

××

کار و انرژی تحت اثر بار منفرد



در بخشهای قبل انرژی کرنشی را با انتگرال‌گیری از چگالی انرژی کرنشی روی حجم جسم بدست آوردیم.

به عنوان مثال برای یک میله یکنواخت دیدیم:

(۸-۲۲)

انرژی کرنشی را می‌توان از کار نیروی منفرد P_1 نیز تعیین کرد:

(۸-۲۳) $$U=\int_0^{x_1} P_1\,dx$$ برای تغییر شکل الاستیک داریم:

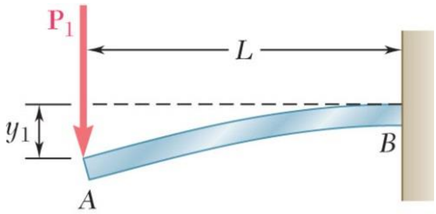
(۸-۲۴) $$U=\int_0^{x_1} P_1\,dx=\int_0^{x_1} kx\,dx=\tfrac{1}{2}k x_1^2=\tfrac{1}{2}P_1 x_1$$

×××

با توجه به رابطه بین نیرو و جابجایی می‌توان نوشت:

$$x_1=\frac{P_1 L}{AE} \quad\Rightarrow\quad U=\tfrac{1}{2}P_1\left(\frac{P_1 L}{AE}\right)=\frac{P_1^2 L}{2AE}$$ (۸-۲۵)

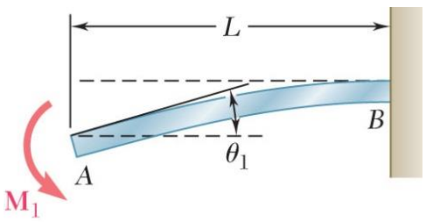
با استفاده از کار دیگر انواع نیروهای متمرکز منفرد نیز می‌توان انرژی کرنشی را تعیین کرد.



بارگذاری عرضی:

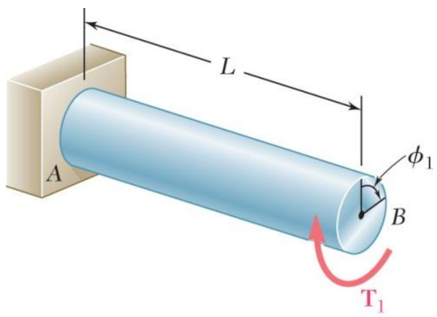
(۸-۲۶)

×××



گشتاور خمشی:

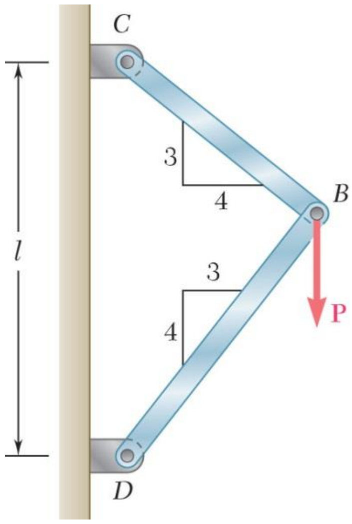
(۸-۲۷) $$U=\int_0^{\theta_1} M\,d\theta=\tfrac{1}{2}M_1\theta_1=\tfrac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1 L}{EI}\right)=\frac{M_1^2 L}{2EI}$$

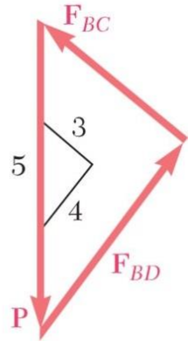


گشتاور پیچشی:

(۸-۲۸)

×××





خیز تحت اثر بار منفرد

اگر انرژی کرنشی یک سازه را در اثر نیروی متمرکز منفرد بدانیم می‌توانیم از آن برای یافتن خیز سازه استفاده کنیم.

مثلاً در سازه مقابل از هندسه مسأله داریم:

$$L_{BC}=0.6l \qquad L_{BD}=0.8l$$

بنابراین برای تعادل استاتیک لازم است: $F_{BC}=+0.6P \quad F_{BD}=-0.8P$

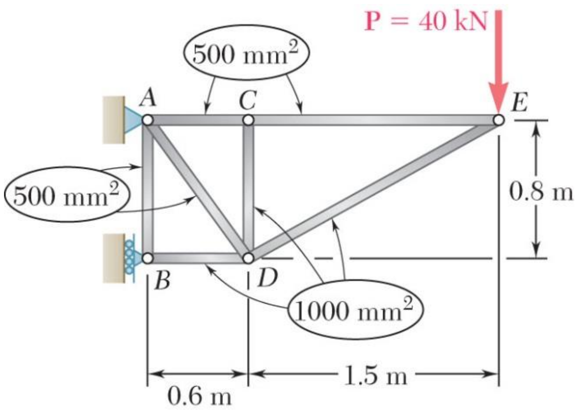
انرژی کرنشی سازه برابر است با:

$$U=\frac{F_{BC}^2L_{BC}}{2AE}+\frac{F_{BD}^2L_{BD}}{2AE}=$$

××

با مساوی قرار دادن کار ناشی از نیروی P و انرژی کرنشی سازه بدست می‌آید:

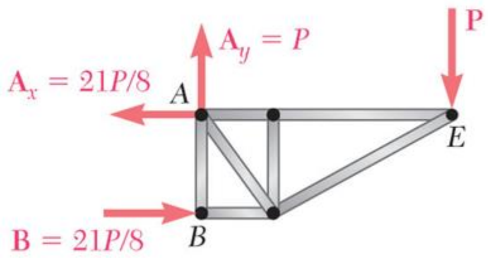
$$U=0.364\frac{P^2L}{AE}=\frac{1}{2}Py_B \quad \Rightarrow$$



مثال (۸-۹): میله‌های خرپای نشان داده شده در شکل از جنس آلومینیوم با مدول الاستیک E=73GPa هستند. خیز عمودی نقطه E را در اثر نیروی P تعیین کنید.

ابتدا با استفاده از دیاگرام آزاد کل خرپا عکس‌العمل تکیه‌گاههای A و B را بدست می‌آوریم.

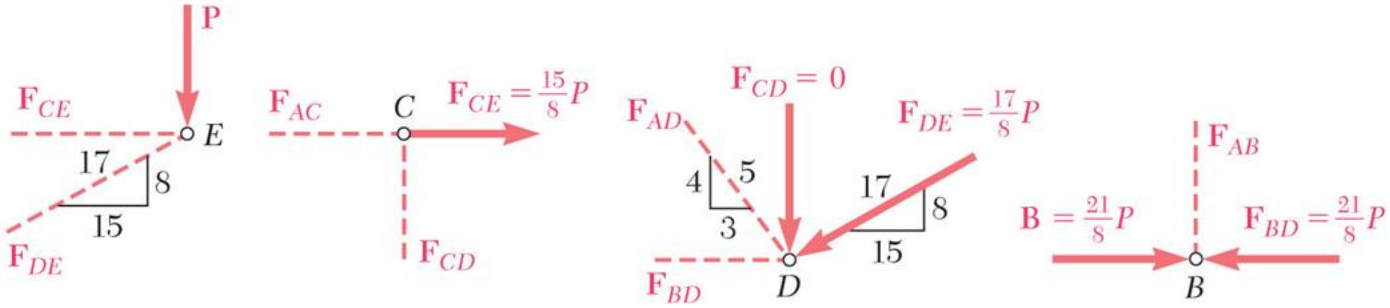
××



$$A_x=-21P/8 \qquad A_y=P \qquad B=21P/8$$

$$F_{DE}=-\tfrac{17}{8}P \qquad F_{AC}=+\tfrac{15}{8}P \qquad F_{AD}=\tfrac{5}{4}P \qquad F_{AB}=0$$

$$F_{CE}=+\tfrac{15}{8}P \qquad F_{CD}=0 \qquad F_{BD}=-\tfrac{21}{8}P$$



××

پارامترهای مربوط به هر یک از میله‌های خرپا در جدول مقابل فهرست شده‌اند.

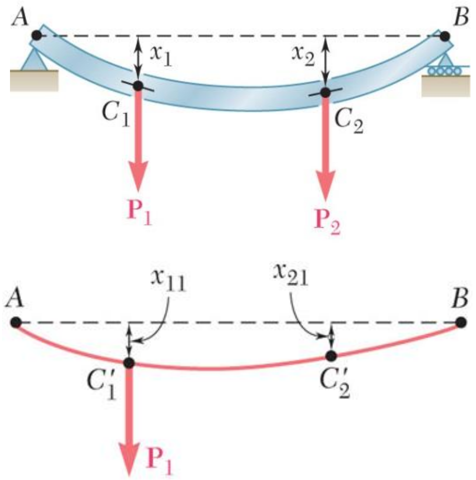
با توجه به این جدول انرژی کرنشی خرپا در اثر نیروی P برابر است با:

این انرژی کرنشی را مساوی کار نیروی P قرار می‌دهیم تا جابجایی بدست آید:

$$y_E = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P}\left(\frac{29700P^2}{2E}\right) \Rightarrow y_E = \frac{\left(29.7\times10^3\right)\left(40\times10^3\right)}{73\times10^9} = 16.27\text{mm}\downarrow$$

Member	F_i	L_i, m	A_i, m²	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	1000×10^{-6}	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	1000×10^{-6}	$7\,677P^2$

××



کار و انرژی تحت اثر نیروهای متعدد

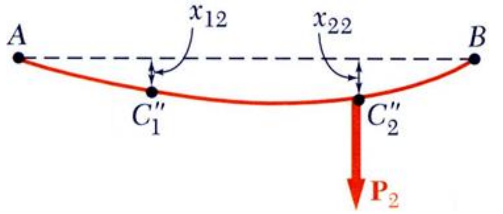
تیری الاستیک را در نظر بگیرید که مطابق شکل در نقاط C_1 و C_2

در معرض دو نیروی متمرکز P_1 و P_2 قرار داشته باشد.

اگر تنها نیروی P_1 به تیر اعمال شده بود داشتیم:

که در آن x_{11} خیز تیر در نقطه C_1 در اثر بار P_1 و x_{21} خیز تیر در نقطه C_2 در اثر بار P_1 است.

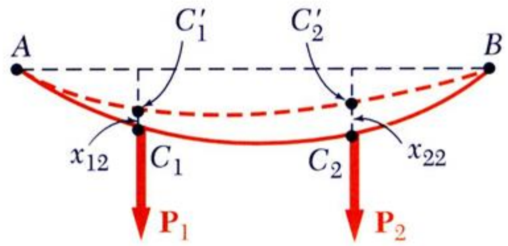
ضرایب α هم ضرایب تأثیر نام دارند. به عنوان نمونه α_{21} نشان دهنده خیز ایجاد شده در نقطه C_2 است وقتی نیرویی با اندازه واحد در نقطه C_1 اعمال شود.



××

اگر تنها نیروی P_2 به تیر اعمال شده بود داشتیم:

$$x_{12} = \alpha_{12} P_2 \qquad x_{22} = \alpha_{22} P_2$$



طبق اصل برهم نهی وقتی هر دو نیروی P_1 و P_2 به تیر اعمال شوند خیز تیر در نقطه C_1 یعنی x_1 و خیز آن در نقطه C_2 یعنی x_2 برابر است با:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \end{aligned} \qquad (۸-۲۹)$$

در حالتی که تیر ابتدا به آهستگی تحت نیروی P_1 قرار می‌گیرد کار نیروی P_1 از رابطه (۸-۳) بدست می‌آید:

××

حال وقتی نیرو P_2 را به آهستگی در نقطه C_2 اعمال کنیم افزایش انرژی کرنشی تیر برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} P_2 x_{22} + P_1 x_{12} = \frac{1}{2} P_2 \left(\alpha_{22} P_2 \right) + P_1 \left(\alpha_{12} P_2 \right) = \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^{\,2} + \alpha_{12} P_1 P_2$$

ترم دوم معادله بالا از آنجا حاصل شده است که هنگام اعمال بار P_2 نقطه اعمال نیروی P_1 نیز به اندازه x_{12} جابجا شده است.

بنابراین انرژی کرنشی کل تیر در اثر اعمال P_1 و سپس P_2 برابر است با:

(۸-۳۰)

××

با محاسباتی مشابه می‌توان نشان داد اگر ابتدا P_2 و سپس P_1 را اعمال کنیم انرژی کرنشی تیر برابر خواهد بود با:

(۸-۳۱)

با مقایسه دو معادله (۸-۳۰) و (۸-۳۱) نتیجه می‌گیریم باید $\alpha_{12}=\alpha_{21}$ باشد.

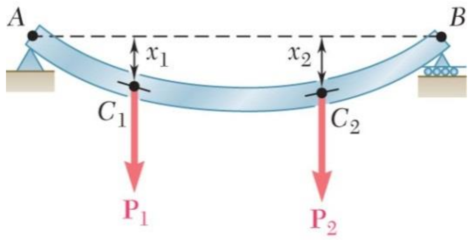
با توجه به تعریف ضرایب α می‌توان گفت:

- خیز ایجاد شده در نقطه C_1 بر اثر اعمال بار واحد در نقطه C_2 با خیز ایجاد شده در نقطه C_2 بر اثر اعمال بار واحد در نقطه C_1 معادل است.

- این نتیجه را قضیه دو جانبه ماکسول می‌نامند.

××

قضیه کاستیگلیانو



همانطور که دیدیم انرژی کرنشی تیر الاستیک تحت اثر دو نیروی P_1 و P_2 از رابطه زیر حاصل می‌شود:

اگر از رابطه بالا نسبت به P_1 یا P_2 مشتق بگیریم بدست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \tag{۸-۳۲}$$

بطور کلی اگر سازه‌ای در معرض n بار $P_1, P_2, \ldots, P_n$ قرار گیرد خیز نقطه اثر اعمال نیروی P_j یعنی x_j در امتداد نیروی P_j برابر است با:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{۸-۳۳}$$

××

این قضیه به قضیه کاستیگلیانو معروف است.

اگر گشتاور خمشی M به آهستگی به نقطه‌ای اعمال شده و آن را به اندازه θ بچرخاند کار آن برابر $\frac{1}{2}M\theta$ خواهد بود.

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{۸-۳۴}$$

بطور مشابه زاویه پیچش ϕ_j در مقطعی از محور که گشتاور T_j به آهستگی به آن وارد می‌شود مساوی است با:

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{۸-۳۵}$$

××

تعیین خیز با استفاده از قضیه کاستیگلیانو

اگر پیش از انتگرال‌گیری یا جمع زدن عبارت انرژی کرنشی از آن نسبت به P_j مشتق بگیریم محاسبه خیز نقطه x_j از طریق قضیه کاستیگلیانو ساده‌تر می‌شود.

مثلاً در بخشهای قبلی دیدیم انرژی کرنشی تیر برابر است با:

$$U=\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$$

بنابراین خیز x_j نقطه اعمال بار P_j از رابطه مقابل بدست می‌آید:

(۸-۳۶)

ضمناً انرژی کرنشی خرپای n عضوی مساوی است با:

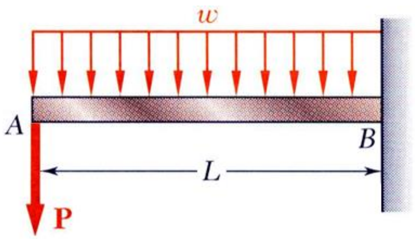
$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i^2 L_i}{2A_i E}$$

در نتیجه خیز x_j نقطه اعمال بار P_j بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_j=\frac{\partial U}{\partial P_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \qquad (۸-۳۷)$$

××

مثال (۸-۱۰)



تیر یکسرگیردار AB بار گسترده یکنواخت w و بار متمرکز P را مطابق شکل تحمل می‌کند. اگر L=2m، w=4kN/m، P=6kN و EI=5MN.m^2 باشد خیز نقطه A را تعیین کنید.

حل: برای تعیین خیز نقطه A که محل اعمال نیروی P است از معادله (۸-۳۶) بهره می‌گیریم:

لنگر خمشی M در فاصله x از A برابر است با:

$$M=-\left(Px+\frac{1}{2}wx^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial P}=-x$$

××

بنابراین خواهیم داشت:

$$y_A=\int_0^L \frac{-\left(Px+\frac{1}{2}wx^2\right)}{EI}(-x)\,dx=\frac{1}{EI}\int_0^L\left(Px^2+\frac{1}{2}wx^3\right)dx=\frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3}+\frac{wL^4}{8}\right)$$

با جاگذاری داده‌های تیر در رابطه بالا بدست می‌آید:

چون بار P رو به پایین بوده و y_A مثبت بدست آمد پس جهت y_A هم باید رو به پایین باشد:

$$y_A = 4.8 \text{ mm} \downarrow$$

××

تعیین خیز با استفاده از قضیه کاستیگلیانو

با کمک قضیه کاستیگلیانو در صورتی می‌توان x_j یعنی خیز سازه را در نقطه مفروض C_j بدست آورد که بار P_j در نقطه C_j در امتدادی که محاسبه x_j مورد نظر است اعمال شود.

برای رفع این محدودیت، هنگامی که باری در نقطه C_j اعمال نشود یا وقتی بار در امتدادی غیر از امتداد مطلوب وارد شود بصورت زیر عمل می‌کنیم:

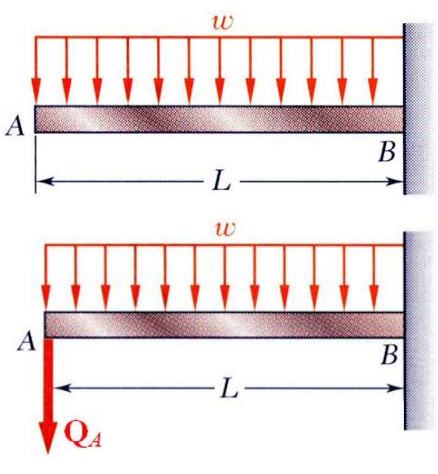
- بار مجازی Q_j را در نقطه C_j در امتداد مطلوب اعمال کرده و برای بدست آوردن خیز ناشی از Q_j و بارهای واقعی قضیه کاستیگلیانو را بکار می‌بریم:

(۸-۳۸)

- با قرار دادن $Q_j=0$ در معادله بالا، خیز در نقطه C_j در امتداد مطلوب و تحت بارگذاری واقعی بدست می‌آید.
- شیب θ_j و زاویه پیچش ϕ_j را نیز می‌توان به ترتیب با اعمال گشتاور خمشی و پیچشی مجازی در نقطه C_j تعیین نمود.

××

مثال (۸-۱۱)



تیر یکسرگیردار AB بار گسترده یکنواخت w را تحمل می‌کند.

خیز و شیب نقطه A را تعیین کنید.

حل: برای تعیین خیز در نقطه A بار مجازی رو به پایین Q_A را در نقطه A وارد کرده و می‌نویسیم:

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}dx$$

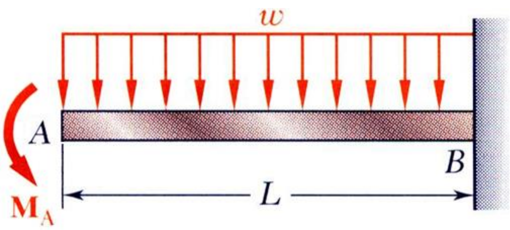
لنگر خمشی M در فاصله x از A برابر است با:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x$$

××

با جاگذاری در معادله (۸-۳۶) بدست می‌آید:

$$y_A = \int_0^L \frac{-\left(Q_A x + \frac{1}{2}wx^2\right)}{EI}(-x)\,dx = \int_0^L \frac{0\times x + \frac{1}{2}wx^2}{EI}xdx = \frac{1}{EI}\int_0^L \frac{1}{2}wx^3dx = \frac{wL^4}{8EI}$$



چون بار مجازی Q_A رو به پایین بود و y_A مثبت بدست آمد y_A هم باید رو به پایین باشد:

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI} \downarrow$$

برای تعیین شیب در نقطه A، گشتاور مجازی M_A را در نقطه A وارد کرده و از رابطه (۸-۳۴) می‌نویسیم:

××

گشتاور خمشی در فاصله x از نقطه A برابر است با:

$$M = -M_A - \frac{1}{2}wx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\theta_A = \int_0^L \frac{-M_A - \frac{1}{2}wx^2}{EI}(-1)\,dx =$$

چون گشتاور مجازی M_A پادساعتگرد است علامت مثبت نشان می‌دهد که زاویه θ_A نیز پادساعتگرد است.

××

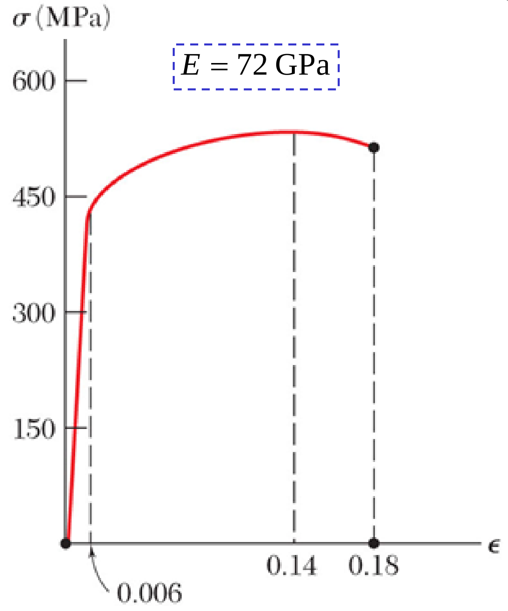
مثال (۸–۱۲) (دوره)

مدول برجهندگی را برای آلیاژ آلومینیومی زیر تعیین کنید. $1100\text{-H14}: \quad E = 70\times 10^9\ \text{Pa} \quad , \quad \sigma_y = 55\times 10^6\ \text{Pa}$

حل: با استفاده از معادله (۸–۶) داریم:

××

مثال (۸-۱۳) (دوره)



نمودار تنش- کرنش مقابل از آزمون کشش آلیاژی آلومینیومی بدست آمده است. مدول برجهندگی و مدول چقرمگی آلیاژ را تعیین نمایید.

$$u_Y=\frac{\sigma_Y^2}{2E}=\frac{1}{2}E\varepsilon_Y^2=\frac{1}{2}\left(72\times10^9\right)\left(0.006\right)^2$$

$$=1296\times10^3\ \text{N.m/m}^3=1296\,\text{KJ/m}^3$$

××

مدول چقرمگی برابر با سطح کل نمودار تنش-کرنش تا نقطه شکست است.

با تقریب خوبی تنش متوسط از لحظه تسلیم تا شکست را می‌توان 500MPa فرض نمود.

در اینصورت مدول چقرمگی حدوداً برابر خواهد بود با:

$$u_T=A=\left(500\times10^6\right)\left(0.18\right)=$$

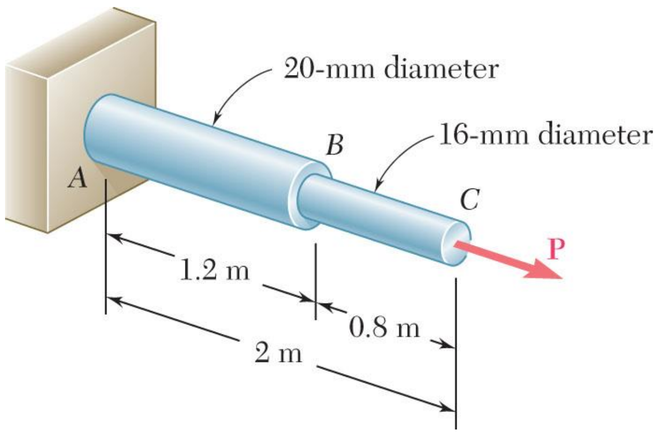
برای تعیین دقیق‌تر مدول چقرمگی باید از روش دقیق‌تری برای محاسبه سطح زیر نمودار بهره گرفت.

××

مثال (۸-۱۴) (دوره)

$\sigma_Y=250\ \text{MPa}$

$E=200\ \text{GPa}$



بیشترین انرژی کرنشی قابل جذب توسط میله فولادی مقابل را قبل از اینکه تغییر شکل دائمی در آن ایجاد شود بیابید.

حل:

$$A_{AB}=\frac{\pi}{4}(20)^2=314.16\ \text{mm}^2=314.14\times10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$A_{BC}=\frac{\pi}{4}(16)^2=201.06\ \text{mm}^2=201.06\times10^{-6}\ \text{m}^2$$

××

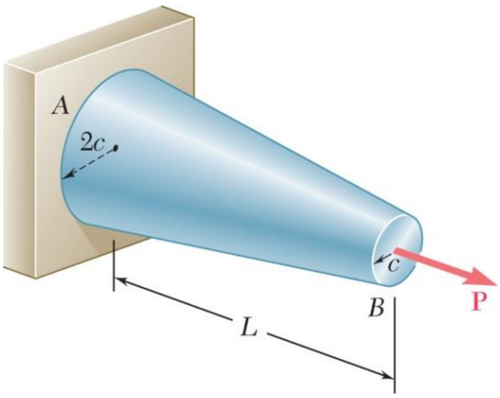
لذا مسأله انرژی کرنشی در لحظه تسلیم را از ما می‌خواهد.

نیرویی که سبب تسلیم میله می‌شود برابر است با:

بنابراین انرژی ذخیره شده در جسم عبارت است از:

$$U=\sum\frac{P^2L}{2EA}=\frac{(50265)^2(1.2)}{(2)(200\times10^9)(314.16\times10^{-6})}+\frac{(50265)^2(0.8)}{(2)(200\times10^9)(201.06\times10^{-6})}=24.13+25.13=49.26\text{ J}$$

××

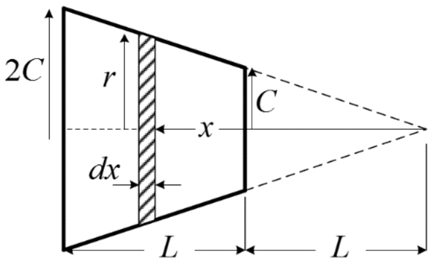


مثال (۸-۱۵) (دوره)

نشان دهید انرژی کرنشی میله مخروطی AB برابر است با : $U=\dfrac{P^2L}{4EA_{\min}}$

$A_{\min}$: مساحت در نقطه B

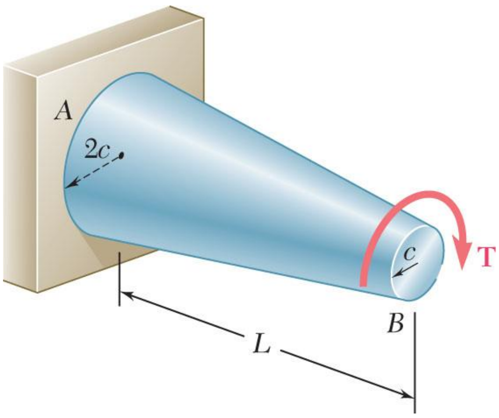
حل:



$$\frac{r}{2c}=\frac{x}{2L}\quad\rightarrow\quad r=\frac{x}{L}c$$

××

$$U=\int_L^{2L}\frac{P^2dx}{2AE}=\frac{P^2}{2E}\int_L^{2L}\frac{L^2}{\pi c^2}\frac{dx}{x^2}=\frac{P^2L^2}{2E\pi c^2}\left(-\frac{1}{x}\right)_L^{2L}=$$

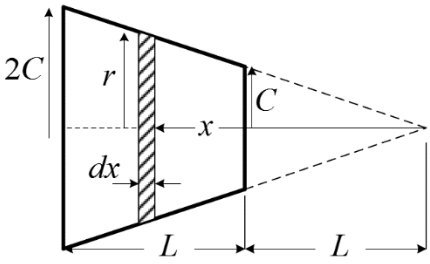


××

مثال (۸-۱۶) (دوره)

نشان دهید انرژی کرنشی میله مخروطی AB برابر است با : $U=\dfrac{7}{48}\dfrac{T^2L}{GJ_{\min}}$

J_{min} : ممان اینرسی قطبی در نقطه B



حل:

$$\frac{r}{2c}=\frac{x}{2L} \quad \rightarrow \quad r=\frac{x}{L}c$$

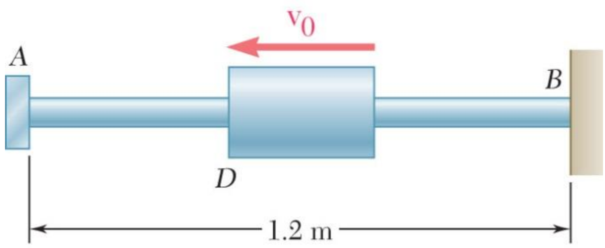
×××

$$U=\int_L^{2L}\frac{T^2dx}{2GJ}=\int_L^{2L}\frac{T^2}{2G}\frac{dx}{(\frac{\pi}{2}\frac{x^4c^4}{L^4})}=\frac{T^2L^4}{2GJ_{min}}\int_L^{2L}\frac{dx}{x^4}=\frac{T^2L^4}{2GJ_{min}}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)_L^{2L}=$$

×××

مثال (۸-۱۷) (دوره)

لغزنده D با سرعت v_0 در طول میله برنجی AB حرکت می‌کند تا به صفحه کوچک انتهای A برخورد کند. بیشترین جرم مجاز لغزنده چقدر باشد تا ضریب ایمنی میله AB در برابر تغییر شکل دائم مساوی با چهار باشد.



$\sigma_Y=125\ \text{MPa}\ ,\ E=105\ \text{GPa}$
$v_0=3\ \text{m/s}\ ,\ d_{AB}=16\ \text{mm}$

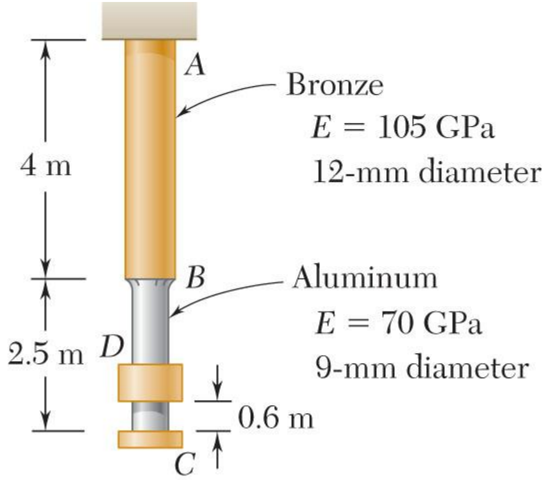
حل: نیروی لازم برای تسلیم میله برابر است با:

×××

این نیرو سبب ذخیره انرژی کرنشی زیر در ماده می‌شود:

$$U_m=\frac{P_m^2L}{2AE}=\frac{(25133)^2(1.2)}{2\left(\frac{\pi}{4}(16\times10^{-3})^2\right)\left(105\times10^9\right)}=17.953\ \text{J}$$

چهار برابر انرژی جنبشی لغزنده باید این انرژی را در میله ایجاد کند:



××

مثال (۸–۱۸) (دوره)

لغزنده D در موقعیت نشان داده شده از حالت سکون رها می‌شود تا در اثر برخورد با صفحه کوچک انتهای C متوقف شود. جرم لغزنده چقدر باشد تا تنش عمودی در قسمت BC برابر با 125 MPa شود.

حل:

$$A_{BC}=\frac{\pi}{4}\left(9\times10^{-3}\right)^2=63.617\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

××

نیروی لازم برای ایجاد تنش مذکور در قسمت BC برابر است با:

انرژی ایجاد شده توسط این نیرو در قسمت BC برابر است با:

$$U_{BC}=\frac{P_m^2 L_{BC}}{2E_{BC}A_{BC}}=\frac{(7952)^2(2.5)}{(2)\left(70\times10^9\right)\left(63.617\times10^{-6}\right)}=17.750\ \mathrm{J}$$

همین نیرو به قسمت AB نیز وارد شده و انرژی حاصل از آن عبارت است از:

$$U_{AB}=\frac{P_m^2 L_{AB}}{2E_{AB}A_{AB}}=\frac{(7952)^2(4)}{(2)\left(105\times10^9\right)\left(113.907\times10^{-6}\right)}=10.574\ \mathrm{J}$$

××

بنابراین انرژی کل میله عبارت است از:

$$U_m=U_{BC}+U_{AB}=28.324\ \mathrm{J}$$

این انرژی باید با انرژی پتانسیل آزاد شده از لغزنده برابر باشد:

$$U_m=mg\left(h+\Delta_m\right)$$

تغییر شکل میله در اثر نیرو مساوی است با:

$$U_m = \frac{1}{2} P_m \Delta_m \quad \rightarrow \quad \Delta_m = \frac{2U_m}{P_m} = \frac{2 \times 28.324}{7952} = 7.12 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \qquad \Rightarrow$$

××