



## تئوریهای وامندگی Failure theories

تئوریهای وامندگی (معیارهای تسلیم) برای مواد چکش خوار:

- |                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| Maximum normal stress (MNS) | ۱- تنش نرمال ماکزیمم |
| Maximum shear stress (MSS)  | ۲- تنش برشی ماکزیمم  |
| Distortion energy (DE)      | ۳- انرژی واپیچش      |

تئوریهای وامندگی (معیارهای شکست) برای مواد ترد:

- |                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| Maximum normal stress (MNS) | ۱- تنش نرمال ماکزیمم |
| Coulomb-Mohr (BCM)          | ۲- کولمب-موهر        |
| Modified Mohr (MM)          | ۳- موهر اصلاح شده    |

XX

## تئوری تنش نرمال ماکزیمم برای مواد چکش خوار

اولین تئوری ارائه شده برای پیش‌بینی وامندگی مواد چکش خوار تئوری تنش نرمال ماکزیمم بود.

طبق این تئوری، تسلیم وقتی اتفاق می‌افتد که بزرگترین تنش اصلی در یک المان برابر یا بیشتر از استحکام تسلیم ماده گردد.

اگر به تنش اصلی را بصورت  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  مرتب کنیم آنگاه طبق این تئوری تسلیم وقتی روی مرزده که حالت بالایی

$$\sigma_1 = S_y \quad \text{or} \quad \sigma_3 = -S_y \quad S_y \text{ استحکام تسلیم} \quad (1-4)$$

این تئوری فقط به لحاظ سابقه تاریخی در اینجا ارائه می‌شود. پیش‌بینی‌های آن با تجربه تطابق نداشته و نتایج آن اغلب غیر ایمن هستند.

XX

در مطلق تنش کششی و تنش اصلی هر کس را با  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  نشان می‌دهیم.

شکل زیر نمودار تئوری تنش نرمال ماکزیمم را در صفحه  $\sigma_A$  و  $\sigma_B$  نمایش می‌دهد.



سطح مقطع شکست نیز با محور کشش زاویه تقریبی  $45^\circ$  می‌سازد

بنابراین این احساس بوجود می‌آید که تنش برشی ماکزیمم عامل ایجاد شکست است.

همین مسأله در شکل تئوری تنش برشی ماکزیمم آورده که به تئوری ترسکا نیز معروف است.

طبق این تئوری، تسلیم وقتی آغاز می‌شود که تنش برشی ماکزیمم برابر یا بیشتر از تنش برشی ماکزیمم نمونه آزمون کشش

هنگام تسلیم شود.

XX

هنگام تسلیم نمونه تست کشش تنش نرمال در آن برابر  $\sigma = S_y$  می‌باشد.

تنش برشی ماکزیمم نمونه هنگام تسلیم برابر  $\tau_{max} = S_y / 2$  است.

بنابراین طبق تئوری تنش برشی ماکزیمم برای هر حالت تنشی در قطعه وقتی  $\tau_{max} = S_y / 2$  شود تسلیم آغاز می‌گردد.

برای استفاده از این تئوری، تنشهای اصلی را تعیین کرده و بصورت  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  مرتب می‌کنیم.

در اینصورت تنش برشی ماکزیمم برابر  $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$  خواهد بود.

XX

بنابراین برای حالت کلی تنش، مطابق با تئوری تنش برشی ماکزیمم تسلیم وقتی روی می‌دهد که داشته باشیم:

$$(2-4)$$

با توجه به این رابطه استحکام تسلیم در برش مطابق با معیار ترسکا برابر است با:

$$S_{sy} = 0.5S_y \quad (3-4)$$

بعداً خواهیم دید که این مقدار حدود ۱۵ درصد کم (محافظه‌کارانه) است.

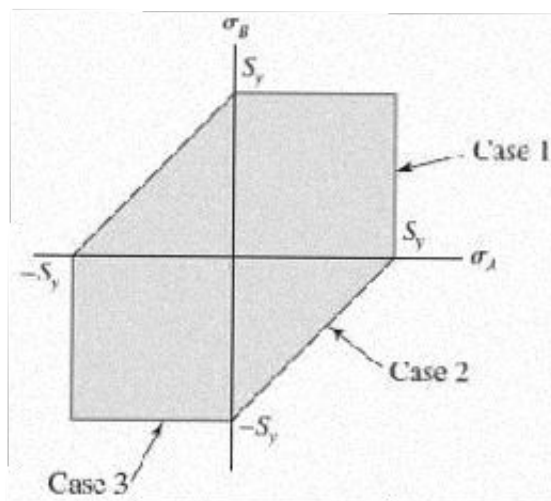
XX

برای معادله حلاله (۳-۴) را اصلاح نموده و یک ضریب ایمنی را در آن چنان می‌نویسیم:

$$\tau_{max} = \frac{S_y}{2n} = \frac{S_{sy}}{n} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \quad (4-4)$$

در حالت تنش صفحه‌ای نمودار معیار تنش برشی ماکزیمم در صفحه  $\sigma_A$  و  $\sigma_B$  بصورت یک شش ضلعی است.

طبق تئوری تنش برشی ماکزیمم داخل این شش ضلعی ناحیه ایمن برای طراحی است در حالیکه روی نمودار و بیرون از آن تسلیم روی می دهد.



اگر  $\sigma_A \geq S_y$  باشد، طبق نمودار سه حالت ممکن است، برای شرح

تسلیم رخ دهد:

حالت ۱:  $\sigma_A \geq S_y$

حالت ۲:  $\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$

حالت ۳:  $\sigma_B \leq -S_y$

### تئوری انرژی واپیچش برای مواد چکش خوار

طبق تئوری انرژی واپیچش، تسلیم وقتی اتفاق می افتد که انرژی واپیچش قطعه برابر یا بیشتر از انرژی واپیچش نمونه آزمون کشش هنگام تسلیم شود.

بنابراین برای حالت کلی تنش تسلیم وقتی رخ می دهد که داشته باشیم:

انرژی واپیچش در کشش ساده  $\geq$  انرژی واپیچش در حالت کلی تنش

می توان نشان داد انرژی واپیچش در حالت کلی تنش سه بعدی با رابطه زیر بدست می آید:

(۵-۴)

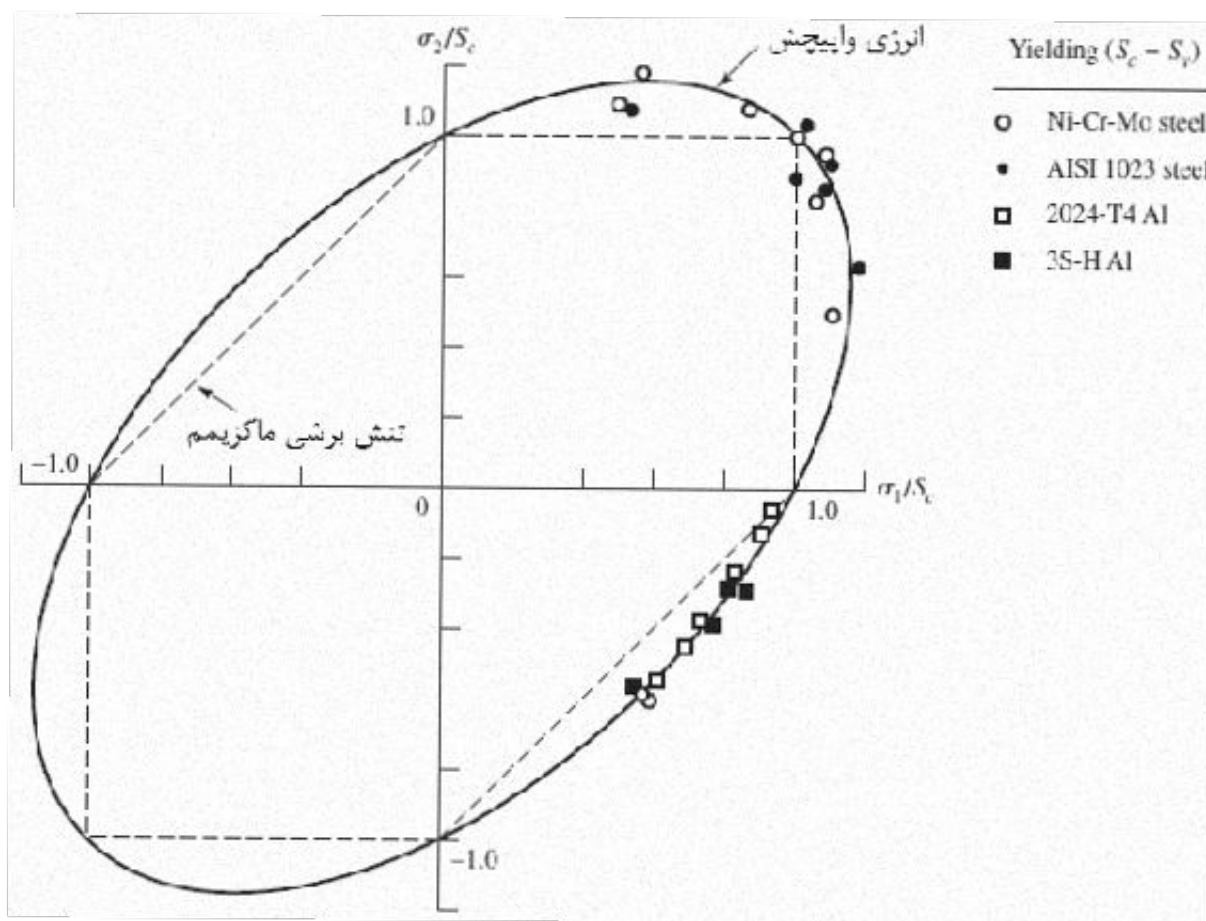
برای آزمون کشش ساده هنگام تسلیم  $\sigma_1 = S_y$  و  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  بوده و انرژی واپیچش برابر است با:

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\nu}{6E} [(S_y - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - S_y)^2] = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

بنابراین در حالت کلی تنش اگر  $u_d = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$  شود تسلیم آغاز می گردد.







XX

نمودار انرژی واپیچش به نقاط تجربی نزدیکتر است. بنابراین تئوری انرژی واپیچش دقت بالاتری دارد.

انتخاب یکی از این دو روش در طراحی به نظر مهندس بستگی دارد.

تئوری ماکزیمم تنش برشی ساده‌تر، سریعتر و محافظه‌کارانه است. اما تئوری انرژی واپیچش دقت بالاتری دارد.

اگر بخواهیم از دلیل خرابی یک قطعه آگاه شویم بهتر است از تئوری انرژی واپیچش استفاده نماییم.

XX

### مثال (۴-۱)

یک فولاد دارای استحکام تسلیم  $S_{ye} = S_{yc} = 100 \text{ kpsi}$  و کرنش واقعی شکست  $\epsilon_f = 0.55$  است. ضریب ایمنی را برای حالات تنش اصلی زیر محاسبه کنید.

- الف)  $70, 70, 0 \text{ kpsi}$     ب)  $30, 70, 0 \text{ kpsi}$     ج)  $0, 70, -30 \text{ kpsi}$     د)  $0, -30, -70 \text{ kpsi}$     ه)  $30, 30, 30 \text{ kpsi}$





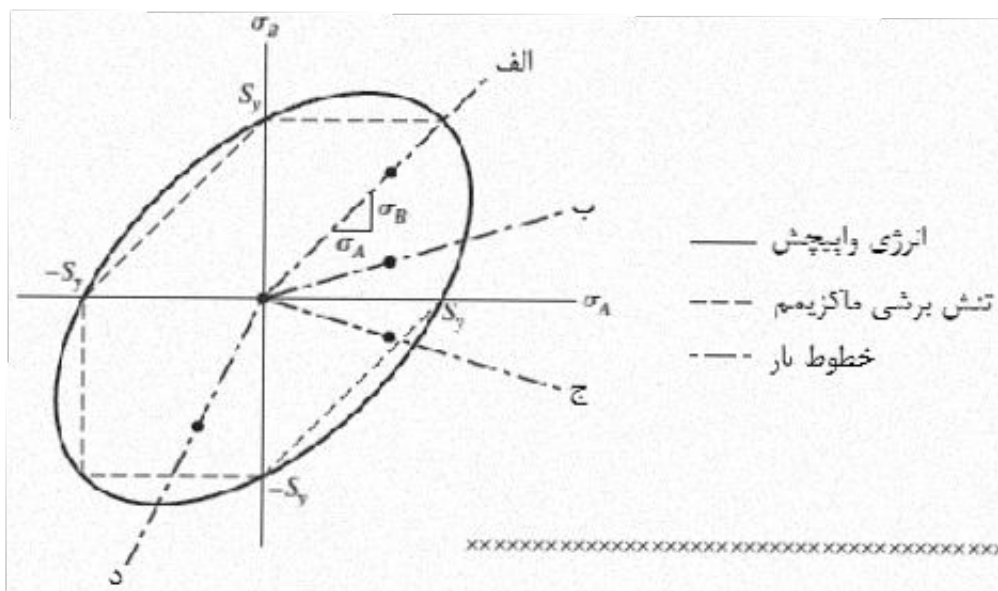




همانطور که دیدیم تئوری تنش برشی ماکزیمم همواره ضریب ایمنی برابر یا کمتری نسبت به تئوری انرژی واپیچش پیش‌بینی می‌کند.

شکل بعدی مختصات و خطوط بار مثال (۱۴-۴) را در صفحه  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  نشان می‌دهد.

خط بار برای حالت (الف) تنها حالتی از تنش صفحه‌ای است که در آن دو تئوری تطابق داشته و در نتیجه ضریب ایمنی



یکسانی می‌دهند.

#### تئوری تنش نرمال ماکزیمم برای مواد ترد

مطابق با تئوری تنش نرمال ماکزیمم، واماندگی وقتی روی می‌دهد که یکی از سه تنش اصلی برابر یا بیشتر از استحکام نهایی ماده گردد.

اولین تئوری ارائه شده برای پیش‌بینی واماندگی مواد ترد تئوری تنش نرمال ماکزیمم بود.

همانند قبل تنشهای اصلی را برای حالت کلی تنش بصورت  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  مرتب می‌کنیم.

حال بر اساس این تئوری هرگاه شرایط زیر برقرار باشد واماندگی اتفاق می‌افتد:

$$(14-4)$$

نمودار مربوط به تئوری تنش نرمال ماکزیمم در حالت تنش صفحه‌ای در شکل آمده است:

طبق این تئوری شکست وقتی رخ می‌دهد که داشته باشیم:

$$\sigma_A \geq S_w \quad \text{or} \quad \sigma_B \leq -S_w \quad (15-4)$$











ابتدا برای تئوری کولمب موهر معادله خط ۲ و سپس معادله طراحی را می‌نویسیم:

$$\frac{\sigma_A}{200} + \frac{\sigma_B}{-300} = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_A}{200/n} - \frac{\sigma_B}{300/n} = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_A}{200} - \frac{\sigma_B}{300} = \frac{1}{n}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

پس در حالت ب ضریب ایمنی برای تئوری کولمب موهر  $n = 1.57$  است.

XX

برای تئوری موهر اصلاح شده از معادله خط ۳ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sigma_A - 200}{0 - 200} = \frac{\sigma_B - (-200)}{-300 - (-200)} \Rightarrow \frac{\sigma_A - 200/n}{0 - 200/n} = \frac{\sigma_B - (-200)/n}{-300/n - (-200)/n} \Rightarrow \frac{\sigma_A - 200/n}{-200/n} = \frac{\sigma_B + 200/n}{-100/n}$$

با ضرب صورت و مخرج کسر در  $n$  خواهیم داشت:

$$\frac{n\sigma_A - 200}{200} = \frac{n\sigma_B + 200}{100} \Rightarrow n\sigma_A - 200 = 2n\sigma_B + 400 \Rightarrow$$

XX

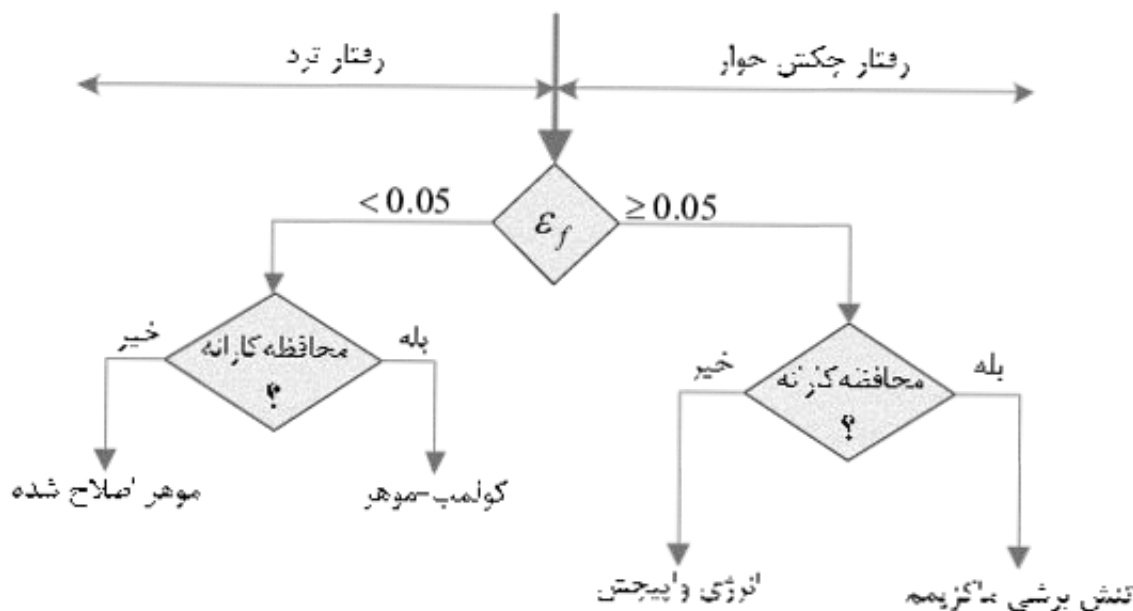
$$n(60.6 - 2 \times -100.6) = 600 \Rightarrow n = 2.29$$

با جایگذاری بدست می‌آید:

پس در حالت ب ضریب ایمنی برای تئوری موهر اصلاح شده  $n = 2.29$  می‌باشد.

همانطور که نمودار می‌بینید، گروهی از ضریب ایمنی بیشتر از ضریب ایمنی موهر اصلاح شده از تئوری کولمب موهر بیشتر است.

### فلوچارت انتخاب تئوری واماندگی



XX

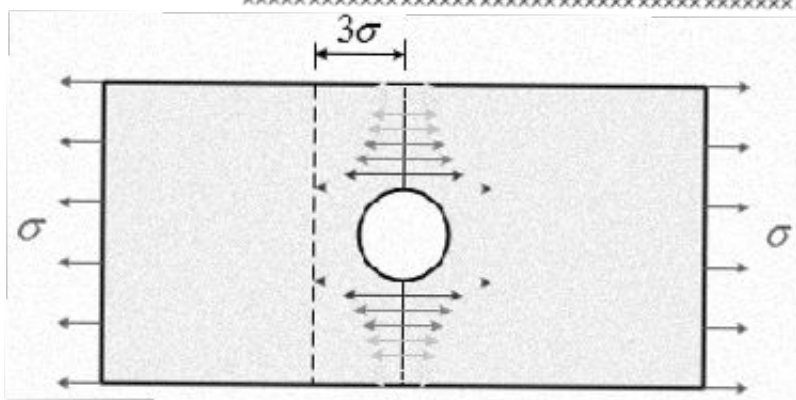
## تمرکز تنش Stress concentration

هر ناپوستگی در قطعه، توزیع تنش را در همسایگی ناپوستگی تغییر می‌دهد.

عامل ایجاد ناپوستگی چیست؟ هر تغییر ناگهانی در اندازه سطح مقطع، پله یا شانه محورها، جاخار، رزوه پیچ، سوراخ، شیار روغن و یا هر نوع شکافی.

این ناپوستگیها که سبب افزایش تنش در همسایگی خود می‌شوند افزایشده تنش و نواحی رخداد آنها نواحی تمرکز تنش نام دارند.

XX



مثلاً در صفحه زیر در مقاطع بدون سوراخ  
تنش برابر  $\sigma$  و در سوراخ، سوراخ برابر  $3\sigma$   
است.

XX

برای مرتبط کردن تنش ماکزیمم واقعی در ناپوستگی به تنش نامی از ضریب تمرکز تنش هندسی یا نظری استفاده می‌گردد.

منظور از تنش نامی در اینجا همان تنشی است که تاکنون با استفاده از معادلات معمولی تنش بدست می‌آوردیم.

ضرایب تمرکز تنش با معادلات زیر تعریف می‌شوند:

$$(۴-۲۰)$$

که در آن  $K_f$  برای تنشهای نرمال و  $K_{ts}$  برای تنشهای برشی بکار می‌رود.

XX

$\sigma_0$  و  $\tau_0$  معمولاً تنشهای محاسبه شده با استفاده از معادلات مقدماتی تنش و مساحت یا سطح مقطع کل هستند.

برای یافتن تعریف ریاضی دقیق  $\sigma_0$  و  $\tau_0$  باید به نمودارهای تمرکز تنش مربوطه مراجعه شود.

این ضریب تمرکز تنش نیز به هندسه تکیه بستگی دارد. حتی نوع ماده مورد استفاده تغییر بر مقدار آن ندارد. به همین دلیل ضریب تمرکز تنش هندسی نامیده می‌شود.

برای یافتن  $K_T$  و  $K_{Ts}$  از نمودارهای پیوست (۴-الف) استفاده می‌کنیم.

تأثیر نوع ماده مورد استفاده بر تمرکز تنش در فصل بعد بررسی خواهد شد.

XX

نحوه بکارگیری این ضریب به صورت زیر است:

در بارگذاری استاتیکی:

- استفاده از ضریب تمرکز تنش عموماً برای مواد چکش‌خوار نیاز نیست.
- برای مواد ترد ضریب تمرکز تنش هندسی قبل از اینکه تنش نامی با استحکام مقایسه شود در تنش نامی ضرب می‌گردد.

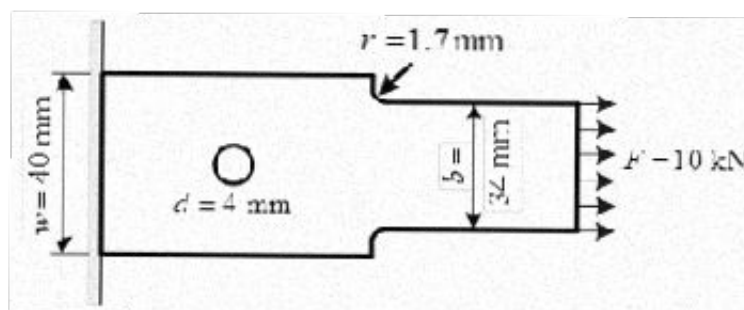
در بارگذاری دینامیکی:

- = اثر تمرکز تنش هم برای مواد چکش‌خوار و هم برای مواد ترد قابل ملاحظه بوده و باید در نظر گرفته شود.

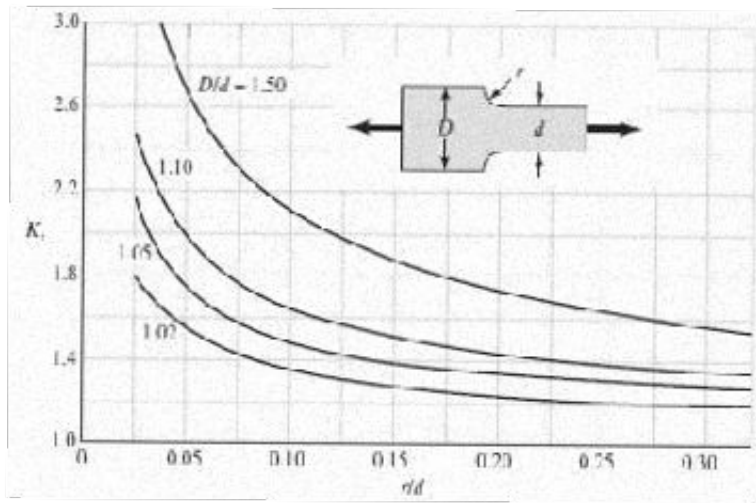
XX

### مثال (۴-۳)

تیر شکل زیر دارای ضخامت ۲ میلی‌متر بوده و تحت نیروی محوری ثابت ۱۰ kN قرار دارد. می‌خواهیم یک سوراخ ۴ میلی‌متری در قسمت ۴۰ میلی‌متری ورق ایجاد کنیم تا بتوان کابلی از آن عبور داد. اگر ماده تیر ترد باشد تنش ماکزیمم را در تیر حساب کنید.







نمودار (۴-الف-۵)

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{d} &= \frac{40}{34} = 1.18 \\ \frac{r}{d} &= \frac{1.7}{34} = 0.05 \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_t = 2.2 \Rightarrow$$

XX

تنش ماکزیمم در سوراخ برابر 380Mpa و در گوشه گرد شده برابر 323.4Mpa است.

بنابراین تنش ماکزیمم در تیر برابر 380 است. بزرگ است.



از آنجا که مؤلفه‌های تنش در راستای  $y$  (یعنی  $\sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ ) در نقطه  $A$  صفر هستند بنابراین در این نقطه حالت تنش صفحه‌ای برقرار است. با بکارگیری تئوری انرژی واپیچش از معادله (۴-۱۱) داریم:

$$\sigma' = [\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2]^{1/2} = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2)^{1/2} = [(142.6F)^2 + 3(76.4F)^2]^{1/2} = 194.5F$$

نیروی  $F$  با مسلوی قرار دادن تنش وان میز با  $S_y$  بدست می‌آید:

$$\sigma' = 194.5F = S_y \Rightarrow F = \frac{S_y}{194.5} = \frac{81000}{194.5} = 416 \text{ lbf}$$

برای استفاده از تئوری تنش برشی ماکزیمم باید تنش برشی ماکزیمم را در نقطه  $A$  محاسبه کنیم. به این منظور ابتدا تنشهای اصلی را در این نقطه می‌یابیم.

$$\sigma_1, \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{142.6F + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{142.6F - 0}{2}\right)^2 + (76.4F)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 175.8F \\ \sigma_3 = -33.2F \end{cases}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{175.8F - (-33.2F)}{2} = \frac{209.0F}{2} = 104.5F \quad \text{ضمن اینکه داریم } \sigma_2 = \sigma_y = 0 \text{ در نتیجه:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{S_y}{2} \Rightarrow 104.5F = \frac{81000}{2} \Rightarrow F = 388 \text{ lbf} \quad \text{حال با استفاده از معادله (۴-۴) داریم:}$$

می‌توان دید مقدار بدست آمده برای  $F$  از تئوری حداکثر تنش برشی حدود ۷ درصد کمتر از مقدار پیش‌بینی شده توسط تئوری انرژی واپیچش است. همانطور که قبلاً گفتیم تئوری حداکثر تنش برشی از تئوری انرژی واپیچش محافظه‌کارانه‌تر است.

**مسأله ۴-۲-** فرض کنید مجموعه آچار چرخ مسأله قبل از چدن نمره ۳۰ استاندارد ASTM ساخته شده باشد. نیروی  $F$  را با استفاده از تئوریهای زیر بیابید. استحکام نهایی کششی ماده ۳۱ kpsi و استحکام نهایی فشاری آن ۱۰۹ kpsi است. از تمرکز تنش صرف‌نظر کنید. (الف) مدل وامندگی کولمب-موهر (ب) مدل وامندگی موهر اصلاح شده

**حل:** برای مواد ترد چه در بارگذاری استاتیکی و چه در بارگذاری دینامیکی باید تمرکز تنش را لحاظ کرد اما چون در صورت این مسأله صریحاً خواسته شده از تمرکز تنش صرف‌نظر کنیم برای این مسأله از آن چشم‌پوشی می‌کنیم. مانند مسأله قبل نقطه  $A$  ضعیف‌ترین نقطه میله است. به المانی که در نقطه  $A$  روی سطح قرار دارد تنش خمشی کششی ناشی از ممان خمشی و تنش برشی ناشی از گشتاور پیچشی وارد می‌شود. مقادیر این تنشها برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 14 \times F}{\pi \times 1^3} = 142.6F$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 15 \times F}{\pi \times 1^3} = 76.4F$$

تنشهای اصلی غیر صفر در نقطه A یعنی  $\sigma_A, \sigma_B$  برابرند با:

$$\sigma_{A,B} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{142.6F + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{142.6F - 0}{2}\right)^2 + (76.4F)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_A = 175.8F \\ \sigma_B = -33.2F \end{cases}$$

بنابراین در ربع چهارم صفحه  $\sigma_A, \sigma_B$  هستیم.

(الف) برای مدل کولمب-موهر حالت دوم معادله (۴-۱۶) حاکم است (زیرا داریم  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ ) که برای وامندگی باید در

این معادله  $n = 1$  قرار دهیم.

$$\frac{\sigma_A}{S_w} - \frac{\sigma_B}{S_w} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{175.8F}{31 \times 10^3} - \frac{-33.2F}{109 \times 10^3} = \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow F = 167 \text{ lbf}$$

(ب) برای مدل موهر اصلاح شده شیب خط بار برابر است با  $|\sigma_B/\sigma_A| = 33.2/175.8 = 0.189 < 1$  بنابراین از معادله (۴-۱۹)

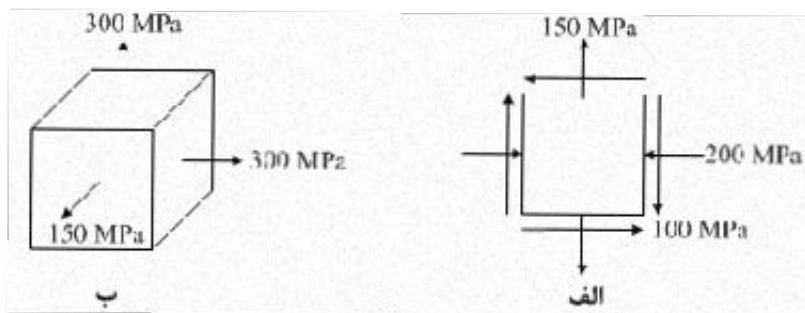
داریم:

$$\sigma_A = \frac{S_w}{n} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{S_w} = \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{175.8F}{31 \times 10^3} = 1 \Rightarrow F = 176 \text{ lbf}$$

همانطور که انتظار می‌رود مدل کولمب-موهر محافظه‌کارانه‌تر است.

**مسئله ۴-۳-** با استفاده از معیارهای تنش برشی ماکزیمم و انرژی واپیچش ضریب ایمنی را در هر یک از حالت‌های زیر

محاسبه کرده و وقوع تسلیم یا ایمن بودن بارگذاری را تعیین کنید. استحکام تسلیم ماده 300MPa است.



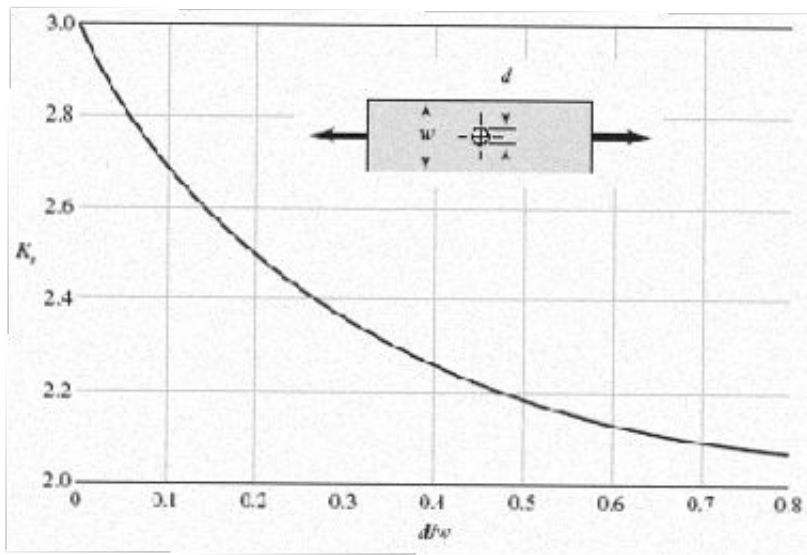
حل: به عهده دانشجو

پاسخ: برای انرژی واپیچش

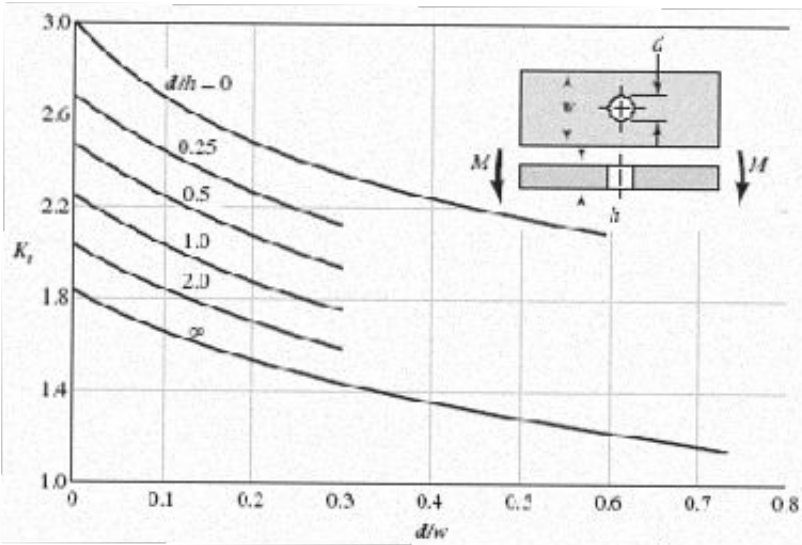
الف:  $n = 0.86$  ← وامندگی روی می‌دهد.

ب:  $n = 2$  ← وامندگی روی نمی‌دهد.

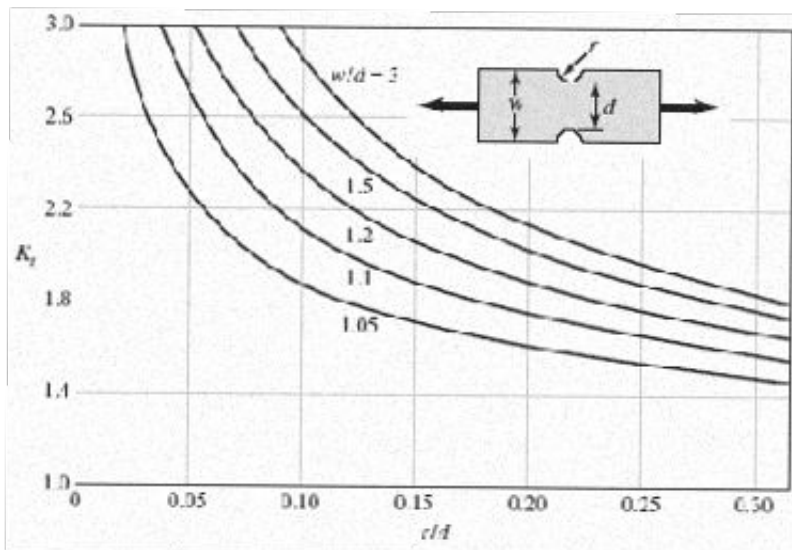


پیوست ۴- الف: نمودارهای ضرایب تمرکز تنش  $K_t$  و  $K_{ts}$ 

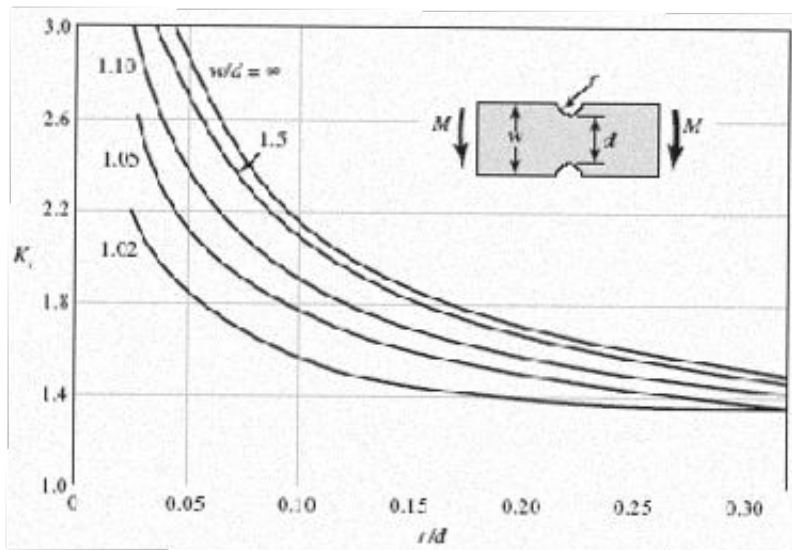
شکل ۴- الف-۱- تیر در کشش یا فشار ساده با سوراخی عمود بر محور طولی.  
 $\sigma_0 = F/A$  که در آن  $A = (w-d)t$  و  $t$  ضخامت است.



شکل ۴- الف-۲- تیر مستطیلی با سوراخی عمود بر محور طولی در خمش.  
 $\sigma_0 = Mc/I$  که در آن  $I = (w-d)h^3/12$  می‌باشد.

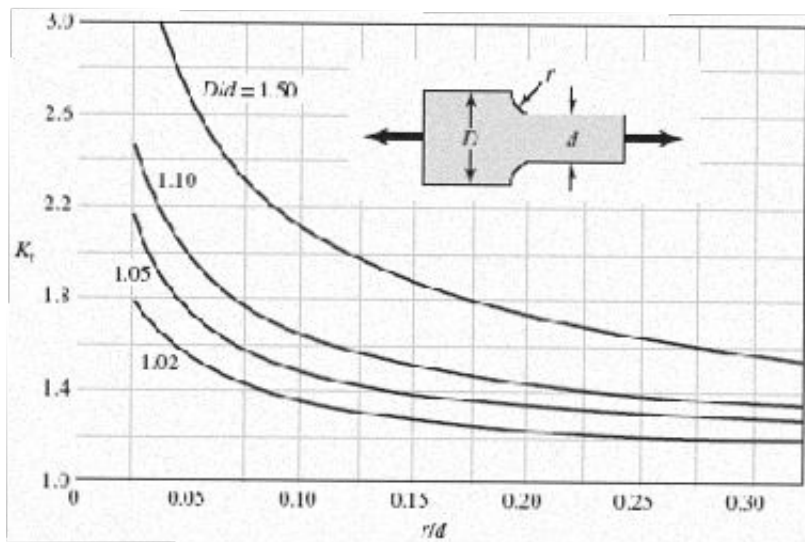


شکل ۴- الف-۳- تیر مستطیلی بریده شده در کشش یا فشار ساده.  
 $\sigma_0 = F/A$  که در آن  $A = dt$  و  $t$  ضخامت است.



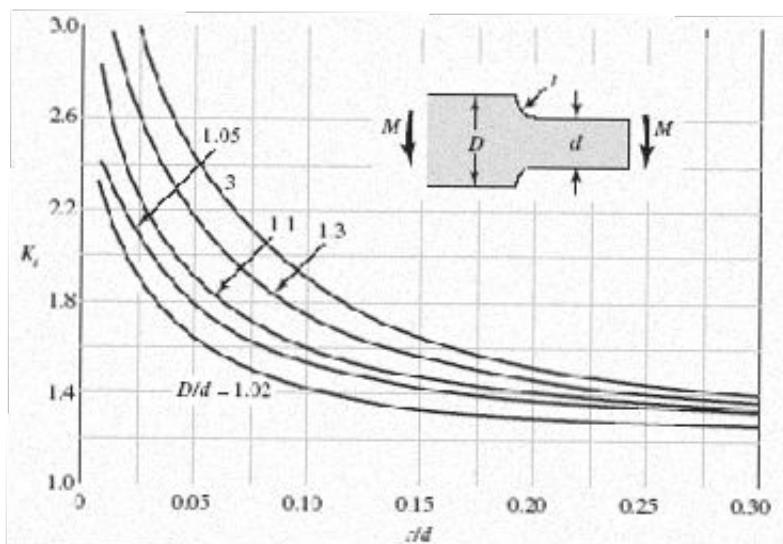
شکل ۴-الف-۴- تیر مستطیلی بریده شده در خمش.

که در آن  $c = d/2$  و  $\sigma_0 = Mc/I$  و ضخامت  $t$  و  $I = td^3/12$  است.



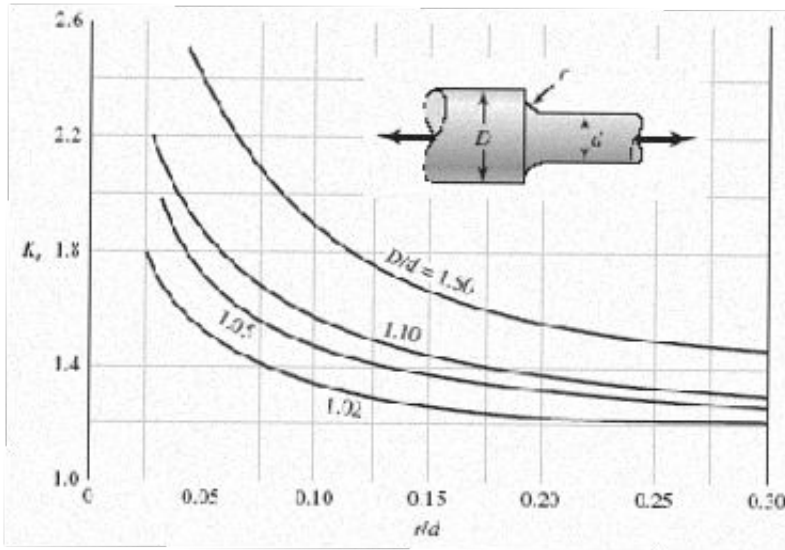
شکل ۴-الف-۵- تیر مستطیلی با گوشه گرد شده در کشش یا فشار ساده.

که در آن  $\sigma_0 = F/A$  و ضخامت  $t$  است.

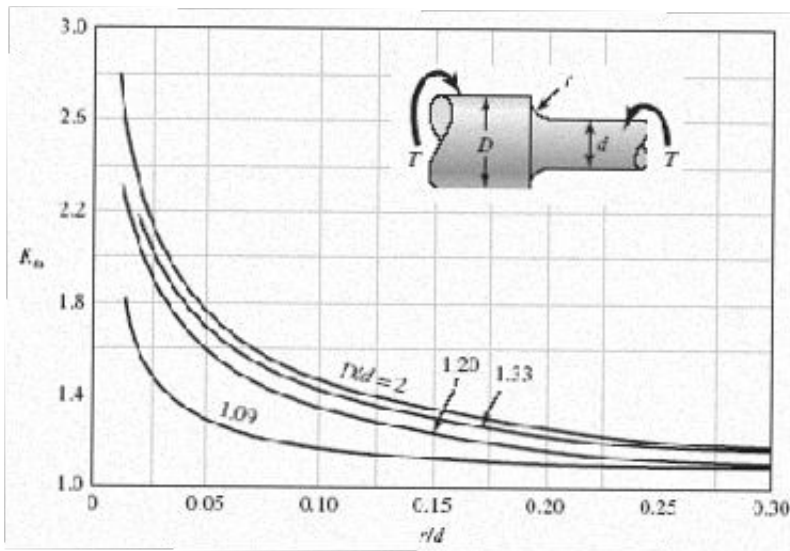


شکل ۴-الف-۶- تیر مستطیلی با گوشه گرد شده در خمش.

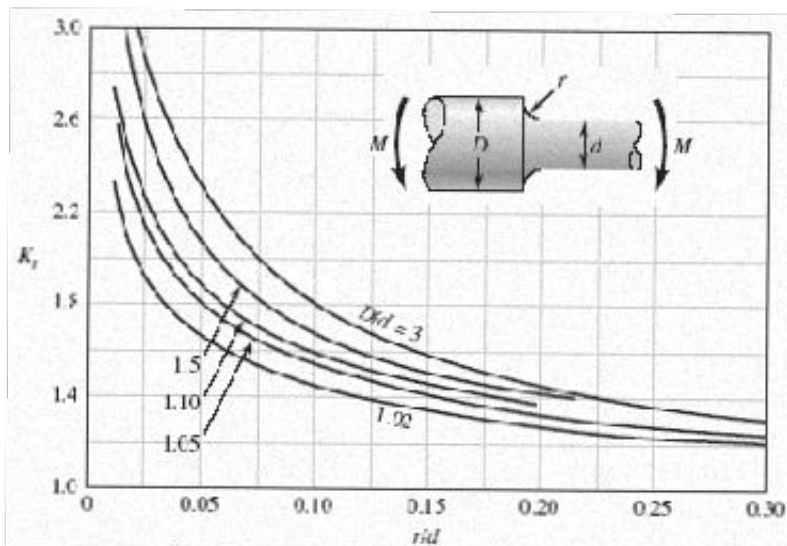
که در آن  $c = d/2$  و  $\sigma_0 = Mc/I$  و ضخامت  $t$  و  $I = td^3/12$  است.



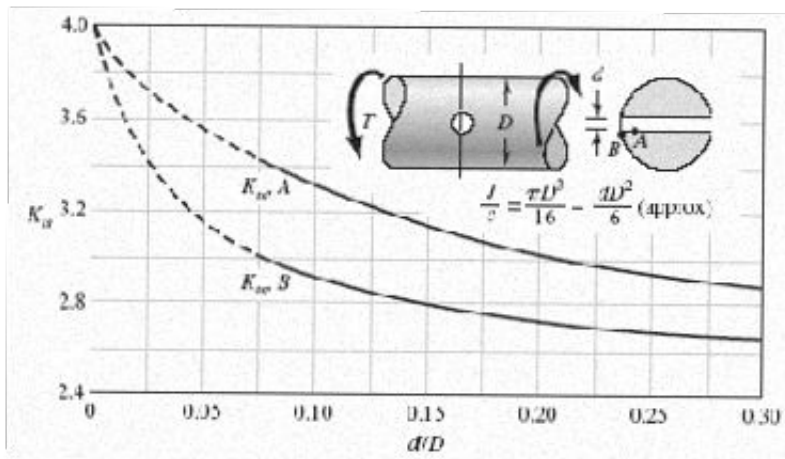
شکل ۴- الف-۷- محور دایروی با گرد شدگی  
 شانه در کشش،  
 $\sigma_0 = F/A$  که در آن  $A = \pi d^2/4$  می‌باشد.



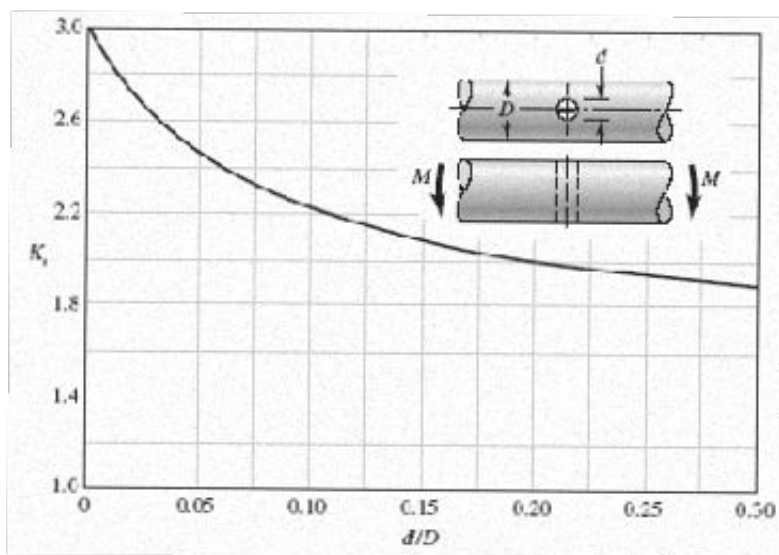
شکل ۴- الف-۸- محور دایروی با گرد شدگی  
 شانه در پیچش،  
 $\tau_0 = Tc/J$  که در آن  $c = d/2$  و  
 $J = \pi d^4/32$  می‌باشد.



شکل ۴- الف-۹- محور دایروی با گرد شدگی  
 شانه در خمش،  
 $\sigma_0 = Mc/I$  که در آن  $c = d/2$  و  
 $I = \pi d^4/64$  می‌باشد.

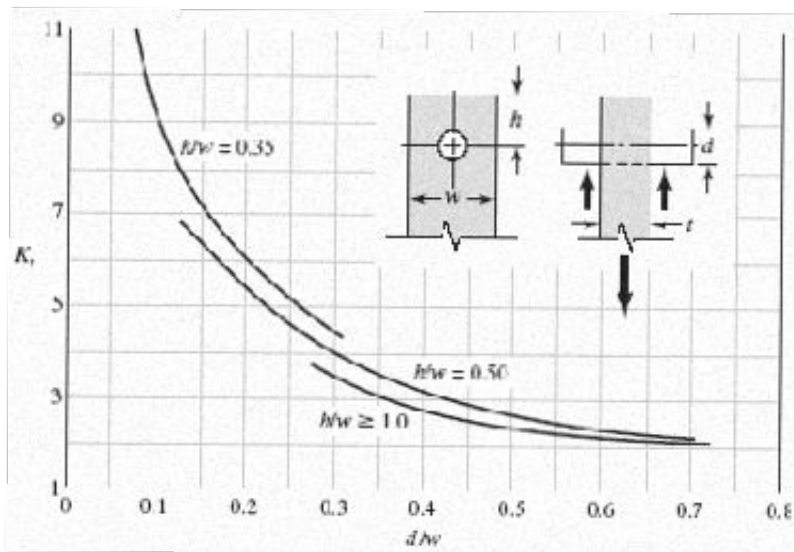


شکل ۴- الف-۱۰- محور دایروی در پیچش با سوراخ عمود بر محور طولی.



شکل ۴- الف-۱۱- محور دایروی در خمش با یک سوراخ عمود بر محور طولی، بطور تقریبی

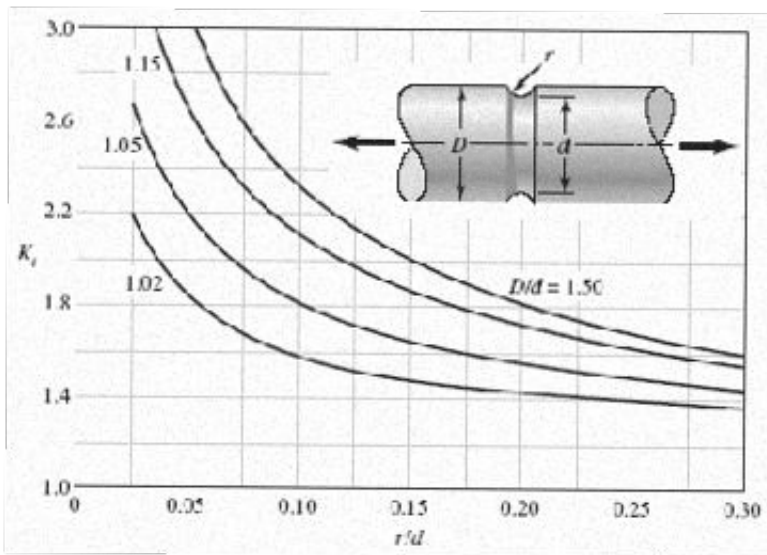
$$\sigma_0 = M / [(\pi D^3 / 32) - (d D^2 / 6)]$$



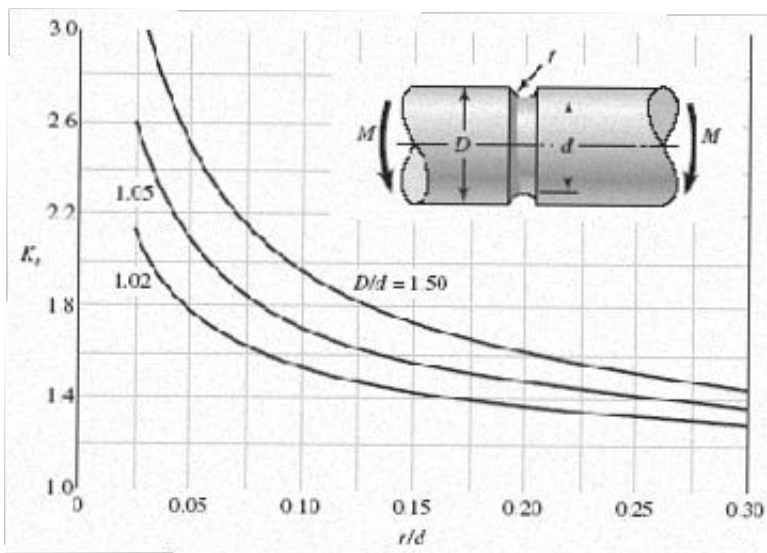
شکل ۴- الف-۱۲- ورق تحت کشش که دارای یک سوراخ سراسری برای پین است.

$$\sigma_0 = F/A \text{ که در آن } A = (w-d)t$$

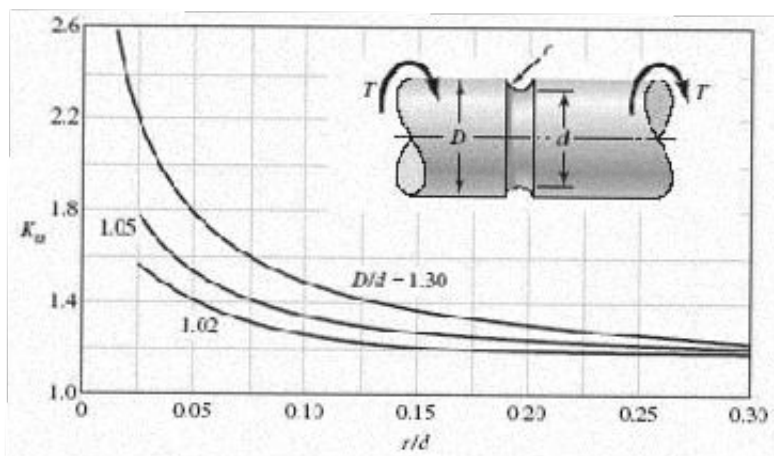
می‌باشد. در صورت وجود لقی  $K_t$  را ۳۵ تا ۵۰ درصد زیاد کنید.



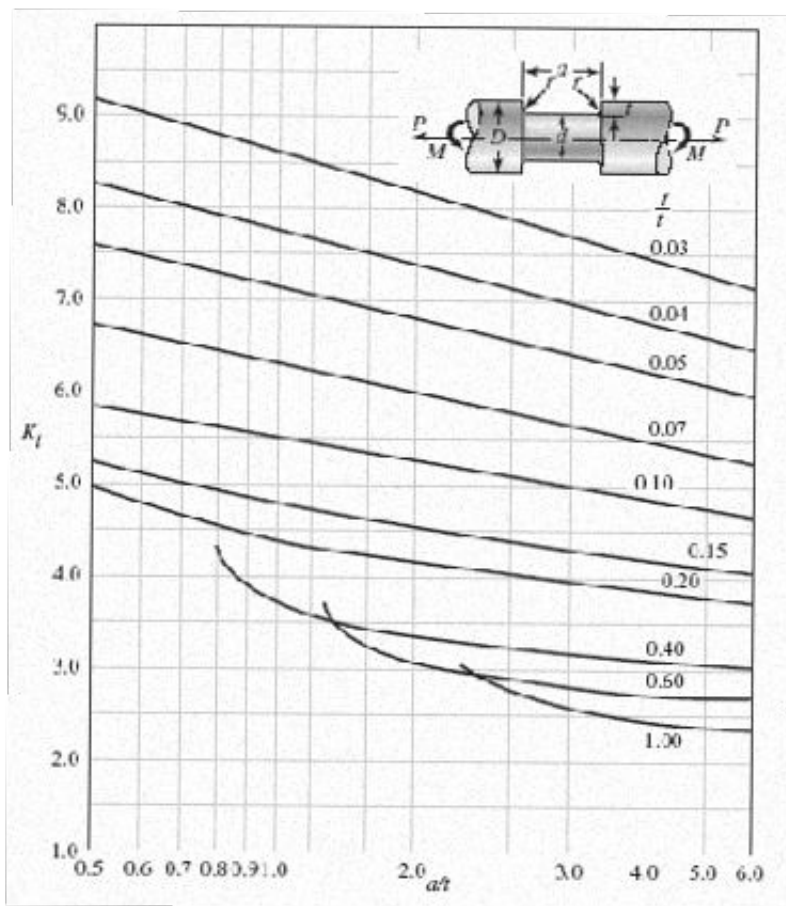
شکل ۴- الف-۱۳- محور دایروی شیاردار در کشش،  
 $\sigma_0 = F/A$  که در آن  $A = \pi d^2/4$  می‌باشد.



شکل ۴- الف-۱۴- محور دایروی شیاردار در خمش،  
 $\sigma_0 = Mc/I$  که در آن  $c = d/2$  و  $I = \pi d^4/64$  می‌باشد.



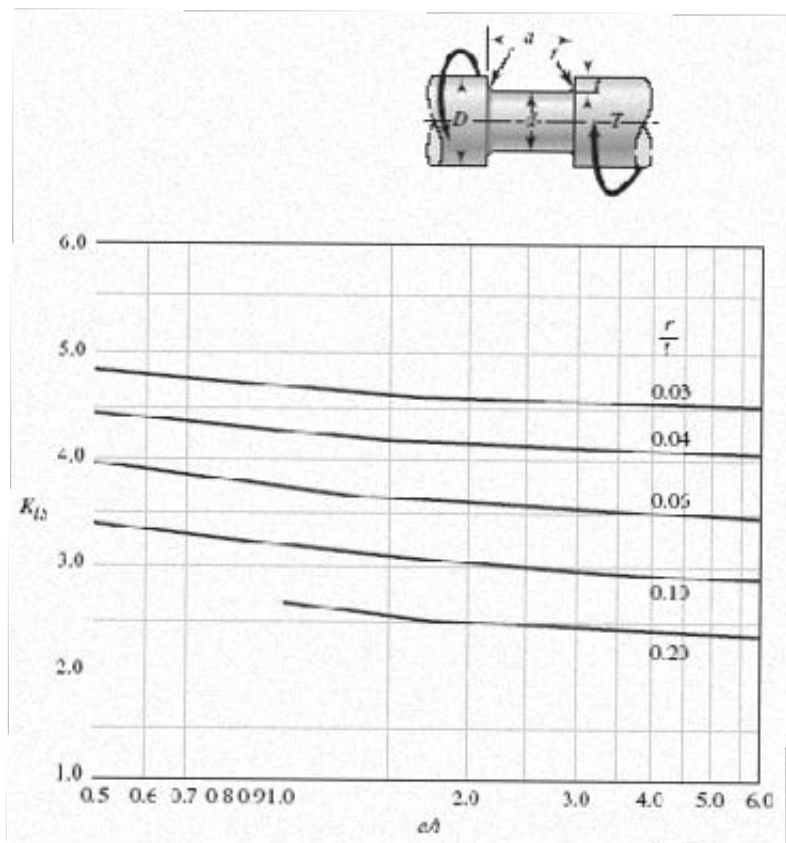
شکل ۴- الف-۱۵- محور دایروی شیاردار در پیچش،  
 $\tau_0 = Tc/J$  که در آن  $c = d/2$  و  $J = \pi d^4/32$  می‌باشد.



شکل ۴- الف-۱۶- محور دایروی با شیار کف-

تخت در خمش و یا کشش.

$$\sigma_0 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}$$



شکل ۴- الف-۱۷- محور دایروی با شیار کف-

تخت در پیچش.

$$\tau_0 = \frac{16T}{\pi d^3}$$