

بسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری اول

پنجشنبه 15 تیر 1391

وقت: 5 ساعت

مسئله‌ی اول. ماتریس مزه‌ها 30 امتیاز

تعریف: به ماتریس $n \times n$ هم‌آنند A بامزه می‌گوییم هرگاه تمام درایه‌های آن $+1$ و یا -1 باشند و به ازای هر دو سطر مثل i, j داشته باشیم

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{j,k} = 0$$

تعریف: به ماتریس $n \times n$ هم‌آنند A خوش‌مزه می‌گوییم، هرگاه بامزه باشد و به ازای $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم:

$$a_{i,1} = a_{1,i} = +1$$

الف) ثابت کنید اگر ماتریس $n \times n$ بامزه وجود داشته باشد، ماتریس $n \times n$ خوش‌مزه نیز وجود دارد. (5 امتیاز)

ب) n دنباله با نام‌های A_1, A_2, \dots, A_n داریم که طول هر کدام $n - 1$ بوده و اعضای هر کدام از آن‌ها $+1$ و یا -1 است. ضرب داخلی دو بردار برابر با مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های متناظر آن‌ها در یکدیگر است. در صورتی که ضرب داخلی هر دو بردار از این n تا منفی شود، به این n تایی تلخ می‌گویند.

ثابت کنید n تایی تلخ وجود دارد اگر و فقط اگر، ماتریس بامزه‌ی $n \times n$ وجود داشته باشد. (25 امتیاز)

مسئله‌ی دوم. پاک‌کردن یک‌ها 30 امتیاز

همه‌ی جدول‌های $n \times n$ با درایه‌های صفر و یک را در نظر بگیرید که دقیقاً n تا از درایه‌های آن‌ها یک است. برای هر کدام از این جدول‌ها با کمترین تعداد استفاده از عمل‌های زیر یک‌ها را پاک می‌کنیم و تعداد این اعمال را یادداشت می‌کنیم و $f(n)$ را ماکسیمم این اعداد تعریف می‌کنیم. $\theta(f(n))$ را بر حسب n محاسبه کنید.

اعمال مجاز:

1. پاک کردن تعداد یک که در یک سطر قرار دارند.
2. پاک کردن تعداد یک که در یک ستون قرار دارند.

3. پاک کردن تعدادی یک که هیچ دو تایی از آن‌ها در یک سطر یا ستون قرار ندارند.

مسئله‌ی سوم، گراف خوب 40 امتیاز

گراف ساده‌ی G را در نظر بگیرید که ماتریس مجاورت آن A است. G را خوب می‌نامیم اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند k موجود باشد که A^k ماتریسی باشد که همه‌ی درایه‌هایش ناصفر است. (راهنمایی: به ارتباط درایه‌های A^k با گشت‌های به طول k در گراف توجه کنید.)

الف) شرط لازم و کافی برای خوب بودن یک گراف معرفی کنید و ادعای خود را ثابت کنید. (25 امتیاز)

ب) ثابت کنید اگر G گرافی n رأسی و خوب باشد، عدد طبیعی $k < 2n$ وجود دارد که همه‌ی درایه‌های A^k ناصفر باشند. (15 امتیاز)