

تمرین «دلتای دیراک»

الف - درستی روابط زیر را ثابت کنید:

$$1) \int_a^b f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x-x_0) dx = -f'(x_0)$$

ب - انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + 5x) \delta(x-2) dx =$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) (x^2+1) \delta(x-\pi) dx =$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+x) \sin\left(\frac{\pi x}{r}\right) \delta'(x^3-1) dx =$$

۲) توزیع چگالی بارهای زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } \rho(\rho, \varphi, z) = -2 \delta(\rho-3) \delta(\varphi-\pi) \delta(z)$$

$$\text{ب) } \rho(r, \theta, \varphi) = 2 \delta\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \delta(r-2) \left\{ \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \delta\left(\varphi - \frac{\pi}{10} k\right) \right\}$$

۳) الف - عبارتی بنویسید که معرف چگالی  $\rho(r)$  بار نقطه  $q$  در  $r$  باشد. مطمئن شوید که انتگرال جبری  $P$  برابر  $q$  خواهد شد.

ب - چگالی بار یک دو قطبی الکتریکی مرکب از یک بار  $-q$  واقع در مبدأ و یک بار نقطه ای  $+q$  واقع در  $a$  چقدر است؟

ج - چگالی بار یک پوسته کروی نازک بسیار کوچک به شعاع  $R$  که بار کل آن  $Q$  و مرکز آن در مبدأ قرار دارد، چقدر است؟ (انتگرال در تمام فضا باید برابر با  $Q$  باشد)

د - چگالی بار یک حلقه کینواخت به شعاع  $a$  و بار کل  $Q$  را بنویسید.

۴) انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_a^b e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta(x^2 - 1) dx \quad \text{if } \begin{cases} a=0 & b=+\infty \\ a=-2 & b=2 \end{cases}$$

۵) ذره ای با سرعت  $v_0$  در حال حرکت است، اگر نیروی به شکل زیر به آن وارد شود، سرعت ذره پس از اتمام نیرو را بدست آورید.

$$F(x) = a_0 \delta(t - t_0) + a_1 \delta(t - t_1)$$

۶) ذره ای با سرعت دورانی  $I$  و سرعت زاویه ای  $\omega$  در حال چرخش است، مقدار  $a$  را به گونه ای تعیین کنید که پس از اعمال گشتاور زیر به ذره، آن ذره به حال سکون درآید.

$$T = a(t^2 + t) \delta(t - 2)$$