Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ها:

- خطاها - حل عددی معادلات غیرخطی - حل عددی دستگاه معادلات خطی و غیرخطی

- درون یابی - تقریب کم ترین مربعات - مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

- روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

محاسبات عددی: الگوریتمی است که با استفاده از مقدار عددی می توان مسئله را حل نمود. بنابراین محاسبات عددی، مطالعه و گسترش روش هایی برای حل مسائل با استفاده از یک وسیله ی محاسباتی است و مهم ترین ویژگی این علم، به دست آوردن جواب های عددی است که پاسخ تحلیلی ندارد یا به کار بردن پاسخ های تحلیلی را با مشکل مواجه می کند. در روش های عددی، معمولاً مسئله با خطاهایی قابل حل است و هرگز خطا به صفر نمی رسد و به طور کلی جزء اجتناب ناپذیر روش های عددی است.

خطا: تفاوت مقدار واقعی و مقدار محاسبه شده.

منابع خطا:
1- خطای مدل
2- خطای داده ها یا خطای اندازه گیری
3- خطای غاشن اعداد
4- خطای عملیات حسابی
5- خطای روش عددی

1- این نوع خطا، به نحوه ی بیان مسئله بستگی دارد و بیش تر در مواقعی که مسئله به طور دقیق فرمول بندی نشده باشد، ایجاد می شود. (صرف نظر از تعداد پارامترهای موجود در مسئله)

2- خطای هنگام اندازه گیری و برآورد مفروضات مسئله رخ می دهد.

3- در بسیاری از اندازه گیری ها، وسایل اندازه گیری قادر به غاشن و ذخیرهٔ تعداد متناهی رقم از ارقام را دارند که این نوع خطا را ایجاد می کند.

4- در انجام اعمالی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، جواب به دست آمده، دارای تعداد نامتناهی رقم است (مثلاً: $\frac{1}{3}$)

۵- بیش تر روش های عددی، تکراری هستند و با استفاده از آن ها، می توان تقریبی از جواب دقیق مسئله به دست آورد. دقت جواب تقریبی به نوع روش و مرحله ی توقف آن بستگی دارد.

نکته: از بین ۵ نوع خطای فوق، خطای مدل و خطای داده ها، مربوط به نوع مسئله بوده و از کنترل مسئله خارج است. مثال: خطای عیوب ذاتی وسایل اندازه گیری

در این درس، تمرکز بر روی سه خطای دیگر است.

نمایش اعداد: از آن جایی که روش های عددی شامل مراحل تکرار زیاد و انجام عملیات فراوان است، لازم است برای تعیین جواب عددی مسائل، از ابزار محاسباتی نظیر ماشین حساب، محاسبه نمود.

بسط اعشاری اعداد: بسط اعشاری یک عدد مثبت، نمایش آن به صورت زیر است:

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

$$a_m \neq 0 , \quad m \neq Z , \quad 0 \le a_i \le 9 \qquad a_m \in Z$$

مثال: بسط اعشاری اعداد ۲٫۰۰۶ و ۲۳۴۶ را بنویسید.

$$2.006 : 2 \times 10^0 + 6 \times 10^{-3} \qquad 2346 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 6 \times 10^0$$

نکته: بسط اعشاری یک عدد می تواند مختوم، نامختوم، متناوب یا مختوم و نامتناوب باشد.

نمایش علمی اعداد: عدد مفروض و مخالف صفر A را در نظر بگیرید. نمایش عدد A به صورت $A = a \times 10^b$ را نمایش علمی A گویند که در آن، b عددی صحیح است و $1 \le |a| \le 10$. در این صورت، نمایش a را مانتیس و b نمای عدد A گویند.

مثال:

$$0.00726 = 7.26 \times 10^{-3}$$

$$300 = 3 \times 10^2$$

ارقام بامعنی: ۲٫۰۰۰ و ۲٫۰۰ و ۲٫۰ و ۲

مثال: ۲۲۰۰ ← ?

$A = ۲٫۲۰۰ \times ۱۰^{۳}$ ← (۱ + تعداد ارقام) ۴ رقم بامعنا

مثال: ۰٫۰۰۲۰۰۹۰ ← ?

$B = ۲٫۰۰۹۰ \times ۱۰^{-۳}$ ← ۵ رقم بامعنا

خطای ناشی اعداد:

خطای قطع کردن:

۲۸٫۱۷۹۱۴۲۱۸۹ ← 3D: ۲۸٫۱۷۹
← 4D: ۲۸٫۱۷۹۱
← 5D: ۲۸٫۱۷۹۱۴

خطای گرد کردن:

مثال: ۲۸٫۱۷۹۶۴۹۱۳۵ ← ?

3D: ۲۸٫۱۷۹۶۴۹۱۳۵ ← ۲۸٫۱۸۰

4D: ۲۸٫۱۷۹۶۴۹۱۳۵ ← ۲۸٫۱۷۹۶

5D: ۲۸٫۱۷۹۶۴۹۱۳۵ ← ۲۸٫۱۷۹۶۵

خطا ← مطلق
← نسبی

A: مقدار دقیق

A^*: مقدار اندازه گیری شده

$\xrightarrow{\text{خطای مطلق}} e_A = |A - A^*|$

$\xrightarrow{\text{خطای نسبی}} \delta = \dfrac{|A - A^*|}{A}$

مثال: خطای مطلق را برای اعداد مثال قبل که به روش گرد کردن محاسبه شده اند را حساب کنید.

$$e_{3D} = |28{,}179649135 - 28{,}180| = 0{,}000350765 < 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005$$

$$\boxed{\Rightarrow e_{3D} < \frac{1}{2} \times 10^{-3}}$$

$$e_{4D} = |28{,}179649135 - 28{,}1796| = 0{,}000049135 < 0{,}00005 = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\boxed{\Rightarrow e_{4D} < \frac{1}{2} \times 10^{-4}}$$

---

* اگر عددی را تا n رقم اعشار گرد کنیم، خطای گرد کردن این گونه خواهد بود:

$$e_{nD} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$$

انتشار خطا: خطا در محاسبات ثانویه نشر می یابد.

انواع:
1. در ۴ عمل اصلی
2. خطا های فرمول ها: مثل محیط دایره
3. خطای توابع: مثل $\sin \frac{\pi}{3}$ (عدد π یک عدد گنگ است)

خطای چهار عمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم):

$A \to e_A \qquad B \to e_B \qquad e_{A+B} = ?$

خطای مطلق: $e_{A+B} = |(A+B) - (A^*+B^*)| = |(A-A^*) + (B-B^*)| \leq |A-A^*| + |B-B^*| = e_A + e_B$

قانون نامساوی مثلث: $|x+y| \leq |x| + |y| \qquad |x-y| \leq |x| - |y|$

$$\boxed{\Rightarrow e_{A+B} \leq e_A + e_B}$$

خطای نسبی : $\delta(A+B) \le \min\{\delta(A), \delta(B)\}$

$e_{A-B} \le e_A + e_B$ $\qquad$ $\delta(A-B) \le \frac{e_A}{A-B}$

$e_{A\cdot B} \le A e_B + B e_A$ $\qquad$ $\delta_{A\cdot B} \le \delta_A + \delta_B$

$e_{A/B} = e(A \times \frac{1}{B}) \le A e_{\frac{1}{B}} + \frac{1}{B} e_A$

$\delta_{A/B} \le \delta_A + \delta_B$

مثال: اگر $a=2.29$ و $b=4.58$ به ترتیب تقریب‌های از $A=2.2851$ و $B=4.5750$ باشند، خطای مطلق مجموع را حساب کنید.

$e_A = 0.0049$ $\qquad$ $e_B = 0.0050$

$e_{A+B} \le e_A + e_B = 0.0049 + 0.0050 = 0.0099$

مشاهده می‌شود که عمل جمع، خطا را افزایش می‌دهد.

مثال: اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2.01}$ را به ترتیب با 1.41 و 1.42 تقریب بزنیم، حاصل تفاضل $u=\sqrt{2.01}-\sqrt{2}$ را تا ۳ رقم اعشار تا 2D , 9D حساب کنید.

$u = 1.42 - 1.41 = 10^{-2}$ $\qquad$ $u = 1.417744688 - 1.414213562 \simeq 3.35 \times 10^{-3}$

$$u = \sqrt{2.01} - \sqrt{2} = \sqrt{2.01} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}}{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}} = \frac{0.01}{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}} = \frac{0.01}{1.42+1.41} = \frac{0.01}{2.83} \simeq 3.35 \times 10^{-3}$$

تمرین: مقدار $\pi\sqrt{2}$ را تا چهار رقم اعشار محاسبه نمایید و حداکثر خطای مطلق این حاصل ضرب را به دست آورید.

تمرین ۲: خطای مطلق و نسبی $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ را تا سه رقم اعشار به دست آورید (تقریب اولیه ۷ رقم اعشار باشد).

خطای محاسبهٔ فرمول : $\qquad y: u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

تابعی n متغیره داریم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, \dots, n$ را محاسبه کنیم که A_i ها مقادیر دقیق و a_i ها مقدار تقریبی

هستند: $f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + e(f(a_1, a_2, \dots, a_n))$

به کمک بسط تیلور توابع چند متغیره، می توان نوشت:

$$e(f(a_1, a_2, \dots, a_n)) \leq e(a_1)\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a + e(a_2)\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a + \dots + e(a_n)\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_a$$

* در رابطه فوق، برای محاسبهٔ مقدار تابع تک متغیره ی $y = f(x)$ در نقطه ی $A = a + e_a$، خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$e(f(a)) \leq e_a |f'(a)|$$

مثال: کران بالا برای خطای مطلق تابع $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ به ازای $x \in [1, +\infty)$ به دست آورید.

$$e(f(x)) \leq \left|\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| e_x \leq \frac{1}{x^2} e(x) \underset{1}{\leq} e_x \qquad x \in [1, +\infty)$$

$$\Rightarrow \boxed{e(f(x)) \leq e(x)}$$

مثال: حجم کره ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را تا چهار رقم اعشار حساب کرده و حداکثر خطای محاسبه را به دست آورید. $(V = \frac{4}{3}\pi R^3)$

تابع حجم کره: $V = xyz^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow x = \frac{4}{3} = 1.3333 + e(x) \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

$$y = \pi = 3.1416 + e(y) \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$z = \frac{5}{3} = 1.6667 + e(z) \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$V = (1.3333)(3.1416)(1.6667)^3 e(V) \rightarrow V = 19.3933 + e'(V)$$

$$e'(V) = \frac{1}{2}\times 10^{-4} + e(V)$$

$$e(V) \leq e(x)\frac{\partial V}{\partial x} + e(y)\frac{\partial V}{\partial y} + e(z)\frac{\partial V}{\partial z} \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}(yz^3 + xz^3 + 3xyz^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1.3333 \\ y = 3.1416 \\ z = 1.6667 \end{array}\right\} \Rightarrow e(V) \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}(14.5453 + 6.1731 + 34.9072) \Rightarrow$$

$e(v) \le 0.0028 \Rightarrow e'(v) \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} + 0.0028 \Rightarrow e'(v) \le 0.00285$

$\boxed{V = 19.3933 \pm 0.00285}$

خطای توابع (مطالعهٔ دانشجو)

فصل ۲ : حل عددی معادلات $(f(x)=0)$

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه هستیم، حل معادله به صورت $f(x)=0$ است که در آن، f یک تابع مفروض است. منظور از حل معادلهٔ $f(x)=0$، یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آن، مقدار تابع صفر شود. هرگاه $f(\alpha)=0$ باشد، یعنی α ریشهٔ معادله است (یا می‌گوییم α تابع f را صفر می‌کند). در مسائل تحلیلی، معادلاتی به شکل $ax^2+bx+c=0$ به راحتی قابل حل می‌باشند ولی معادلاتی به شکل $x+\cos x=0$ یا $e^{-x}+\cos x=0$، معمولاً به روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند که این نوع معادلات در محاسبات مهندسی، بسیار یافت می‌شوند. برای حل این نوع معادلات، روش عددی بسیار مناسب است. در این روش برای تعیین ریشهٔ معادله، یک تقریبی از ریشهٔ معادله یا فاصلهٔ کوچکی که ریشه در آن قرار دارد، دیده می‌شود.

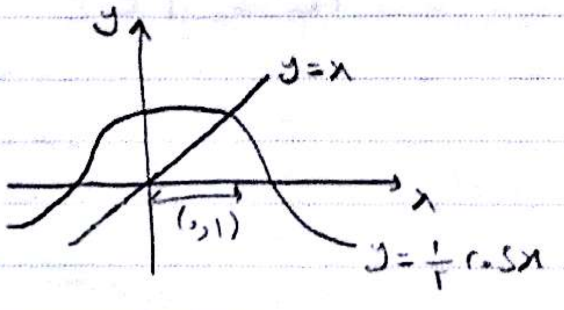
برای حل این نوع معادلات، سه عمل باید انجام شود.

۱. مشخص کردن بازهٔ تقریبی محل ریشه (در بیشتر مسائل، بازه داده می‌شود).

* چنانچه بازه داده نشده باشد، می‌توان آن را پیدا کرد.

مثال: $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$

$x - \frac{1}{2}\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cos x \qquad y_1 = x \qquad y_2 = \frac{1}{2}\cos x$

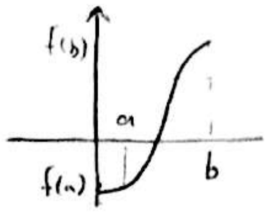


۲- کنترل شرایط : ← الف) وجود ریشه در بازه ب) یکتا بودن ریشه

الف) $f(a)f(b)<0$ و پیوستگی $\xleftarrow[\text{میانی}]{\text{قضیه مقدار}}$

ب) ← $f'(x) \neq 0$

قضیه مقدار میانی



۳- استفاده از روش های مختلف برای به دست آوردن ریشه :

روش ها ← دوبخشی یا تنصیف یا نصف کردن فواصل $x_n=\frac{a+b}{2}$

← نابه‌جایی $x_n = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

← نیوتن-رفسون یا مماسی $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

← وتری $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

← تکرار ساده یا نقطه ثابت (با روش های قبلی متفاوت است.)

* روش ها تا جایی پیش می روند که معیار توقف مشخص شود.

معیارهای توقف ← $|f(x_n)| < \varepsilon$

← $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

← وجود تکرار در x : تکرار ریشه

* مقدار توابع مثلثاتی را به صورت رادیان وارد می کنیم (در ماشین حساب).

* محاسبات با یک رقم اعشار بیشتر نسبت به تقریب خواسته شده انجام شود.

* گاهی به جای اینکه گفته شود تقریب ریشه را طوری به دست آورید که $|f(x)|<\varepsilon$ شود، بیان می شود: ریشه را با تقریب ε به دست آورید که شرط توقف صورت گیرد.

همگرایی روش ها
← دوبخشی
← نابجایی
همگرایی تضمین شده (یعنی حتماً به جواب می رسیم)

← نیوتن - رافسون: تضمین همگرایی ندارد. اما به شرط قرار گرفتن در مسیر همگرایی، سرعت رسیدن به جواب زیاد است.

← وتری: تضمین همگرایی ندارد. اما نسبت به روش نابجایی، سرعت بالایی در رسیدن به جواب دارد.

روش دوبخشی

الگوریتم روش دوبخشی:

گام ۱: قرار می دهیم $n=1$ — گام ۲: قرار می دهیم $x_n=\frac{a+b}{2}$

گام ۳: اگر یکی از شرایط توقف برقرار باشد، x_n را به عنوان تقریب مطلوب از ریشه α در نظر می گیریم و اجرای الگوریتم متوقف می شود.

گام ۴: اگر $f(a)f(x_n)=0$، آنگاه x_n ریشه معادله است و اجرای الگوریتم متوقف می شود.

گام ۵: اگر $f(a)f(x_n)<0$، قرار می دهیم $b=x_n$. در غیر این صورت $a=x_n$

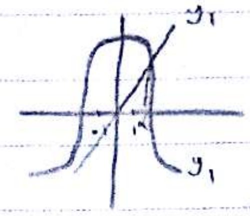
گام ۶: قرار می دهیم $n=n+1$ و به گام ۲ می رویم.

مثال: ریشه معادله $x - \frac{1}{2}\cos x = 0$ را با تقریب $\frac{1}{1000}$ به دست آورید.

چون بازه داده نشده است، ابتدا آن را محاسبه می‌کنیم. تقریب 10^{-3} است که در محاسبات باید 10^{-4} تا انجام شود. بنابراین شرط توقف 10^{-3} تا یعنی $|f(x)| < 0.00$ می‌باشد.

$f(x) = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2}\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}\cos x$ $y_1 = x$

$y_2 = \frac{1}{2}\cos x$



بازه‌ی تقریبی $[0,1]$ $([a,b])$ است.

$f(x)$ در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است. $\Leftarrow$

$f(a) f(b) < 0$ ✓ $\Leftarrow$ $f(a) = f(0) = -0.5$ ، $f(b) = f(1) = 0.7298$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0$ ✓

n	a	b	x_n	$f(x_n)$	$f(a) f(x_n)$
۱	۰	۱	۰٫۵	۰٫۰۶۲	−
۲	۰	۰٫۵	۰٫۲۵	-۰٫۲۲۴۵	+
۳	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۳۷۵	-۰٫۰۹۰۳	+
۴	۰٫۳۷۵	۰٫۵	۰٫۴۳۷۵	-۰٫۰۱۵۴	+
۵	۰٫۴۳۷۵	۰٫۵	۰٫۴۶۰۸	۰٫۰۲۳۸	−
۶	۰٫۴۳۷۵	۰٫۴۶۰۸	۰٫۴۵۳۱	۰٫۰۰۳۶	−
۷	۰٫۴۳۷۵	۰٫۴۵۳۱	۰٫۴۴۵۳	-۰٫۰۰۵۹	+
۸	۰٫۴۴۵۳	۰٫۴۵۳۱	۰٫۴۴۹۲	-۰٫۰۰۱۲	+
۹	۰٫۴۴۹۲	۰٫۴۵۳۱	۰٫۴۵۱۲	۰٫۰۰۱۲	−
۱۰	۰٫۴۴۹۲	۰٫۴۵۱۲	۰٫۴۵۰۲	۰٫۰۰۰۰	

بنابراین $\frac{1}{1000} > 0.0000$ $\Leftarrow$ $x = 0.4502$ تقریب مناسب است $\Leftarrow$ $x = 0.45$

مثال: تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $(1-x)^5 - x^2 = 0$ که در بازه $(0,1)$ قرار دارد را با 4D به دست آورید که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ (به روش دوبخشی)

$f(a) = f(0) = -1$

کنترل شرایط $\Leftarrow$ تابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته است. $\Leftarrow$ $\Rightarrow f(a) f(b) < 0$ ✓

$f(b) = f(1) = 1$

$f'(x) = 2x + 5(1-x)^4 > 0$ ✓

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰,۵	$(-)(+) = -$	۰,۲۱۸۷۵
۲	۰	۰,۵	۰,۲۵	$(-)(-) = +$	-۰,۱۷۴۸
۳	۰,۲۵	۰,۵	۰,۳۷۵	$(-)(+) = -$	۰,۰۴۵۳۶
۴	۰,۲۵	۰,۳۷۵	۰,۳۱۲۵	$(-)(-) = +$	۰,۰۵۵۹۳
۵	۰,۳۱۲۵	۰,۳۷۵	۰,۳۴۳۷۵		-۰,۰۰۳۵۵

$|f(x_n)| < 10^{-2} \Rightarrow |f(x_5)| < 10^{-2} \rightarrow |-0,00355| < 0,01 \Rightarrow x_n \simeq \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 0,3438}$

تمرین: به روش تنصیف، تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $3x - e^x = 0$ را که در بازه‌ی $(0,25 , 0,27)$ قرار دارد را با $3D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-3}$.

تمرین ۲: تقریبی از ریشه‌ی معادله $x^3 + 2x - 1 = 0$ را که در بازه‌ی $(0,1)$ قرار دارد را با تقریب $4D$ محاسبه کنید به روش دوبخشی، به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$

روش نابه‌جایی

الگوریتم روش نابه‌جایی:

گام ۱: قرار می‌دهیم $n=1$

گام ۲: $x_n = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

گام ۳: اگر یکی از شرایط توقف برقرار باشد، x_n را به عنوان تقریب مطلوب از ریشه α در نظر می‌گیریم و اجرای الگوریتم متوقف می‌شود.

گام ۴: اگر $f(a)\,f(x_n) = 0$، آنگاه x_n ریشه معادله است و اجرای الگوریتم متوقف می‌شود.

گام ۵: اگر $f(a)\,f(x_n) < 0$، قرار می‌دهیم $b = x_n$، در غیر این صورت $a = x_n$.

گام ۶: قرار می‌دهیم $n = n+1$ و به گام ۲ می‌رویم.

مثال: تقریبی از ریشه مثبت $f(x) = x^2 - 2$ را به روش نابه‌جایی با دو رقم اعشار $(2D)$ به دست آورید. بازه، $(1,2)$ می‌باشد. محاسبات تا ۲ تکرار انجام شود.

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= f(1) = -1 \\ f(b) &= f(2) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a)\,f(b) < 0 \quad ✓$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ در بازه $(1,2)$ پیوسته است.

$f'(x) = 2x > 0$ ✓

$$n=1 \Rightarrow x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1\times 2 - 2\times(-1)}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9} - 2 = \frac{-2}{9} = -0{,}222$$

علامت $f(a)f(x_n) = (-)(-) = + \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

$$n=2 \Rightarrow x_2 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)(2) - (2)\left(\frac{-2}{9}\right)}{2 - \left(\frac{-2}{9}\right)} = 1{,}4 \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 1{,}40}$$

مثال) تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 3x - e^{-x}$ را به روش نابجایی تا سه رقم اعشار به دست آورید. ریشه در فاصله‌ی $(0{,}25 , 0{,}27)$ قرار دارد. محاسبه را تا جایی انجام دهید که $|f(x_n)| \le 2\times 10^{-4}$

کنترل شرایط $\Leftarrow$ $f(x)$ در بازه‌ی $(0{,}25 , 0{,}27)$ پیوسته است. ✓

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = f(0{,}25) = -0{,}0288 \\ f(b) = f(0{,}27) = 0{,}0466 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)f(b) < 0 \checkmark$$

$f'(x) = 3 + e^{-x} > 0$ ✓ ریشه یکتا است.

$$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{(0{,}25)(0{,}0466) - (0{,}27)(-0{,}0288)}{0{,}0466 - (-0{,}0288)} = 0{,}2576$$

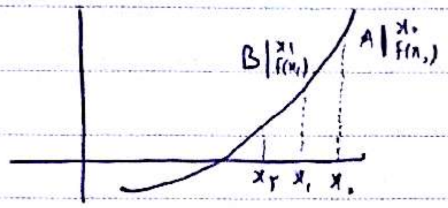
$$f(x_n) = f(0{,}2576) = -0{,}0001 < 2\times 10^{-4} \Rightarrow x \simeq \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 0{,}258}$$

تمرین ۳: به روش نابجایی، تقریبی از ریشه‌ی نامنفی $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ را که در فاصله‌ی $(-2 , -1)$ قرار دارد، با 4D به طوری به دست آورید که $|f(x_n)| < 10^{-2}$

تمرین ۴: تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^2 - 2^x$ با دقت 4D، به روش نابجایی، طوری محاسبه کنید که $|f(x_n)| < 10^{-2}$

روش نیوتن - رفسون :

یکی از مشهورترین و سریع ترین روش های یافتن ریشه معادله ی $f(x) = 0$ است. فرض کنید تابع f بر بازه [a,b] دارای ریشه منحصر به فرد باشد و فرض بر این است که تابع f مشتق پذیر باشد. در این صورت f در هر نقطه، یک شیب معین و یک خط مماس یکتا خواهد داشت. در این روش، اگر x_0 تقریبی از ریشه α باشد، خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $A\left|\begin{smallmatrix}x_0\\ f(x_0)\end{smallmatrix}\right.$ و محل تلاقی این خط با محور x ها در نقطه $x=x_1$ قرار می گیرد. مجدداً خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه ی B به مختصات $\left|\begin{smallmatrix}x_1\\ f(x_1)\end{smallmatrix}\right.$ خواهد بود که محور x ها را در نقطه ی $x=x_2$ قطع می کند. این روند ادامه پیدا می کند تا ریشه تقریب زده شود.



$A\left|\begin{smallmatrix}x_0\\ f(x_0)\end{smallmatrix}\right.$ $\quad m = f'(x_0) \quad\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

محل تلاقی : $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x)}{f'(x_0)} \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{اگر } f'(x) \neq 0}$

الگوریتم روش نیوتن - رفسون : با انتخاب مقدار اولیه x_0، مراحل زیر تکرار می شود.

گام ۱: قرار می دهیم $n=1$

گام ۲: قرار می دهیم $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

گام ۳: اگر یکی از شرایط توقف برقرار شد، x_n به عنوان تقریب مطلوب از ریشه α است، الگوریتم متوقف می شود.

گام ۴: قرار می دهیم $n=n+1$ و به گام ۲ می رویم.

مثال: فرمول روش نیوتن - رفسون را برای تعیین ریشه K ام عدد مثبت A، به دست آورید و با استفاده از آن و $x_0 = 1$، تقریبی برای $\sqrt{3}$

تا ۴ رقم اعشار بیابید.

$x=\sqrt[k]{a} \to x^k=a \qquad f(x)=x^k-a \qquad f(x)=0$

$f(x_n)=x_n^k-a \to f'(x_n)=kx_n^{k-1}$

فرمول نیوتن ـ رافسون: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}$

$x_0=1 \Rightarrow (x=\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow f(x)=x^2-3=0 \qquad x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-3}{2x_n} \qquad n=0 \Rightarrow x_1=x_0-\dfrac{x_0^2-3}{2x_0} \xrightarrow{x_0=1} x_1=1-\dfrac{-2}{2}=2 \Rightarrow x_1=2$

$n=1 \Rightarrow x_2=x_1-\dfrac{x_1^2-3}{2x_1} \xrightarrow{x_1=2} x_2=2-\dfrac{4-3}{4}=1.75 \Rightarrow x_2=1.75$

$n=2 \Rightarrow x_3=x_2-\dfrac{x_2^2-3}{2x_2} \xrightarrow{x_2=1.75} \quad x_3=1.73214$

$n=3 \Rightarrow x_4=x_3-\dfrac{x_3^2-3}{2x_3} \xrightarrow{x_3=1.73214} \quad x_4=1.73205$

$n=4 \Rightarrow x_5=x_4-\dfrac{x_4^2-3}{2x_4} \xrightarrow{x_4=1.73205} \quad x_5=1.73205$

چون x_4 و x_5 تا ۵ رقم اعشار باهم برابر شدند، پس شرط توقف حاصل شده است. بنابراین x_5 تقریب برابر α است. لذا $\alpha=1.7321$

مثال: ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=x-\cos x$ را به روش نیوتن با ۴ رقم اعشار به دست آورید به طوری $|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$ و $x_0=0.5$

$x-\cos x=0 \to x=\cos x$

$[a,b]=[0,1]$

کنترل شرایط: $f(x)$ در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است. ✓

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1 \\ f(1)=0.4597 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)\,f(b)<0 \ ✓$$

$f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0$ ✓

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

$$n=1 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos x_0}{1+\sin x_0} \xRightarrow{x_0 = 0.5} x_1 = 0.75522$$

$$n=2 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos x_1}{1+\sin x_1} \xRightarrow{x_1 = 0.75522} x_2 = 0.73914$$

$$n=3 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos x_2}{1+\sin x_2} \xRightarrow{x_2 = 0.73914} x_3 = 0.73909$$

$$\Rightarrow |x_3 - x_2| = 0.00005 < 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 0.7391}$$

تمرین: به روش نیوتن، تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ در فاصلهٔ $[1.5, 2]$ قرار دارد، با ۴ رقم اعشار به دست آورید به طوری که

$|f(x)| < 10^{-4}$ و $x_0 = 1.75$ (نقطه میانی بازه)

تمرین ۲: به روش نیوتن، ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 3e^x - \frac{1}{x}$ در فاصله $[0.2, 0.3]$ را به دست آورید. هم چنین $x_0 = 0.25$

تمرین ۳: تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 3x - e^{-x}$ در بازهٔ $[0.25, 0.27]$ به روش نیوتن به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$

روش تکرار ساده (نقطهٔ ثابت یا تکرار تابع ای):

در این روش، پس از آزمون شرایط جهت وجود ریشهٔ معادله در بازه، معادلهٔ $f(x) = 0$ را پس از جابه‌جایی به صورت $x = g(x)$ در آورده، به طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد. (معمولاً از روی معادله $f(x) = 0$، به صورت های مختلفی می توان $x = g(x)$ را به دست آورد).

پس از به دست آوردن معادلهٔ فوق، فرمول کلی x_n ها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_1 = g(x_0) \;,\; x_2 = g(x_1) \;,\; \dots$$

شرایط انتخاب $g(x)$ مناسب :

① $\forall x \in [a,b] \, , \, g(x) \in [a,b]$

② $\forall x \in [a,b] \, , \, |g'(x)| \leq 1$

مثلا : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow g(x) = x^2 - 2 \qquad g(x) = \sqrt{x+2}$

الگوریتم روش تکرار ساده : بعد از انتخاب $g(x)$ مناسب و مقدار اولیه x_0 ، مراحل زیر تکرار شود.

گام ۱ : قرار می دهیم $n=1$

گام ۲ : قرار می دهیم $x_n = g(x_{n-1})$

گام ۳ : اگر یکی از شرایط توقف برقرار باشد ، x_n را به عنوان تقریب مطلوب ریشه α در نظر می گیریم و الگوریتم متوقف می گردد .

گام ۴ : قرار می دهیم $n = n+1$ و به گام ۲ می رویم .

مثال : برای تقریب ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 3xe^x - 1$ که در فاصله $(0,1)$ قرار دارد ، از روش تکرار ساده استفاده کنید و قرار دهید ۵D .

$x_0 = 0.5$

کنترل شرایط : $f(x)$ در بازه $(0,1)$ پیوسته است . ✓

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 7.155 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)f(b) < 0 \ ✓$$

$$f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3e^x(1+x) > 0 \ ✓$$

$$f(x) = 3xe^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{e^{-x}}{3} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-x}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3e} < \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3e} < g(x) < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < 0.12 < g(x) < \frac{1}{3} < 1 \ ✓$$

$g(x) = -\frac{e^{-x}}{۳} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < ۱ \qquad \forall x \in (۰,۱)$ ✓

$x_{n+1} = g(x) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$

$n=۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{e^{-x_۰}}{۳} = \frac{e^{-۰٫۵}}{۳} = ۰٫۲۰۲۲ \qquad n=۱ \Rightarrow x_۲ = \frac{e^{-x_۱}}{۳} = \frac{e^{-۰٫۲۰۲۲}}{۳} = ۰٫۲۷۲۳$

$n=۲ \Rightarrow x_۳ = \frac{e^{-x_۲}}{۳} = \frac{e^{-۰٫۲۷۲۳}}{۳} = ۰٫۲۵۳۹ \qquad n=۳ \Rightarrow x_۴ = \frac{e^{-x_۳}}{۳} = \frac{e^{-x_۳}}{۳} = ۰٫۲۵۸۶$

$n=۴ \Rightarrow x_۵ = \frac{e^{-x_۴}}{۳} = \dots = ۰٫۲۵۷۴ \qquad n=۵ \Rightarrow x_۶ = \frac{e^{-x_۵}}{۳} = \dots = ۰٫۲۵۷۷$

$\boxed{\alpha = ۰٫۲۵۸}$

مثال: تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۲x - \sin x - ۱$ را با فرض $x_۰ = ۱$ تا سه رقم اعشار، طوری به دست آورید که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$.

بازه ی مورد نظر ← $(۰,۱)$

$f(x) = ۰ \Rightarrow ۲x - \sin x - ۱ = ۰$

$x = \frac{\sin x + ۱}{۲} \Rightarrow g(x) = \frac{\sin x + ۱}{۲} \qquad ۰ < x < ۱ \Rightarrow \sin ۰ < \sin x < \sin ۱ \Rightarrow$

$۰ < \frac{\sin ۰ + ۱}{۲} < \frac{\sin x + ۱}{۲} < \frac{\sin ۱ + ۱}{۲} < ۱ \Rightarrow ۰ < g(x) < ۱$

$g'(x) = \frac{۱}{۲}\cos x \Rightarrow |g'(x)| = |\frac{۱}{۲}\cos x| < ۱ \qquad x_{n+1} = g(x_n) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{\sin x_n + ۱}{۲}$

$n=۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{\sin x_۰ + ۱}{۲} = \frac{\sin ۱ + ۱}{۲} = ۰٫۹۲۰۷ \Rightarrow f(x_۱) = ۲x_۱ - \sin x_۱ - ۱ = ۰٫۰۴۵۲$

$n=۱ \Rightarrow x_۲ = \frac{\sin x_۱ + ۱}{۲} = \frac{\sin ۰٫۹۲۰۷ + ۱}{۲} = ۰٫۸۹۸ \Rightarrow f(x_۲) = ۰٫۰۱۳۹$

$n=۲ \Rightarrow x_۳ = \frac{\sin x_۲ + ۱}{۲} = \frac{\sin ۰٫۸۹۸ + ۱}{۲} = ۰٫۸۹۱ \Rightarrow f(x_۳) = ۰٫۰۰۴۳$

$n=۳ \Rightarrow x_۴ = \frac{\sin x_۳ + ۱}{۲} = ۰٫۸۸۸۹ \Rightarrow f(x_۴) = ۰٫۰۰۱۴$

$n=۴ \Rightarrow x_۵ = \frac{\sin x_۴ + ۱}{۲} = ۰٫۸۸۸۲ \Rightarrow f(x_۵) = ۰٫۰۰۰۴$

$x = ۰٫۸۸۸$

چون $۰٫۰۰۰۳۴۲ = |f(x_3)|$ شرط توقف برقرار است. ۱۵

فصل سوم حل عددی دستگاه معادلات خطی و غیرخطی

ماتریس: ماتریس واحد مرتبه n:

$$I_n = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \qquad I_n = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ماتریس متقارن: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

دترمینان: $|A|$ $\det A$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = 0 \times 4 - 2 \times 5 = -10$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2(0-25) - 1(12+5) - 1(15-0) = -50 - 17 - 15 = -82$$

قضیه: ماتریس A نامنفرد (وارون پذیر) است (یعنی معکوس A وجود دارد)، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

حاصل ضرب دو ماتریس:

$$A_{n \times m} \times B_{m \times q} = C_{n \times q}$$

$$C = A \times B \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i, j \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی

فرم معمولی

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2.5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 6x_3 = 7 \end{cases}$$

فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2.5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \xRightarrow{\times -2} \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -6 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow -x_1 = -1 \to x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

روش های حل دستگاه معادلات خطی

۱- روش های مستقیم: کرامر، معکوس ماتریس، حذفی گوس، گوس جردن

۲- روش های تکراری: روش ژاکوبی، گوس سایدل

روش کرامر: جواب دستگاه $AX = b$ عبارت است از

$$x_j = \frac{\det(A^j)}{\det A}$$

* ماتریس A^j از تعویض j امین ستون A با بردار b به دست می آید.

مثال:

$$\begin{cases} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\det A = \det \begin{vmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 300{,}000$$

$$\det(A^1) = \det \begin{vmatrix} 20 & -20 & -20 \\ 20 & 40 & -20 \\ 20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 180{,}000$$

$$x_1 = \frac{\det(A^1)}{\det A} = \frac{180{,}000}{300{,}000} = 0.6$$

$$x_2 = \frac{\det(A^2)}{\det A} = 1 \qquad x_3 = \frac{\det(A^3)}{\det A} = 0.4$$

روش معکوس ماتریس ضرایب:

$$AX = b \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-9}{4} & 1 \\ \frac{5}{4} & \frac{17}{4} & -2 \\ \frac{-3}{4} & \frac{-7}{4} & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

عملیات سطری مقدماتی : ۱- تعویض دو سطر یا معادله ۲- ضرب یک سطر (معادله) در یک عدد

۳- ضرب یک سطر (معادله) در یک عدد غیر صفر و جمع آن با سطر دیگر

با اعمال سطری مقدماتی، ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی تبدیل شده و حل معادلات را آسان می کند.

روش حذفی گوس : در این روش معادلات را به صورت فرم ماتریسی درآورده و مراحل زیر را انجام می دهیم.

۱- تبدیل ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی با استفاده از عملیات سطری مقدماتی

۲- حل و جایگذاری معکوس از آخرین معادله

$$Ax=b \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

مثال) دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گوس حل نمایید.

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -19 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -34 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + R_1 \to R_4]{R_2 + (-2)R_1 \to R_2,\ R_3 + (-\frac{1}{2})R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + (\frac{1}{2})R_2 \to R_4]{R_3 + (-3)R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + (-2)R_3 \to R_4} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$-3x_4 = -3 \Rightarrow \boxed{x_4 = -1}$ $\qquad$ $2x_3 - 5x_4 = -9 \Rightarrow 2x_3 - 5 = -9 \Rightarrow \boxed{x_3 = -2}$

$-4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -6 \Rightarrow -4x_2 - 4 + 2 = -6 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \Rightarrow 6x_1 - 2 - 4 + 4 = 12 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

تمرین: دستگاه زیر را به روش حذفی گوس حل کنید.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

روش گوس ـ جردن: در این روش نه تنها عناصر زیر قطر اصلی، بلکه عناصر بالای قطر را نیز صفر می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}} \qquad x_2 = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \qquad x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}$$

مثال:

$$\begin{cases} x + y + z + w = -2 \\ x + 2y + 3z + 4w = -10 \\ 2x + 3y + 4z + w = 4 \\ 3x + 4y + z + 2w = -10 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 1 \quad y = -2 \quad z = 3 \quad w = -4$$

روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n) \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

تقریب اولیه برای جواب دستگاه فوق، معمولاً به صورت $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ است که تقریب اولیه به صورت $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ ، $x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$ و ... $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ می باشد.

به خصوص زمانی که ضرایب $|a_{ii}|$ نسبت به سایر ضرایب، نسبتاً بزرگ باشد. برای حل معادلات به روش تکراری، دو روش ژاکوبی و گوس-سایدل وجود دارد.

روش ژاکوبی : در این روش مقادیر شروع را جایگذین کرده و مقادیر جدید x_1 ، x_2 تا x_n را حساب می کنیم. از تکرار عمل فوق، دنباله ای به وجود می آید که هر جمله آن شامل n عدد است. این عمل را آن اندازه تکرار می کنیم که دو جمله متوالی این دنباله به اندازه کافی به هم نزدیک شوند تا تشخیص دهیم، دنباله حاصل همگرا است.

روش گوس-سایدل : در این روش با جایگذین مقادیر آغازین در اولین معادله، x_1 را می یابیم. سپس این مقدار جدید x_1 و سایر مقادیر آغازین را در دومین معادله گذاشته، مقدار x_2 را محاسبه می کنیم. از تکرار این عمل، مقادیر جدید x_1 ، x_2 تا x_n به دست می آید.

تسلط قطری: گوییم ماتریس $A = a_{ij}$ تسلط قطری دارد یا اکیداً قطر غالب است. اگر به ازای هر $1 \le i \le n$ داشته باشیم $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$

قضیه: اگر ماتریس A، تسلط قطری داشته باشد، آنگاه روش های تکراری ژاکوبی و گوس - سایدل برای محاسبه جواب دستگاه خطی $Ax = b$، هر دو همگرا هستند.

مثال) دستگاه زیر را به روش های تکراری ژاکوبی و گوس - سایدل حل کنید. در صورت همگرایی، جواب ها را با تقریب $\varepsilon = 0.001$ به دست آورید.

$$\begin{cases} 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \\ 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \end{cases}$$

روش حل ژاکوبی

$$\begin{cases} x_1 = 100 - 33.3x_2 + 1.6x_3 \\ x_2 = -250 + 0.5x_1 + 50x_3 \\ x_3 = -100 + 50x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم
x_1	0	100	8258
x_2	0	-250	-5200
x_3	0	-100	4150

روش حل گوس - سایدل ←

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم
x_1	0	100	13941
x_2	0	-200	221730.5
x_3	0	4300	1362111.5

مشاهده می شود که هر دو روش همگرا هستند و باید شرط تسلط قطری در مسئله برقرار شود.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 + 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_2 \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_3 \end{cases}$$

روش ژاکوبی

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم
x_1	0	2	1.92	1.9094	1.90923
x_2	0	3	3.19	3.1944	3.19495
x_3	0	5	5.04	5.0446	5.04485

$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = |1.90923 - 1.9094| < \varepsilon = 0.001$

$|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = |3.1945 - 3.1944| < \varepsilon = 0.001$

$|x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = |5.04485 - 5.0446| < \varepsilon = 0.001$

روش گوس_سایدل

x_i	تقریب اولیه	تکرار اول	تکرار دوم	تکرار سوم	تکرار چهارم
x_1	0	2	1.924376	1.909240	1.909199
x_2	0	2.94	3.194209	3.194654	3.194964
x_3	0	5.0388	5.044640	5.044807	5.044807

$x_1 = 1.909$ $x_2 = 3.195$ $x_3 = 5.045$

تمرین: معادله‌ی زیر را به روش ژاکوبی و گوس_سایدل حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

شرط تسلط قطری: $|4| > |-1| + |1| = 2$

$|6| > |1| + |2| = 3$

$|5| > |-1| + |-2| = 3$

تسلط قطری برقرار است، جواب‌ها همگرا خواهند بود.

$$x_1 = \frac{4 + x_2 - x_3}{4} \qquad x_2 = \frac{9 - x_1 - 2x_3}{6} \qquad x_3 = \frac{2 + x_1 + 2x_2}{5}$$

روش ژاکوبی

k	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱٫۵	۰٫۴
۲	۱٫۲۷۵	۱٫۲۰۸	۱٫۲
۳	۱	۰٫۸۸۲۵	۱٫۱۳۵۰
۴	۰٫۹۳۸۱	۰٫۹۵۵۰	۰٫۹۵۵۰
۵	۱	۱٫۰۲۵۳	۰٫۹۶۹۶
۶	۱٫۰۱۳۹	۱٫۰۱۰۱	۱٫۰۱۰۱
⋮	⋮	⋮	⋮
۱۲	۰٫۹۹۹۸	۰٫۹۹۹۹	۰٫۹۹۹۹
۱۳	۱	۱	۰٫۹۹۹۹
۱۴	۱	۱	۱
۱۵	۱	۱	۱

تکرار (k+1) ام

تکرار k ام

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{6} \end{cases} \qquad x_3^{(k+1)} = \frac{2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}}{5}$$

روش گوس - سایدل

k	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱٫۳۳۳۳	۱٫۳۳۳۳
۲	۱٫۰۵۰۰	۰٫۹۴۷۲	۰٫۹۸۸۹
۳	۰٫۹۸۹۶	۱٫۰۰۵۴	۱٫۰۰۰۱
۴	۱٫۰۰۱۳	۰٫۹۹۹۷	۱٫۰۰۰۲
۵	۰٫۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۶	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۷	۱	۱	۱

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. / /

مثال) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2} \quad (-2,-1) \quad FP \quad |f(x_n)| < 10^{-2}$

$$\left.\begin{aligned} f(a=-2) &= 0.09070 \\ f(b=-1) &= -0.34147 \end{aligned}\right\} f(a)f(b) < 0 \ \checkmark \qquad f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \neq 0 \ \checkmark$$

n	a	b	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	-2	-1	-1.79013	$(+)(-) = -$	-0.05898
2	-2	-1.79013	-1.88912		0.00520

$f(x_2) = 0.00520 < 10^{-2} = 0.01 \rightarrow$ پس شرط توقف برقرار است $\boxed{\alpha = -1.8891}$

فصل چهارم درون یابی

در محیط که ضابطه تابع در دست نیست، برای هر x، طی آزمایشات یا روش های دیگر، می توان $f(x)$ را تخمین زد.

به عبارت دیگر، $f(x)$ را برای برخی مقادیر x، به طور تقریبی داریم.

تابع جدولی :

x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

تابع جدولی فوق را در نظر بگیرید. می خواهیم مقدار تابع f را در نقطه ای مانند x^* $(x^* \in (x_0, x_n))$ باشد، به طوری که $x_i \neq x^*$ و $i = 0, 1, 2, \dots, n$

باشد، برآورد این عمل را درون یابی می نامیم. برای این کار، روش های متفاوتی وجود دارد که یکی از این روش ها، پیدا کردن چندجمله ای مانند $p(x)$ است

به گونه ای که $p(x_i) = f_i$ $\quad i = 0, 1, 2, \dots, n$. حال به جای $f(x)$، می توان از $p(x)$ درباره (x_0, x_n) استفاده نمود. به این

ترتیب مسئله ای که مطرح می شود، تعیین $p(x) \simeq f(x)$ است. چندجمله ای $p(x)$، به چندجمله ای درون یاب معروف است. در ادامه،

چند روش برای تعیین $p(x)$ که در شرایط فوق صدق کند، بیان می شود.

۱- روش چندجمله ای های لاگرانژ : در این روش فرض می کنیم که $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$، هر یک، یک چندجمله ای از درجه n

باشند و داشته باشیم :

، $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \qquad (j=0,1,\dots,n)$$

* چند جمله ای $L_j(x)$ به چند جمله ای لاگرانژ معروف است.

مثال) چند جمله ای مربوط به تابع جدولی زیر را محاسبه کرده و مقدار تابع را در نقطه ی ۰٫۵ به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

$f(0.5) = ?$ $\quad i = 0, 1, 2$ چند جمله ای از درجه ۲ خواهد بود.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{2} L_i(x) f_i = 1\times L_0(x) + 1\times L_1(x) + 3\times L_2(x) = x^2+x+1$$

$$f(0.5) = P(0.5) = (0.5)^2 + 0.5 + 1 = 1.75$$

تمرین: چند جمله ای درون یاب جدولی زیر را پیدا نمایید و مقدار آن را در نقطه ۲ محاسبه نمایید.

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	-12	0	6	12

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	-12	0	6	12
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3-7x^2+12x}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{-6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{12}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} f_i L_i(x) = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12}(-12) + \frac{x^3-7x^2+12x}{6}(0) + \frac{x^3-5x^2+4x}{-6}(6) + \frac{x^3-4x^2+3x}{12}(12) = x^3-7x^2+18x-12$$

معایب روش لاگرانژ: ۱- محاسبات این روش، زمانی که n خیلی بزرگ هم نباشد، زیاد است.

۲- با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدول، تمام عملیات تغییر می‌کند و محاسبات باید از اول نوشته شود.

چند جمله ای درون یاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

فرض کنید x_0 تا x_n، نقاط ۲ به ۲ متمایز باشند و f_0 تا f_n، مقادیر تابع f در این نقاط باشند، تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبه های متفاوت برای نقاط x_i به صورت زیر تعریف می شود.

۱- تفاضلات مرتبه اول بین دو نقطهٔ x_i و x_{i+1}، به صورت $f[x_i,x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$ است.

۲- تفاضلات مرتبه دوم بین سه نقطهٔ x_i، x_{i+1} و x_{i+2}، به صورت $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] = \frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$ است.

۳- تفاضلات مرتبه iام بین $i+1$ نقطه x_0، x_1، ... و x_i، به صورت $f[x_0,x_1,\dots,x_{i-1},x_i] = \frac{f[x_0,\dots,x_{i-1}]-f[x_1,\dots,x_i]}{x_0 - x_i}$ است.

فرمول چند جمله ای درون یاب f در نقاط x_0، ... و x_n به صورت زیر است:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

مثال) چند جمله ای درون یاب به روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن را برای تابع جدولی زیر، محاسبه نمایید.

x_i	۰	۱	۲	۵
f_i	۲	۳	۱۲	۱۴۷

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	۰	۱	۲	۵
f_i	۲	۳	۱۲	۱۴۷
	f_0	f_1	f_2	f_3

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
۰	۲			
		$f[0,1]$: $\frac{2-3}{0-1}=1$		
۱	۳		$\frac{1-9}{0-2}=4$	
		$f[1,2]$: $\frac{3-12}{1-2}=9$		$\frac{4-9}{0-5}=1$
۲	۱۲		$\frac{9-45}{1-5}=9$	
		$f[2,5]$: $\frac{12-147}{2-5}=45$		
۵	۱۴۷			

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$= 2 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1)4 + (x-0)(x-1)(x-2)(1) = 2 + x + 4x^2 - 4x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 - x + 2$$

تمرین: چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن محاسبه و $f(6)$ را به دست آورید.

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۲۳۶۶	۹۷۰۲

خطای چند جمله ای درون یاب: تابع خطای E_x در چند جمله ای درون یاب، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(x) = f(x) - P(x) \quad (P(x) \simeq f(x))$$

بنابراین می‌خواهیم یک کران بالا برای $E(x)$ به دست آوریم. اگر M_{n+1} یک کران بالای $f^{(n+1)}(\eta)$ باشد (یعنی $f^{(n+1)}(\eta) \le M_{n+1}$)، آنگاه رابطهٔ زیر برای خطای چند جمله ای درون یاب برقرار است:

$$E(x) = |f(x) - P(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

مثال) فرض کنید که $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ یک تابع جدولی در نقاط ۱- ، ۰ و ۱ باشد. چندجمله‌ای درون‌یاب f را در نقاط فوق محاسبه نمایید و یک کران بالا برای خطای آن محاسبه نمایید. ب) خطا در نقطهٔ $\frac{1}{2}$

x_i	f_i		مرتبه اول	مرتبه دوم
-1	-1	$\sin\frac{\pi}{2}(-1)$		
			$\frac{0-(-1)}{0-(-1)}=1$	
0	0	$\sin\frac{\pi}{2}(0)$		$\frac{1-1}{-1-1}=0$
			$\frac{1-0}{1-0}=1$	
1	1	$\sin\frac{\pi}{2}(1)$		

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]=-1+(x+1)(1)+(x+1)(x-0)(0)=-1+x+1=x$$

$$\longrightarrow P(x)=x \qquad |f^{(3)}(\eta)|\le M_3 \qquad f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad f''(x)=\frac{-\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{-\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad |f^{(3)}(\eta)|=\frac{\pi^3}{8}\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|\le\frac{\pi^3}{8}\times 1=\frac{\pi^3}{8}=M_3$$

$$E(x)=|f(x)-P(x)|\le|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\frac{M_3}{3!}=|(x+1)(x-0)(x-1)|\frac{\pi^3}{48}=|x(x^2-1)|\frac{\pi^3}{48}=$$

$$(x^3-x)\frac{\pi^3}{48}$$

ب) خطا در نقطهٔ $\frac{1}{2}$: $E(\frac{1}{2})=|f(\frac{1}{2})-P(\frac{1}{2})|\le|(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}|\frac{\pi^3}{48}=0{,}242$

تفاضلات متناهی و درون‌یابی یک تابع، هرگاه نقاط درون‌یابی متساوی‌الفاصله باشند، روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن، در حالت کلی برای نقاط x_0 تا x_n، چه فاصله‌ها برابر باشند و چه نباشند، چندجمله‌ای درون‌یاب به دست می‌آید. اما وقتی x_i ها متساوی‌الفاصله باشند، روش‌های دیگری که نسبتاً ساده‌تر هستند، برای محاسبهٔ چندجمله‌ای درون‌یاب، در ادامه معرفی می‌شوند.

هرگاه فاصلهٔ $[a,b]$ را به n زیرفاصلهٔ مساوی به صورت $[x_{i-1},x_i]$ به طول h تقسیم کنیم، داریم:

$x_i-x_{i-1}=h$ می‌باشد و هم‌چنین $i=0,1,\dots,n$ و $x_i=x_0+ih$

تعریف عملگر پیشرو (Δ):

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$$

فرمول کلی : $\Delta^{k+1} f_i = \Delta^{k} f_{i+1} - \Delta^{k} f_i$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

در این روش، مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن، هرگاه نقاط x_i متساوی الفاصله باشند، می توان جدول تفاضلات را یک جدول تفاضلات متناهی نامید و آن را تشکیل داد.

فرمول چند جمله ای درون یاب برحسب تفاضلات متناهی :

هرگاه x_i نقاط متساوی الفاصله باشند و $x = x_i + \theta h$ ، در این صورت چند جمله ای درون یاب f، برحسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر است :

$$p(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0$$

مثال) چند جمله ای درون یاب مربوط به تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات متناهی پیشرو، محاسبه نمایید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0			
		$-1-0=-1$		
0	-1		$3-(-1)=4$	
		$2-(-1)=3$		$4-4=0$
1	2		$7-3=4$	
		$9-2=7$		
2	9			

$$p(x) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0 = 0 + \theta(-1) + \frac{\theta(\theta-1)}{2}(4) +$$

$$\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \times 0 = 2\theta^2 - 2\theta - \theta = 2\theta^2 - 3\theta$$

$$x = x_i + \theta h \xrightarrow{i=0} x = x_0 + \theta h \Longrightarrow x = -1 + \theta(1) \Longrightarrow \theta = x+1$$

$f(x)=2(x+1)^2-3(x+1)=2x^2+x-1$

تعریف عملگر پسرو (∇) :

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

فرمول کلی :

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0			
		∇f_0		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_0$	
		∇f_1		$\nabla^3 f_0$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_1$	
		∇f_2		
x_3	f_3			

فرمول چندجمله ای درون یاب برحسب تفاضلات پسرو :

$$P(x)=f_n+\theta\nabla f_n+\frac{\theta(\theta+1)}{2}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\cdots(\theta+(n-1))}{n!}\nabla^n f_n$$

برای تخمین مقدار $f(x)$، وقتی x نزدیک به نقاط انتهای جدول است، لازم است از تفاضلات پسرو که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می شود، استفاده کرد. چندجمله ای درون یاب f در نقاط متساوی الفاصله x_0 تا x_n و $x=x_n+\theta h$ به صورت $P(x)$ می باشد.

مثال) چندجمله ای درون یاب تابع جدولی مثال قبل را با استفاده از تفاضلات پسرو، محاسبه کنید.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
-1	0			
		$-1-0=-1$		
0	-1		$3-(-1)=4$	
		$2-(-1)=3$		$4-4=0$
1	2		$7-3=4$	
		$9-2=7$		
2	9			

$$P(x)=f_3+\theta\nabla f_3+\frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_3+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla^3 f_3=9+\theta(7)+\frac{\theta(\theta+1)}{2}(4)+0=$$

$9\theta + 2\theta^2 + 9$ ①

$x = x_n + \theta h \Rightarrow x = x_2 + \theta(1) \Rightarrow x = 2 + \theta \Rightarrow \theta = x - 2$ ②

$\xrightarrow{①,②} p(x) = 2(x-2)^2 + 9(x-2) + 9 = 2x^2 + x - 1$

درون یابی معکوس: تاکنون با معلوم بودن x، مقدار $f(x)$ را برآورد می کردیم. اگر منظور تخمین مقداری از x باشد به طوری که $f(x)$ مقدار معلومی داشته باشد، این کار درون یابی معکوس نامیده می شود. یکی از کاربردهای آن، تخمین ریشه ی $f(x) = 0$ است به این ترتیب که x ای را به دست می آوریم که $f(x) = 0$ باشد. دیگر کاربرد آن، تخمین جمعیت در زمان مشخص است. هم چنین برای تخمین x، از روش تفاضلات تقسیم شده استفاده می شود.

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

f_i	f_0	f_1	...	f_n
x_i	x_0	x_1	...	x_n

چون فاصله ی x ها یکسان نیست و انتخاب آن ها در اختیار ما نیست، نمی توان از فرمول های پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این رو، تنها روش موثر، همان جدول تفاضلات تقسیم شده است که جای x_i و f_i عوض شده است.

مثال) جدول زیر در مورد تابع $f(x) = \sin x$ در دست است. x ای را تعیین کنید که $f(x) = 0{,}2$ شود.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
f_i	۰	۰,۱۷۳۶	۰,۳۴۲۰	۰,۵	۰,۶۴۲۸	۰,۷۶۶۰

ابتدا جدول را براساس $|f(x) - 0{,}2|$ صعودی، مرتب می کنیم و جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل می دهیم.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۰,۱۷۳۶	۱۰					
		۵۹,۳۸				
۰,۳۴۲۰	۲۰		۵,۱۸			
		۵۸,۴۸		۱۳,۶۰		
۰	۰		۹,۶۲		۱۳,۳۸	
		۶۰,۰۰		۱۹,۸۸		۳۴,۸۶
۰,۵	۳۰		۱۵,۰۶		۳۲,۰۲	
		۷۰,۰۲		۳۴,۰۲		
۰,۶۴۲۸	۴۰		۴۱,۸۸			
		۸۱,۱				
۰,۷۶۶	۵۰					

$n = 5$

مثال: ۵۹٫۳۸ $\longrightarrow \frac{۱۰-۲۰}{۰٫۱۷۳۶-۰٫۳۴۲۰} = ۵۹٫۳۸$

$p(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots +$

$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

جای x و f را در فرمول فوق عوض می‌کنیم.

$X(f) = X(۰٫۲) = ۱۰ + ۵۹٫۳۸(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶) + ۵٫۱۸(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲-۰٫۳۴۲۰) +$

$۱۳٫۶(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲-۰٫۳۴۲)(۰٫۲-۰) + ۱۳٫۳۸(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲-۰٫۳۴۲۰)(۰٫۲-۰)(۰٫۲-۰٫۵) +$

$۳۴٫۸۶(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲-۰٫۳۴۲۰)(۰٫۲-۰)(۰٫۲-۰٫۵)(۰٫۲-۰٫۶۴۲۸) = ۱۱٫۵۳۷۵$

بنابراین جواب تقریباً ۱۱٫۵۳۷۵ درجه است.

استفاده از فرمول لاگرانژ برای درون‌یابی معکوس: با تعویض نقش x و f در فرمول‌های درون‌یابی لاگرانژ، فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$X(f) = \sum_{i=0}^{n} L_i(f) x_i \qquad \text{که: } L_j(f) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{f-f_i}{f_j-f_i}$$

مثال) جدول زیر برای تابع f در اختیار است. مطلوب است تعیین مقداری از $x \in (۱,۲)$ و $f(x) = ۰٫۵$

x_i	۱	۱٫۲	۱٫۴	۱٫۶	۱٫۸	۲
f_i	۰	۰٫۱۲۷۵۱۴	۰٫۳۰۲۸۲۳	۰٫۵۱۷	۰٫۷۶۴۱۲۷	۱٫۰۲۹۷۲۵

$$n=۵ \Rightarrow x(f) = \sum_{0}^{۵} x_i L_i(f) = \sum_{0}^{۵} x_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{۵} \frac{f-f_j}{f_i-f_j}$$

با جایگذین مقدار $f = ۰٫۵$ و مقادیر داده شده در جدول، داریم:

$L_0(۰٫۵) = -۰٫۰۱۱۲۲۱٫۵$ $\qquad L_1(۰٫۵) = ۰٫۰۴۷۲۵۵۱۶$

$L_2(0,5) = 0{,}11677892$ $\qquad$ $L_3(0,5) = 0{,}93966347$

$L_4(0,5) = -0{,}02204592$ $\qquad$ $L_5(0,5) = 0{,}00163764$

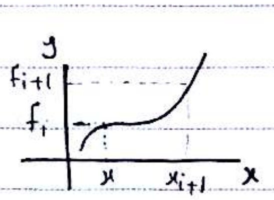
$x(0,5) = \sum_{i=0}^{5} x_i L_i(0,5) = 1{,}58505952 \Longrightarrow f(1{,}58505952) = 0{,}5$

انتگرال‌گیری عددی: برای محاسبهٔ $\int_a^b f(x)\,dx$ ، هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد یا f به صورت تابع جدولی داده شده باشد، از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $[a,b]$ به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود:

$[x_i , x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n \Rightarrow x_{i+1} - x_i = h \qquad \frac{b-a}{n} = h$

قاعدهٔ ذوزنقه: در بازهٔ $[x_i , x_{i+1}]$ تقریب زیر را داریم.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}\right]$$

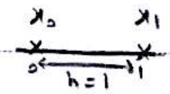


رابطهٔ بالا، مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h است.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

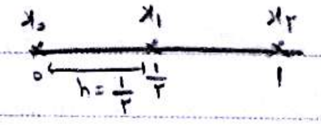
مثال) تقریبی از $\int_0^1 x^2\,dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h=1$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ محاسبه نمایید.

الف) $h = 1 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 1 \Rightarrow n = 1$



$$\int_0^1 x^2\,dx = T(1) = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] = \frac{1}{2}\left[0 + 1\right] = \frac{1}{2}$$

ب) $h = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-0}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 2$



$$\int_0^1 x^2\,dx = T\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + f_2\right] = \frac{1}{4}\left[0 + \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{3}{8}$$

ج) $h = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1-0}{n} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 4$

$$\frac{1}{8}\left[0+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{9}{8}+1\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{22}{8}\right] = \frac{22}{64}$$

مثال) انتگرال تابع جدولی زیر را به روش ذوزنقه محاسبه نمایید.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183

$n=5 \qquad h=0.2$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0+2f_1+2f_2+2f_3+2f_4+f_5] = 0.1[1+2(1.2214+1.4918+1.8221+2.2255)+2.7183]$$

$= 1.72$

قاعدهٔ سیمپسون:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}]$$

این قاعده برای nهای زوج برقرار است. یعنی تعداد نقاط باید فرد باشد.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+\dots+4f_{n-1}+f_n]$$

مثال) تقریبی از انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با $h=\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$ محاسبه نمایید.

الف) $h=\frac{\pi}{4} \Rightarrow h=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow n=2$

x_0	x_1	x_2
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \simeq S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2] = \frac{\pi}{12}\left[0+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right] = \frac{\pi}{12}[2\sqrt{2}+1]$$

ب) $h=\frac{\pi}{8} \Rightarrow h=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{8}} \Rightarrow n=4$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \simeq S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4] = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left[0+4(0.382)+\frac{2\sqrt{2}}{2}+4(0.923)+1\right]$$

$= 0.32\pi$

قاعدهٔ دونقطه‌ای گوس: فرمول های قاعدهٔ گوس برای بازهٔ $[-1,1]$ به دست می آید. با استفاده از تغییر متغیر زیر، بازه های $[a,b]$ را می توان به سادگی به بازهٔ $[-1,1]$ تبدیل کرد.

$$x=\frac{1}{2}\left[(b-a)u+(b+a)\right] \qquad dx=\frac{b-a}{2}\,du$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} g(u)\,du \qquad g(u)=f\left[\frac{1}{2}(b-a)u+(b+a)\right]$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)} \Leftarrow$$ فرمول کلی قاعدهٔ گوس

مثال) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ را با استفاده از فرمول دونقطهٔ گوس، محاسبه نمایید.

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}u+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4}(u+1) \qquad dx=\frac{\pi}{4}\,du$$

$$\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{4}(u+1)\right)\frac{\pi}{4}\,du=\frac{\pi}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)\right]=0{,}99848$$

خطای روش ذوزنقه: فرض کنید $f\in C^2[a,b]$ ، $h=\frac{b-a}{n}$. آنگاه:

$$E(T(h))=\int_a^b f(x)\,dx-T(h)\simeq-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\eta)$$ که η، بین a و b است.

مثال) حدود h را چنان تعیین کنید که برای تخمین $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$ ، داشته باشیم $E(T(h))<10^{-3}$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x$$

$$|E(T(h))|=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{12}h^2\times(-\sin x)=\frac{\pi}{24}h^2\sin x$$

$$\xrightarrow{\sin x\le 1}\frac{\pi}{24}h^2\sin x\le\frac{\pi}{24}h^2<10^{-3}\Longrightarrow h\simeq 0{,}087$$

خطای روش سیمپسون: فرض کنید $f\in C^4[a,b]$ ، n زوج ، $h=\frac{b-a}{n}$. آنگاه:

$$E(S(h))=\int_a^b f(x)\,dx-S(h)\simeq\frac{-(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

مثال) حدود h را طوری بیابید که $S(h)$ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ را با حداکثر خطای 10^{-5} تعیین کنید. $(a=0,\ b=\frac{\pi}{2},\ \varepsilon=10^{-5},\ f(x)=x\cos x)$

$$M_4 = \max|f^{(4)}(x)| \qquad 0\le x\le \frac{\pi}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x \Rightarrow |f^{(4)}(x)| = |4\sin x + x\cos x| \le 4|\sin x| + |x||\cos x| \le 4+\frac{\pi}{2} < 6 \ ?$$

$$\frac{(b-a)h^4}{180}M_4 = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{180}h^4\times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \le 10^{-5} \Rightarrow h \le 0.1\times\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \simeq 0.1176$$

از طرفی داریم: $nh = b-a = \frac{\pi}{2}$ پس $n=\frac{\pi}{2h}$، درنتیجه: $n=\frac{\pi}{2h} \ge \frac{\pi}{2\times 0.1176} = 13.3571$

چون در روش سیمپسون، n بایستی زوج باشد، پس قرار می‌دهیم $n=14$، داریم $h=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{\pi}{28}\simeq 0.1122$

که از مقدار قبلی کم‌تر است.