

خمش خالص

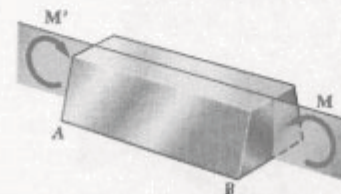


ورزشکار، میله وزنه برداری را با دست‌هایش که در فاصله مساوی از وزنه‌ها قرار دارند نگه داشته است. این عمل باعث ایجاد خمش خالص در قسمت مرکزی میله می‌شود. تنش‌های قائم و انحنای ناشی از خمش خالص در این فصل تعیین می‌شوند.

۱-۴ مقدمه

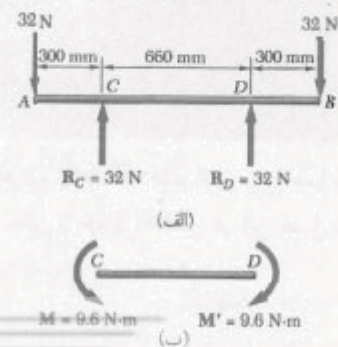
در فصل‌های قبل، تنش در عضوهای منشوری را که تحت بارهای محوری یا کوپل‌های پیچشی قرار دارند بررسی کردیم. در این فصل و در دو فصل بعد، تنش و کرنش در عضوهای منشوری را که تحت خمش قرار دارند تحلیل می‌کنیم. خمش مفهوم مهمی است که در طراحی اغلب اجزای مکانیکی و ساختمانی به کار می‌رود.

در این فصل، عضوهای منشوری را تحت کوپل‌های مساوی و مخالف M و M' ، که در صفحه طولی یکسان عمل می‌کنند، تحلیل می‌کنیم. می‌گوییم این عضوها در خمش خالص هستند. فرض می‌کنیم عضو دارای صفحه تقارن است و کوپل‌های M و M' در آن صفحه عمل می‌کنند (شکل ۱-۲).

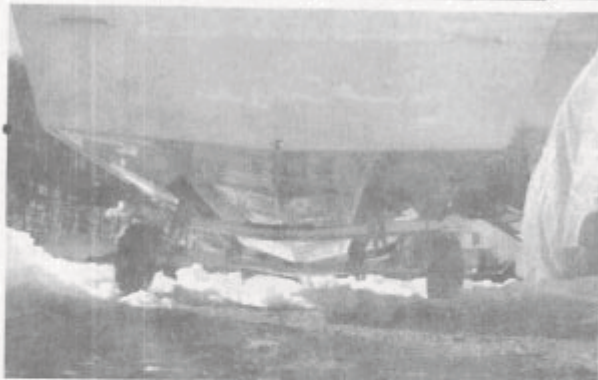


شکل ۱-۴

خمش میله وزنه‌برداری در بالای سر وزنه‌بردار، نمونه‌ای از خمش خالص است. این میله دارای وزنه‌هایی است که به فواصل مساوی از دست‌های وزنه‌بردار قرار دارند. به علت تقارن میله (شکل ۲-۴ الف)، واکنش دست‌ها با هم برابر و در سوی مخالف وزنه‌ها هستند. بنابراین، هنگام بررسی قسمت مرکزی CD میله می‌توان وزنه‌ها و واکنش‌ها را با دو کوپل مساوی و مخالف $9.6 \text{ N}\cdot\text{m}$ جایگزین کرد (شکل ۲-۴ ب)، و این نشان می‌دهد که قسمت مرکزی میله در خمش خالص است. همین تحلیل برای اکسل یک خودرو (شکل ۳-۴) نشان می‌دهد که اکسل، بین دو نقطه اتصالش با خودرو، در خمش خالص است.

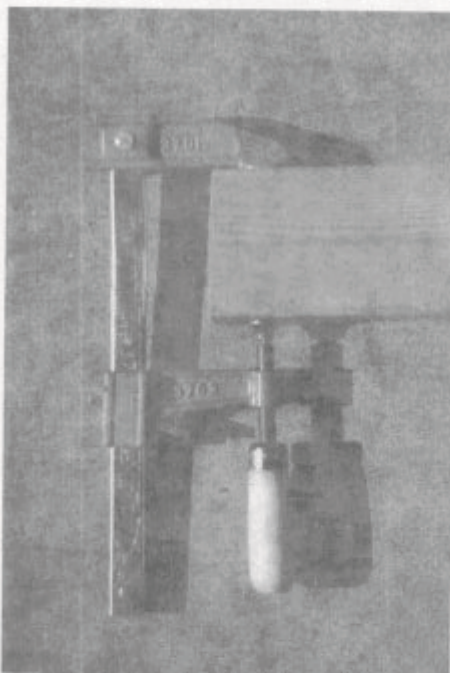


شکل ۲-۴



شکل ۳-۴ در خودروی نشان داده شده، قسمت مرکزی اکسل در خمش خالص است

نتایج حاصل از خمش خاص را برای تحلیل سایر بارگذاری‌ها، مانند بارگذاری محوری خارج از مرکز و بارگذاری عرضی، می‌توان به کار برد.



شکل ۴-۴ یک گیره فولادی را نشان می‌دهد که نیروهای 6000 N را بر دو تکه چوب وارد کرده و آنها را به هم چسبانده است. در شکل ۴-۵ الف، نیروهای مساوی و مخالف وارده از چوب بر گیره نشان داده شده است. این نیروها باعث می‌شوند قسمت مستقیم گیره تحت بارگذاری خارج از مرکز قرار گیرد. در شکل ۴-۵ ب، گیره در مقطع CC' خورده است و نمودار آزاد نیمه بالایی آن رسم شده است. طبق این

در قسمت اول این فصل، تنش و تغییر شکل ناشی از خمش خالص را در عضو همگنی بررسی می‌کنیم که دارای صفحه تقارن است و ماده سازنده آن از قانون هوک پیروی می‌کند. در قسمت ۲-۴، از روش‌های استاتیک برای استنتاج معادله‌های تنش قائم در مقاطع عرضی استفاده می‌کنیم. در قسمت ۳-۴، نشان می‌دهیم در تیری که تحت خمش خالص است مقاطع عرضی بصورت صفحه‌ای می‌مانند. در قسمت ۴-۴، فرمول‌های تنش قائم و شعاع انحنای عضوی را که در خمش خالص است به دست می‌آوریم.

در قسمت ۴-۶، تنش و تغییر شکل را در عضوهای مرکبی که از چند ماده ساخته شده‌اند، مانند تیرهای بتن آرمه که در ساختمان‌ها و پل‌ها به کار می‌روند، مطالعه می‌کنیم. در آنجا نحوه ترسیم مقطع تبدیل یافته را خواهید آموخت؛ مقطع تبدیل یافته عبارت است از مقطع عضو همگنی که تغییر شکل آن، تحت همان بارگذاری عضو مرکب، مانند تغییر شکل مرکب است. از مقطع تبدیل یافته برای تعیین تنش و تغییر شکل در عضو مرکب استفاده می‌شود. در قسمت ۴-۷، تمرکز تنش را که در تغییرات ناگهانی مقطع عرضی عضو به وجود می‌آید مطالعه می‌کنیم.

در قسمت ۴-۸، تغییر شکل پلاستیک را در خمش بررسی می‌کنیم؛ یعنی، تغییر شکل عضوهایی را که ماده سازنده آنها از قانون هوک پیروی نمی‌کنند. در قسمت ۹-۴ تنش و تغییر شکل در عضوهای الاستوپلاستیک را مطالعه می‌کنیم. با ماکزیمم لنگر* الاستیک M_p ، که متناظر با آغاز تسلیم است، شروع می‌کنیم و تأثیر افزایش لنگر را، تا وقتی به لنگر پلاستیک M_p می‌رسد، بررسی می‌کنیم. در قسمت ۴-۱۱، تغییر شکل دائمی و تنش‌های باقیمانده را که از این بارگذاری‌ها ناشی می‌شوند تعیین می‌کنیم. گفتنی است که در نیم قرن گذشته برای طرح‌های مطمئن و اقتصادی از خواص الاستوپلاستیکی فولاد خیلی استفاده شده است.

در قسمت ۴-۱۲، بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن را با استفاده از ترکیب تنش‌های ناشی از خمش خالص و بارگذاری محوری مرکزی تحلیل می‌کنیم.

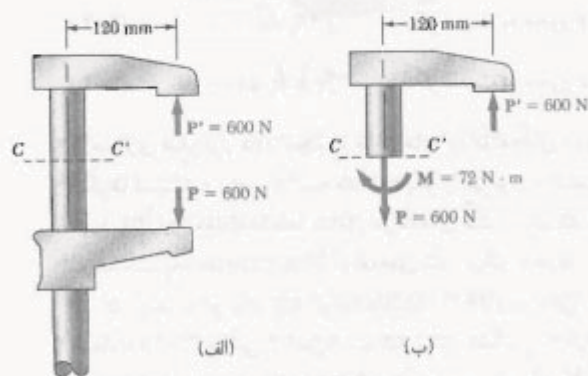
خمش نامتقارن، بارگذاری محوری خارج از مرکز و تنش در عضوهای خمیده را، به ترتیب، در قسمت‌های ۴-۱۳، ۴-۱۴ و ۴-۱۵ بررسی می‌کنیم.

۲-۴ عضو متقارن در خمش خالص

عضو منشوری AB را در نظر بگیرید. این عضو دارای صفحه تقارن است و تحت گویل‌های مساوی و متضاد M و M' ، که در

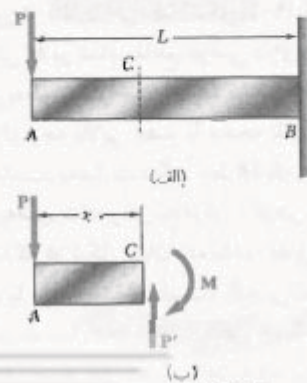
* به آن گشتاور نیز می‌گویند - مترجم.

نمودار، نیروهای داخلی در این مقطع با نیروی کششی محوری $P = 600 \text{ N}$ و کوپل $M = 72 \text{ N}\cdot\text{m}$ معادل‌اند. با استفاده از اطلاعات مربوط به تنش در بار مرکزی و تحلیل‌های آتی درباره تنش ناشی از خمش خالص، می‌توان توزیع تنش را در بار خارج از مرکز تعیین کرد. این موضوع در قسمت ۴-۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۵

مطالعه خمش خالص نقش مهمی در مطالعه تیرها ایفا می‌کند. مثلاً، تیر طره‌ای AB را که سر آزاد آن تحت بار متمرکز P قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۴-۶الف). با عبور یک مقطع از C در فاصله x از A و با استفاده از نمودار آزاد AC (شکل ۴-۶ب)، دیده می‌شود نیروهای داخلی در این مقطع متشکل است از نیروی P' ، که مساوی P و مخالف آن است، و کوپل M با مقدار $M = Px$. اگر تیر در خمش خالص باشد، توزیع تنش قائم را در این مقطع می‌توان به دست آورد. از طرف دیگر، تنش برشی در این مقطع بستگی به نیروی P دارد. در فصل ۶، توزیع این تنش در یک مقطع بررسی می‌شود.



شکل ۴-۶



نیروها در هر جهت صفر است. به علاوه، لنگر کوپل نسبت به هر محور عمود بر صفحه کوپل دارای مقدار یکسان است، و نسبت به تمام محورهای واقع در صفحه کوپل برابر با صفر است. محور z را به دلخواه و مانند شکل ۸-۴ انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (۱-۴) \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad (۲-۴) \quad \text{لنگر نسبت به محور } y$$

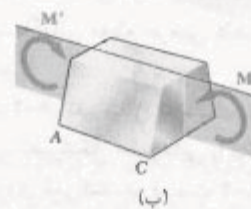
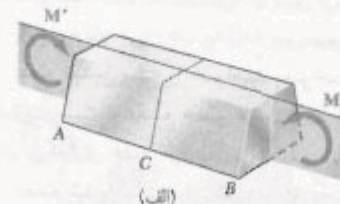
$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (۳-۴) \quad \text{لنگر نسبت به محور } z$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع مؤلفه‌های y ، مؤلفه‌های z ، و لنگرها نسبت به محور x ، سه معادله دیگر را می‌توان به دست آورد. اما، این معادله‌ها فقط شامل مؤلفه‌های تنش برشی‌اند و در قسمت بعد خواهیم دید که مؤلفه‌های تنش برشی صفرند. در اینجا به دو نکته باید توجه داشت: (۱) علامت منفی در معادله (۳-۴) ناشی از این است که تنش کششی ($\sigma_x > 0$) باعث می‌شود نیروی قائم $\sigma_x dA$ نسبت به محور z لنگر منفی (ساعتگرد) به وجود آورد. (۲) معادله (۲-۴) قابل پیش‌بینی بود، زیرا اعمال کوپل‌ها در صفحه تقارن عضو AB باعث ایجاد تنش‌های قائم، با توزیع متقارن نسبت به محور y ، می‌شود. گفتنی است که توزیع واقعی تنش در یک مقطع عرضی، یک مسئله نامعین استاتیکی است و با استفاده همزمان از هندسه تغییرشکل عضو حل می‌شود.

۳-۴ تغییرشکل عضو متقارن در خمش خالص

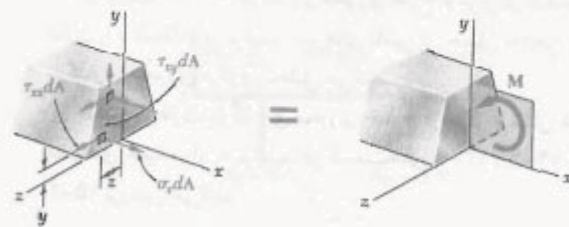
حال، تغییرشکل یک عضو منشوری را که دارای صفحه تقارن است و در دو انتها تحت کوپل‌های M و M' قرار دارد تحلیل می‌کنیم (این کوپل‌ها در صفحه تقارن عضو اثر می‌کنند). عضو تحت تأثیر کوپل‌ها خمیده می‌شود، اما نسبت به صفحه تقارن به صورت متقارن می‌ماند (شکل ۹-۴). به علاوه، چون لنگر خمشی M در تمام مقاطع عرضی دارای مقدار یکسان است، عضو به طور یکنواخت خمیده می‌شود. لذا، خط AB که فصل مشترک وجه بالایی عضو با صفحه تقارن است دارای انحنا ثابت است. به عبارت دیگر، خط AB که ابتدا به صورت مستقیم بود، به صورت دایره‌ای به مرکز C درمی‌آید؛ همین‌طور، خط $A'B'$ (که در شکل نشان داده نشده، فصل مشترک وجه پایینی عضو با صفحه تقارن است). گفتنی است که وقتی عضو به صورت نشان داده شده در شکل خمیده می‌شود، یعنی وقتی $M > 0$ ، خط AB کوتاه‌تر می‌شود، ولی خط $A'B'$ بلندتر می‌شود.

همان صفحه اثر می‌کنند، قرار دارد (شکل ۷-۴ الف). عضو AB را در نقطه اختیاری C مقطع می‌زنیم. تعادل قسمت AC نشان می‌دهد که نیروهای داخلی در این مقطع با کوپل M معادل‌اند (شکل ۷-۴ ب). لذا، نیروهای داخلی در هر یک از مقاطع عرضی عضو متقارنی که تحت خمش خالص است با یک کوپل معادل‌اند. لنگر M این کوپل را لنگر خمشی در مقطع می‌گویند. به عنوان قرارداد، اگر عضو مانند شکل ۷-۴ الف خم شده باشد، یعنی وقتی تقعر تیر به طرف بالا باشد، M دارای علامت مثبت است؛ در غیر این صورت، دارای علامت منفی است.



شکل ۷-۴

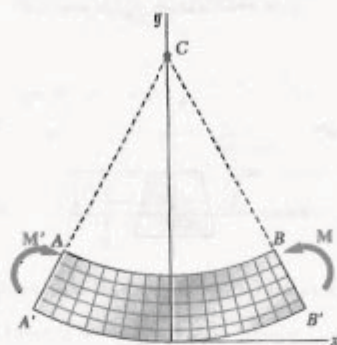
تنش قائم در نقطه معینی از مقطع عرضی را با σ_x و مؤلفه‌های تنش برشی را با τ_{xy} و τ_{yx} نشان می‌دهیم، و می‌گوییم سیستم نیروهای جزئی داخلی وارد بر این مقطع با کوپل M معادل‌اند (شکل ۸-۴).



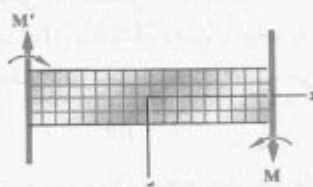
شکل ۸-۴

از استاتیک می‌دانیم که کوپل M از دو نیروی مساوی و متضاد تشکیل شده است. بنابراین، مجموع مؤلفه‌های این

فرض کنید عضو به تعداد زیادی اجزای کوچک مکعبی، که وجوه آنها به موازات صفحات مختصات است، تقسیم شود. طبق بحث بالا، این اجزا وقتی تحت کویل‌های M و M' قرار می‌گیرند، مانند شکل ۴-۱۱ جابه‌جا می‌شوند. چون تمام وجوه نشان داده شده در دو تصویر شکل ۴-۱۱ بر هم عمودند، نتیجه می‌شود $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$ ، لذا، $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ سه مؤلفه تنش σ_x ، σ_y و σ_z در سطح عضو صفر هستند. چون تغییر شکل موجود باعث بر هم کنش بین اجزای یک مقطع عرضی نمی‌شود، می‌توان گفت سه مؤلفه مذکور در تمام عضو صفر هستند. این فرض را آزمایش، و نیز نظریه الاستیسته، برای عضوهای باریکی که تغییر شکل‌های کوچک دارند تأیید می‌کند*. در نتیجه، فقط مؤلفه قائم σ_x بر هر یک از اجزای کوچک مکعبی اثر می‌کند. لذا، در هر نقطه از عضو باریکی که در خمش خالص است، حالت تنش تک‌محوری برقرار است. چون برای $M > 0$ ، خطوط AB و $A'B'$ به ترتیب، منبسط و منقبض می‌شوند، کرنش ϵ_x و تنش σ_x در قسمت بالایی عضو منفی‌اند (فشاری‌اند) و در قسمت پایین عضو مثبت‌اند (کششی‌اند).

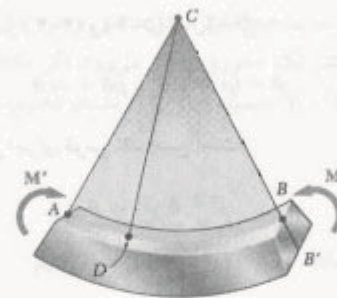


(الف) مقطع طولی و عمودی (صفحه تقارن)



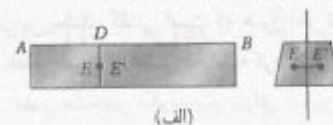
(ب) مقطع طولی و افقی

شکل ۴-۱۱

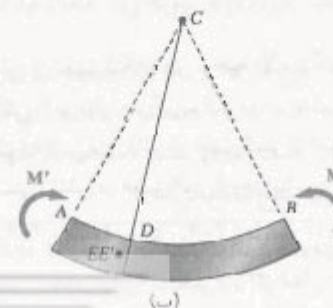


شکل ۴-۹

حال، نشان می‌دهیم که مقاطع عرضی عمود بر محور عضو به صورت صفحه‌ای می‌مانند و صفحه آنها از نقطه C می‌گذرد. اگر چنین نباشد، نقطه‌ای مانند E از مقطع عرضی گذرا از D را می‌توان یافت (شکل ۴-۱۰ الف) که، پس از خمیده شدن عضو، در صفحه CD قرار نداشته باشد (شکل ۴-۱۰ ب). اما، به علت تقارن عضو، نقطه دیگری مانند E' وجود دارد که دقیقاً مانند E جابه‌جا می‌شود. فرض می‌کنیم، پس از خمیده شدن عضو، هر دو نقطه در سمت چپ صفحه CD قرار دارند (شکل ۴-۱۰ ب). چون لنگر خمشی M در تمام عضو دارای مقدار یکسان است، در هر مقطع عرضی دیگر نیز حالت بالا برقرار است و نقاط متناظر با E و E' نیز به سمت چپ حرکت می‌کنند. لذا، ناظر A نتیجه می‌گیرد که بارگذاری باعث می‌شود نقاط E و E' در مقاطع عرضی مختلف به طرف جلو (به سوی ناظر) حرکت کنند. اما ناظر B به نتیجه مخالف می‌رسد. در نتیجه، E و E' در صفحه CD قرار دارند و مقطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌ماند و از C می‌گذرد. گفتنی است که بحث بالا مانع امکان تغییر شکل در داخل صفحه مقطع نمی‌شود (به قسمت ۵-۲ نگاه کنید).



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۰

* به مسئله ۴-۳۸ نگاه کنید.

با جایگذاری از (۴-۴) و (۵-۴) در (۶-۴).

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \quad (7-4)$$

کرنش طولی اجزای قوس JK چنین است:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

یا

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (8-4)$$

علامت منفی ناشی از این است که لنگر خمشی را مثبت گرفتیم؛ در نتیجه، عضو به طرف بالا تفرع دارد.

چون مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، در تمام صفحاتی که به موازات صفحه تقارن اند، تغییر شکل‌های همسان روی می‌دهد. لذا، مقدار کرنش در معادله (۸-۴) همه‌جا صحت دارد، و نتیجه می‌شود کرنش قائم طولی ϵ_x بر حسب فاصله از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند.

کرنش ϵ_x در y ماکزیمم به بیشترین مقدار خود می‌رسد. اگر ماکزیمم فاصله از سطح خنثی را (که متناظر با سطح بالایی یا پایینی عضو است) با c ، و ماکزیمم قدر مطلق کرنش را با ϵ_m نشان دهیم،

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (9-4)$$

با حل ρ از معادله (۹-۴) و جایگذاری آن در (۸-۴)،

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (10-4)$$

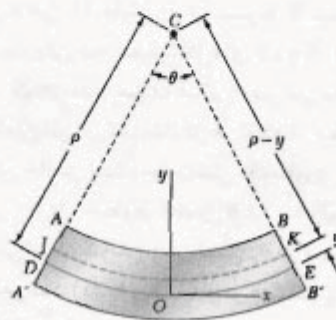
در پایان این بحث، گفتنی است که هنوز نمی‌توان کرنش یا تنش را در نقطه معینی از عضو محاسبه کرد، زیرا مکان سطح خنثی را در عضو مشخص نکرده‌ایم. برای تعیین مکان این سطح، ابتدا باید رابطه تنش-کرنش ماده مورد استفاده را باشد*.

۴-۴ تنش و تغییر شکل در ناحیه الاستیک

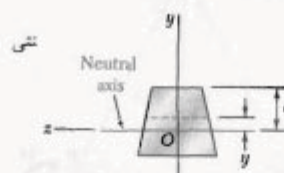
اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن لنگر خمشی M طوری است که تنش‌های قائم در عضو کمتر از استقامت تسلیم σ_y است؛ یعنی، تنش در عضو کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از

* گفتنی است که اگر عضو دارای صفحات تقارن عمودی و افقی باشد (مانند عضو با مقطع عرضی مستطیلی)، و اگر منحنی تنش-کرنش در کشش و فشار یکسان باشد، سطح خنثی بر صفحه تقارن منطبق خواهد بود (به قسمت ۸-۴ نگاه کنید).

از بحث بالا نتیجه می‌شود که باید یک سطح به موازات وجوه بالایی و پایینی عضو وجود داشته باشد، که در آن σ_x و ϵ_x صفرند. این را سطح خنثی می‌گویند. سطح خنثی صفحه تقارن را در امتداد قوس دایره‌ای DE (شکل ۱۲-۴ الف)، و مقطع عرضی را در امتداد یک خط مستقیم به نام محور خنثی قطع می‌کند (شکل ۱۲-۴ ب). حال، مبدأ مختصات را روی سطح خنثی می‌گیریم (نه روی وجه پایینی عضو که قبلاً انتخاب کردیم) و فاصله هر نقطه را تا سطح خنثی با y نشان می‌دهیم.



الف) مقطع طولی و عمودی (صفحه تقارن)



ب) مقطع عرضی

شکل ۱۲-۴

اگر شعاع قوس DE (شکل ۱۲-۴ الف) را با ρ ، و زاویه مرکزی متناظر با DE را با θ نشان دهیم، با توجه به اینکه طول DE با طول L عضو تغییر شکل نداده برابر است، می‌نویسیم:

$$L = \rho\theta \quad (4-4)$$

چون قوس JK در فاصله y بالای سطح خنثی قرار دارد، طول آن چنین است:

$$L' = (\rho - y)\theta \quad (5-4)$$

چون طول اولیه قوس JK مساوی L است، تغییر شکل JK عبارت است از:

$$\delta = L' - L \quad (6-4)$$

طبق این معادله، محور $=$ بر محور خنثی مقطع عرضی منطبق است. با توجه به این مطلب، σ_x را از معادله (۱۲-۴) در (۳-۴) جایگذاری می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M \quad \text{در نتیجه،}$$

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \quad (۱۴-۴)$$

اما در حالت خمش خالص، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی می‌گذرد. در نتیجه، I ممان اینرسی (ممان دوم) مقطع عرضی نسبت به محور مرکزی عمود بر صفحه کوپل M است. با حل σ_m از معادله (۱۴-۴)، می‌نویسیم^{**}:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۱۵-۴)$$

با جایگذاری σ_m از (۱۵-۴) در (۱۲-۴)، تنش قائم σ_x را در فاصله y از محور خنثی به دست می‌آوریم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (۱۶-۴)$$

معادله‌های (۱۵-۴) و (۱۶-۴) را فرمول‌های خمش الاستیک، و تنش قائم σ_x ناشی از خمش عضو را تنش خمشی می‌گویند. این تنش در بالای محور خنثی ($y > 0$) فشاری است ($\sigma_x < 0$) هرگاه لنگر خمشی M مثبت باشد، و کششی است ($\sigma_x > 0$) هرگاه M منفی باشد.

با توجه به معادله (۱۵-۴)، نسبت I/c فقط به شکل هندسی مقطع عرضی بستگی دارد. این نسبت را مدول الاستیک می‌گویند و با S نشان می‌دهند:

$$\text{مدول الاستیک} = S = \frac{I}{c} \quad (۱۷-۴)$$

با جایگذاری S برای I/c در معادله (۱۵-۴)، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (۱۸-۴)$$

* به پوست الفه درپاره ممان‌های سطح مراجعه کنید.

** به خاطر داریم که لنگر خمشی را مثبت گرفتیم. اگر لنگر خمشی منفی باشد، به جای M در معادله (۱۵-۴) از قدر مطلق آن، $|M|$ ، استفاده می‌کنیم.

حد الاستیک است. هیچ تغییر شکل دائمی وجود ندارد و قانون هوک برای تنش تک محوری به کار می‌رود. اگر ماده را همگن بگیریم و مدول الاستیسیته آن را با E نشان دهیم، در جهت طولی x ،

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (۱۱-۴)$$

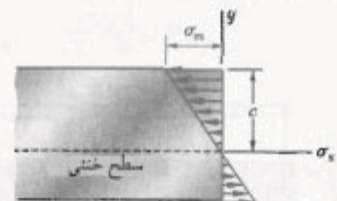
طرفین معادله (۱۰-۴) را در E ضرب می‌کنیم:

$$E \epsilon_x = -\frac{y}{c} (E \epsilon_m)$$

با استفاده از معادله (۱۱-۴)،

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (۱۲-۴)$$

که در آن σ_m ماکزیمم مقدار مطلق تنش را نشان می‌دهد. یعنی، در ناحیه الاستیک، تنش قائم برحسب فاصله از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۱۲-۴).



شکل ۱۲-۴

هنوز مکان سطح خنثی و مقدار ماکزیمم تنش (σ_m) را نمی‌دانیم. هر دو را از رابطه‌های (۱-۴) و (۳-۴) می‌توان محاسبه کرد. با جایگذاری σ_x از (۱۲-۴) در (۱-۴)،

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0 \quad \text{در نتیجه،}$$

$$\int y dA = 0 \quad (۱۳-۴)$$

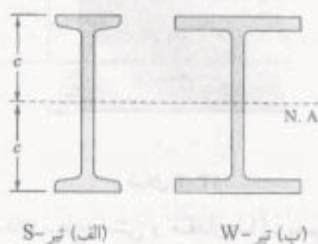
این معادله نشان می‌دهد که ممان اول مقطع عرضی نسبت به محور خنثی آن صفر است^{*}. به عبارت دیگر، برای عضوی که در خمش خالص است، تا وقتی تنش در ناحیه الاستیک است، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

حال، به سراغ معادله (۳-۴)، که در قسمت ۲-۴ نسبت به محور افقی اختیاری z به دست آمد، می‌رویم:

$$\int (-y) \sigma_x dA = M \quad (۳-۴)$$



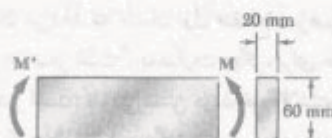
شکل ۱۵-۴ تیرهای فولادی بال پهن، قلاب اغلب ساختمان‌ها را تشکیل می‌دهد.



شکل ۱۶-۴

مثال ۱-۴

میله فولادی، با مقطع عرضی مستطیلی $20 \times 60 \text{ mm}$ ، تحت دو کوپل مساوی و متضاد است. این کوپل‌ها در صفحه تقارن عمودی میله اثر می‌کنند (شکل ۱۷-۴). مقدار لنگر خمشی M را که باعث تسلیم می‌شود بیابید. فرض کنید $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$.



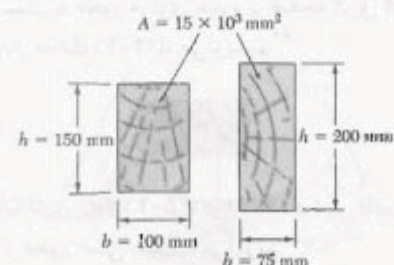
شکل ۱۷-۴

* البته، مقادیر بزرگ نسبت h/b ممکن است به ناپایداری جانبی تیر بیانجامد.

چون تنش ماکزیمم σ_m با مدول الاستیک S به‌طور معکوس متناسب است، واضح است که تیرها را باید تا حد امکان با مقدار S بزرگ طراحی کرد. مثلاً، در یک تیر چوبی با مقطع عرضی مستطیلی به عرض b و ارتفاع h ،

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \quad (19-4)$$

که در آن، A مساحت مقطع عرضی تیر است. طبق این رابطه، از میان دو تیر با مساحت مقطع عرضی یکسان (شکل ۱۴-۴)، تیر با عمق بزرگتر دارای مدول بزرگتر است و مقاومت بیشتری در برابر خمش دارد*.



شکل ۱۴-۴

برای فولاد ساختمانی*، تیرهای استاندارد آمریکایی و تیرهای بال پهن (شکل ۱۵-۴) بر سایر تیرها ترجیح دارند زیرا قسمت بزرگی از مقطع عرضی آنها در فاصله دور از محور خنثی قرار دارد (شکل ۱۶-۴). لذا، برای یک مساحت مقطع و ارتفاع معین، تیرهای مذکور دارای I و S بزرگ هستند. مدول الاستیک تیرهای رایج را از جدول خواص هندسی آنها می‌توان به‌دست آورد. برای تعیین تنش ماکزیمم σ_m در مقطع معینی از یک تیر استاندارد، فقط باید مقدار مدول الاستیک S را از جدول تعیین، و لنگر خمشی M در مقطع را بر تقسیم کرد.

تغییر شکل عضو بر اثر لنگر خمشی M با انحنا یا سطح خنثی اندازه‌گیری می‌شود. این انحنا با معکوس شعاع انحنا، $1/\rho$ ، تعریف می‌شود. از معادله (۹-۴)،

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \quad (20-4)$$

در ناحیه الاستیک، $\epsilon_m = \sigma_m / E$. با جایگذاری در (۲۰-۴) و با توجه به (۱۵-۴)،

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}$$

یا

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (21-4)$$

REB

محور خنثی از مرکزوار C می‌گذرد (شکل ۲۰-۴) و فاصله دورترین نقطه مقطع عرضی تا محور خنثی چنین است:

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 51.93 \text{ mm} = 61.93 \text{ mm}$$

با استفاده از معادله (۹-۴)،

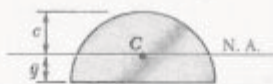
$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{61.93 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.15 \text{ m}} = 2.879 \times 10^{-3}$$

با استفاده از قانون هوک،

$$\sigma_m = E \epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2.879 \times 10^{-3}) = 193.4 \text{ MPa}$$

چون این طرف میله به طرف خارج مرکز انحنا خمیده می‌شود، تنش حاصل از نوع کششی است. ماکزیم تنش فشاری روی وجه تخت میله به وجود می‌آید. چون تنش با فاصله از محور خنثی متناسب است، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{فشاری}} &= -\frac{\bar{y}}{c} \sigma_m = -\frac{51.93 \text{ mm}}{61.93 \text{ mm}} (193.4 \text{ MPa}) \\ &= -159.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$



شکل ۲۰-۴

۵-۴ تغییر شکل در مقطع عرضی

در قسمت ۳-۴، هنگام اثبات این موضوع که مقطع عرضی در عضوی که تحت خمش خالص است به صورت صفحه‌ای می‌ماند، در زیرنویس به امکان تغییر شکل در صفحه مقطع اشاره کردیم. طبق قسمت ۱۱-۲، اجزا در حالت تنش تک محوری هستند ($\sigma_x \neq 0$ و $\sigma_y = \sigma_z = 0$) و در جهت‌های x ، y و z تغییر شکل می‌دهند. بنابراین، تغییر شکل در صفحه مقطع وجود دارد. کرنش‌های قائم ϵ_y و ϵ_z به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

(ν نسبت پواسون عضو است). با توجه به معادله (۸-۴)،

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \quad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \quad (22-4)$$

رابطه‌هایی را که تا به حال به دست آورده‌ایم نشان می‌دهند اجزایی که بالای سطح خنثی هستند ($y > 0$) در امتدادهای y و z

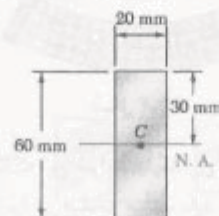
چون محور خنثی از مرکزوار مقطع عرضی (نقطه C) می‌گذرد، $c = 30 \text{ mm}$ (شکل ۱۸-۴). از طرف دیگر، ممان اینرسی مقطع عرضی مستطیلی نسبت به محور مرکزی چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (20 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3 = 360 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

با حل M از معادله (۱۵-۴) و با جایگذاری داده‌های بالا،

$$M = \frac{I}{c} \sigma_m = \frac{360 \times 10^3 \text{ mm}^4}{61.93 \text{ mm}} (254 \text{ MPa})$$

$$M = 3 \text{ kN.m}$$



شکل ۱۸-۴

مثال ۲-۴

میله آلومینیومی با مقطع عرضی نیم‌دایره‌ای به شعاع $r = 12 \text{ mm}$ (شکل ۱۹-۴) به صورت قوس دایره‌ای با شعاع متوسط $\rho = 2.15 \text{ m}$ خم شده است. اگر وجه تخت میله به طرف مرکزی انحنا قوس خمیده باشد، ماکزیم تنش کششی و فشاری را در میله بیابید. $E = 70 \text{ GPa}$.



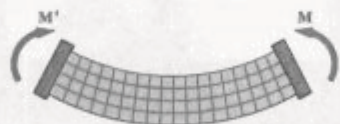
شکل ۱۹-۴

با استفاده از معادله ۲۱-۴ می‌توان لنگر خمشی M متناظر با شعاع انحنای ρ را تعیین، و سپس σ_m از معادله (۱۵-۴) استفاده کرد. ولی، بهتر است ϵ_m از معادله (۹-۴) تعیین کنیم و با استفاده از قانون هوک، σ_m را بیابیم.

مختصه $\bar{y}$ مرکزوار مقطع عرضی نیم دایره چنین است:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 51.93 \text{ mm}$$

هنگام بررسی تغییرشکل عضو متقارن در خمش خالص، نحوه اعمال کوپل‌های M و M' را بر عضو در نظر نگرفتیم. اگر بخواهیم تمام مقاطع عرضی عضو، از یک انتها تا انتهای دیگر، به صورت صفحه‌ای همانند و فاقد تنش برشی باشند، باید کوپل‌ها طوری وارد شوند که دو انتهای عضو به صورت صفحه‌ای همانند و فاقد تنش‌های برشی باشند. به این دلیل، برای اعمال کوپل‌های M و M' از صفحات صلب و هموار استفاده می‌شود (شکل ۴-۲۲). نیروهای جزئی که از این صفحات بر عضو وارد می‌شوند بر مقاطع انتهایی عمودند، و این مقاطع می‌توانند تغییرشکل دهنه ولی به صورت صفحه‌ای می‌مانند.

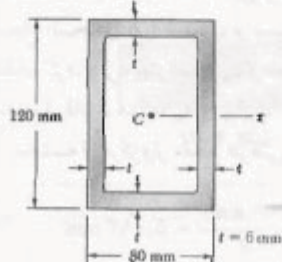


شکل ۴-۲۲

گفتنی است که این شرایط بارگذاری را در عمل نمی‌توان به دست آورد، زیرا هر صفحه صلب باید نیروهای کششی را در زیر محور خشی بر مقطع انتهایی وارد کند و این مقطع در صفحه خود تغییرشکل ندهد. ولی، این موضوع از اهمیت مدل صفحات صلب نمی‌کاهد، و با همین مدل بود که در قسمت‌های قبل توانستیم شرایط بارگذاری متناظر با رابطه‌های حاصل را تجسم دهیم. گرچه شرایط بارگذاری واقعی ممکن است با این مدل ایده‌آلی خیلی متفاوت باشد، ولی تا وقتی مقطع تحت بررسی خیلی نزدیک به مکان اعمال کوپل‌ها نباشد، با توجه به اصل سنت-وینانت و فرمول‌های قسمت‌های قبل می‌توان تنش‌ها را در شرایط عملی محاسبه کرد.

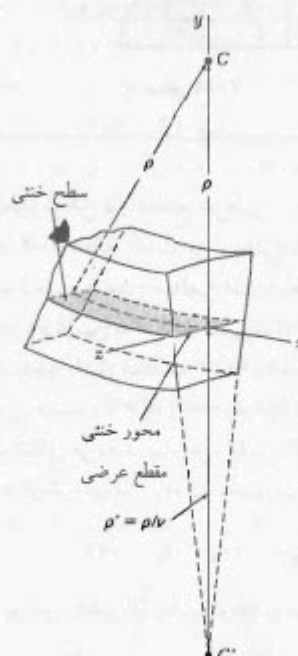
مسئله نمونه ۴-۱

لوله مستطیلی نشان داده شده از آلایاز آلومینیوم ساخته شده است. با صرف‌نظر از تأثیر گردها، مطلوب است: (الف) لنگر خمشی M برای ضریب اطمینان ۳، (ب) شعاع انحنای لوله.

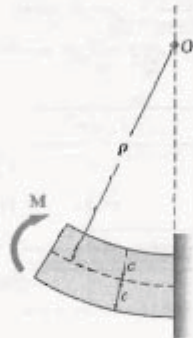


منبسط می‌شوند و اجزایی که پایین سطح خشی هستند ($y < 0$) منقبض می‌شوند. در یک عضو با مقطع عرضی مستطیلی، انبساط و انقباض اجزای مختلف در جهت عمودی یکدیگر را خشی می‌کنند، و مقطع عرضی در امتداد عمودی تغییراندازه نمی‌دهد. البته، هنگام بررسی تغییرشکل‌ها در امتداد عرضی افقی z ، انبساط اجزایی که بالای سطح خشی هستند و انقباض اجزایی که پایین سطح خشی هستند باعث می‌شوند خطوط مختلف افقی در مقطع عرضی به صورت قوس‌های دایره‌ای درآیند (شکل ۴-۲۱). حالتی که در اینجا بررسی کردیم شبیه حالتی است که قبلاً در مقطع طولی دیده شد. با مقایسه معادله دوم (۴-۲۲) با معادله (۴-۸)، نتیجه می‌شود که محور خشی مقطع عرضی به صورت قوس دایره‌ای با شعاع $\rho' = \rho / \nu$ درمی‌آید. با فرض $M > 0$ ، مرکز C' این قوس در زیر سطح خشی قرار دارد؛ یعنی، روی وجه مقابل مرکز انحنای عضو (نقطه C) واقع است. معکوس شعاع انحنای ρ' ، انحنای مقطع عرضی را نشان می‌دهد و آن را انحنای غیرالاستیک می‌گویند:

$$\text{انحنای غیرالاستیک} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \quad (۴-۲۳)$$



شکل ۴-۲۱



راه حل دیگر. چون ماکزیمم تنش عبارت است از $\sigma_{all} = 138 \text{ MPa}$ ماکزیمم کرنش ϵ_m را از معادله (۴-۹) می یابیم:

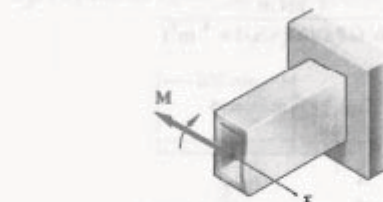
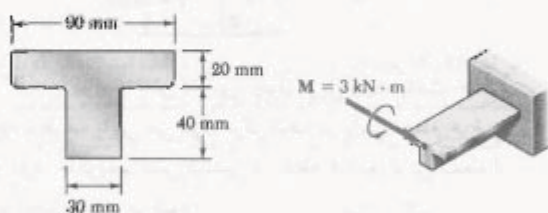
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{all}}{E} = \frac{138 \text{ MPa}}{73 \text{ GPa}} = 1.89 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_m \approx \frac{c}{\rho} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{60 \text{ mm}}{1.89 \times 10^{-3}}$$

$$\rho = 31.7 \text{ m} \quad \rho = 31.7 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله نمونه ۴-۲

قطعه مکانیکی چدنی تحت گویل 3 kN.m قرار دارد. اگر $E = 165 \text{ GPa}$ ، با صرف نظر از تأثیر گرده ها، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش های کششی و فشاری در قطعه، (ب) شعاع انحنای قطعه.

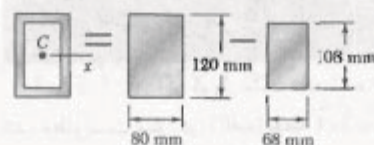


حل

ممان اینرسی. ممان اینرسی مساحت مقطع عرضی لوله چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (80 \text{ mm})(120 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12} (68 \text{ mm})(108 \text{ mm})^3$$

$$I = 4.38 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



تنش مجاز. برای ضریب اطمینان ۳ و تنش نهایی 415 MPa

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{415 \text{ MPa}}{3} = 138 \text{ MPa}$$

چون $\sigma_{all} < \sigma_Y$ ، لوله در ناحیه الاستیک است و از نتایج قسمت ۴-۴ می توان استفاده کرد.

الف. لنگر خمشی. با $c = \frac{1}{2}(120 \text{ mm}) = 60 \text{ mm}$ می نویسیم:

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I}$$

$$M = \frac{I}{c} \sigma_{all} = \frac{4.38 \times 10^6 \text{ mm}^4}{60 \text{ mm}} (138 \text{ MPa})$$

$$M = 10.1 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

ب. شعاع انحنای.

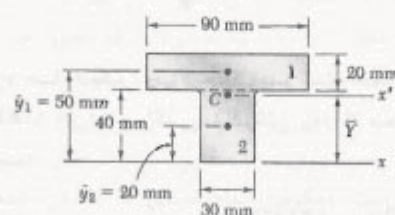
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{10.1 \text{ kN.m}}{(73 \text{ GPa})(4.38 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 0.316 \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 31.7 \text{ m} \quad \rho = 31.7 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

حل

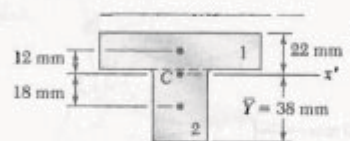
مرکز سطح. مقطع عرضی T شکل قطعه را به دو مستطیل نشان داده شده تقسیم می‌کنیم و می‌نویسیم:

مساحت، mm^2	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm^3	
۱ $(20)(90) = 1800$	۵۰	90×10^3	$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y}A$
۲ $(40)(30) = 1200$	۲۰	24×10^3	$\bar{Y}(2000) = 114 \times 10^3$
$\sum A = 3000$		$\sum \bar{y}A = 114 \times 10^3$	$\bar{Y} = 38 \text{ mm}$



ممان اینرسی مرکزی* از قضیه محوروهای موازی برای تعیین ممان اینرسی مرکب می‌گذرد، استفاده می‌کنیم و سپس آنها را جمع می‌زنیم:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum (\bar{I} + Ad^2) = \sum \left(\frac{1}{12} bh^3 + Ad^2 \right) \\
 &= \frac{1}{12} (90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \frac{1}{12} (30)(40)^3 \\
 &\quad + (30 \times 40)(18)^2 \\
 &= 1868 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad I = 1868 \times 10^{-9} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$



الف. ماکزیمم تنش کششی. چون کوپل وارده باعث خمش قطعه به طرف پایین می‌شود، مرکز انحنا در پایین مقطع عرضی قرار دارد. ماکزیمم تنش کششی در نقطه A (دورترین نقطه از مرکز انحنا) ایجاد می‌شود:

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN.m})(0.0722 \text{ m})}{1868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \Rightarrow \sigma_A = +76.1 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

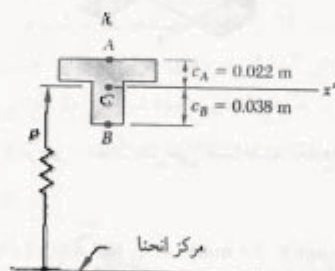
ماکزیمم تنش فشاری. این تنش در نقطه B روی می‌دهد:

$$\sigma_B = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(3 \text{ kN.m})(0.0738 \text{ m})}{1868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \Rightarrow \sigma_B = -121.3 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

ب. شعاع انحنا. از معادله (۴-۲۱).

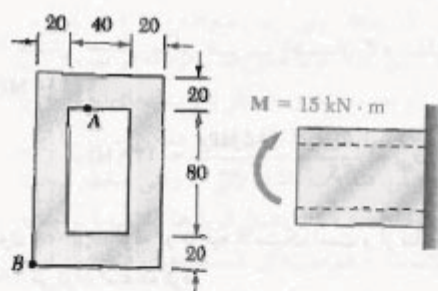
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN.m}}{(160 \text{ GPa})(1868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$

$$= 20.95 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \Rightarrow$$

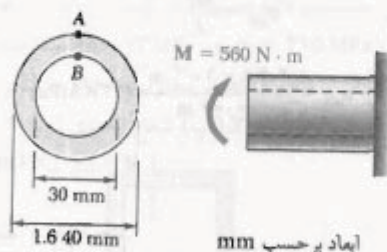


مسائل

۱-۴ و ۲-۴ اگر کوپل نشان داده شده در صفحه قائم اثر کند، مطلوبست تنش در: (الف) نقطه A، (ب) نقطه B.

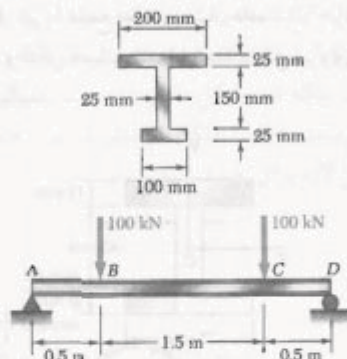


شکل م ۱-۴

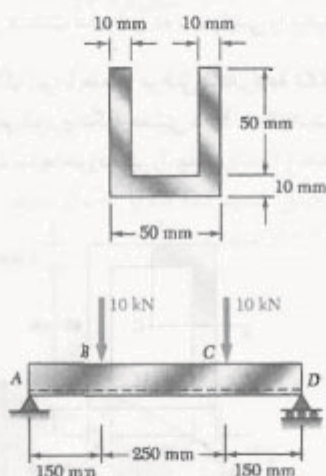


شکل م ۲-۴

* ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح مترجم.

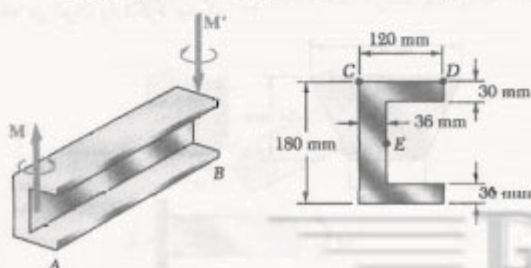


شکل م ۸-۴



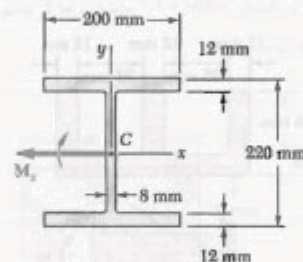
شکل م ۹-۴

۴-۱۰ دو کوپل مساوی و متضاد با مقدار $M = ۲۵ \text{ kN.m}$ بر تیر AB ، که به شکل ناورانی است، وارد شده است. اگر کوپل‌ها باعث شوند تیر در صفحه افقی خم شود، مطلوب است: (الف) تنش در نقطه C ، (ب) تنش در نقطه D ، (ج) تنش در نقطه E .



شکل م ۱۰-۴

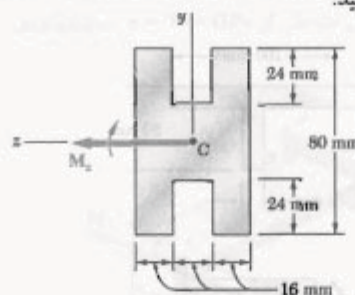
۴-۳ با استفاده از تنش مجاز ۱۵۵ MPa ، ماکزیمم لنگر خمشی M را که می‌توان بر تیر بال پهن نشان داده شده وارد کرد بیابید. از تأثیر کردها صرف‌نظر کنید.



شکل م ۳-۴

۴-۴ مسئله ۳-۴ را با این فرض حل کنید که تیر بال پهن تحت کوپل M_y حول محور y خم شود.

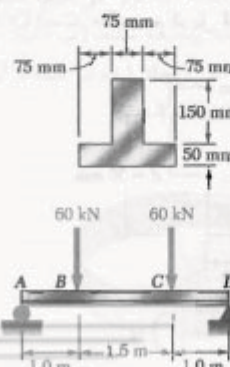
۴-۵ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده، از آلومینیوم ساخته شده است. $\sigma_U = ۴۵۰ \text{ MPa}$ و $\sigma_T = ۲۵۰ \text{ MPa}$. برای ضریب اطمینان $۳٫۰۰$ ، ماکزیمم کوپلی را که می‌توان حول محور z وارد کرد بیابید.



شکل م ۵-۴

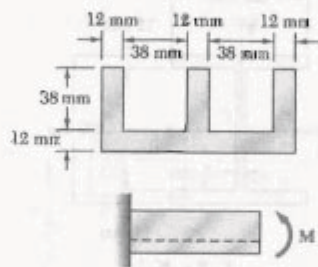
۴-۶ مسئله ۵-۴ را برای خمش حول محور y حل کنید.

۴-۷ تا ۴-۹ دو نیروی عمودی بر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده‌اند. ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری را در قسمت BC تیر بیابید.



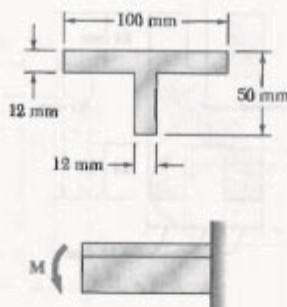
شکل م ۷-۴

۱۶-۴ اگر برای تیر اکستروود نشان داده شده، تنش مجاز در کشش 84 MPa و در فشار 110 MPa باشد، ماکزیمم کوپل M را که می توان وارد کرد بیابید.



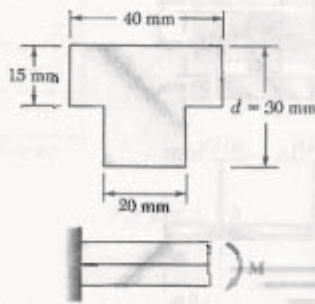
شکل م-۱۶-۴

۱۷-۴ برای تنش های مجاز زیر، ماکزیمم کوپل M را که می توان بر سطحه نشان داده شده وارد کرد بیابید:
 $\sigma_{all} = -100 \text{ MPa}$, $\sigma_{all} = +42 \text{ MPa}$



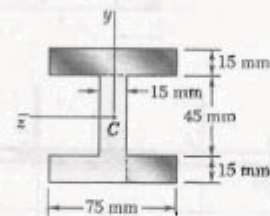
شکل م-۱۷-۴

۱۸-۴ تیر نشان داده شده از نایلون ساخته شده است. برای نایلون به کار رفته، تنش مجاز در کشش 24 MPa و در فشار 30 MPa است. ماکزیمم کوپل M را که می توان بر تیر وارد کرد بیابید.



شکل م-۱۸-۴

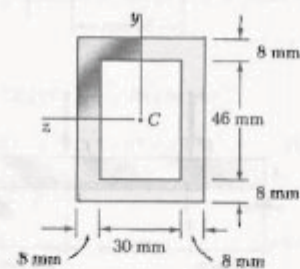
۱۱-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول محور افقی خم شود و لنگر خمشی 8 kN.m باشد، کل نیروی وارد بر بال فوقانی را بیابید.



شکل م-۱۱-۴ و م-۱۲-۴

۱۲-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول یک محور عمودی خم شود و لنگر خمشی 4 kN.m باشد، کل نیروی وارد بر قسمت سایه خورده بال پایینی را بیابید.

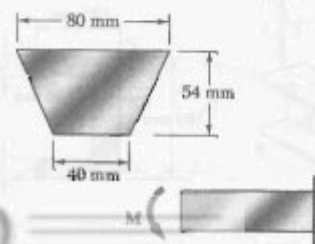
۱۳-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول یک محور افقی خم شود و لنگر خمشی 900 N.m باشد، کل نیروی وارد بر قسمت سایه خورده تیر را بیابید.



شکل م-۱۳-۴

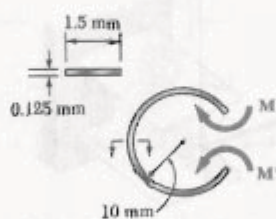
۱۴-۴ مسئله ۱۳-۴ را با این فرض حل کنید که تیر حول یک محور عمودی خم شود و لنگر خمشی 900 N.m باشد.

۱۵-۴ اگر برای تیر اکستروود نشان داده شده، تنش مجاز در کشش 120 MPa و در فشار 150 MPa باشد، ماکزیمم کوپل M را که می توان وارد کرد بیابید.



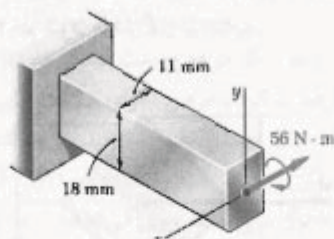
شکل م-۱۵-۴

۲۳-۴ دیده می شود که نوار نازک فولادی به عرض 1.5 mm را می توان به صورت دایره ای به قطر 10 mm خم کرد بدون اینکه تغییر شکل دائمی به وجود آید. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش در نوار خمیده، (ب) مقدار کوپل لازم برای خمیده کردن نوار.



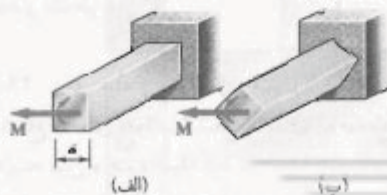
شکل م-۲۳-۴

۲۴-۴ کوپل 65 N.m بر میله فولادی نشان داده شده وارد شده است. (الف) اگر کوپل حول محور z وارد شود، ماکزیمم تنش و شعاع انحنای میله را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که کوپل حول محور y وارد شود. از $E = 200 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



شکل م-۲۴-۴

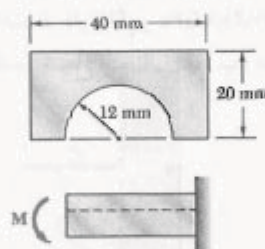
۲۵-۴ کوپل با مقدار M بر میله چهارگوشی به ضلع a وارد شده است. برای هر یک از وضعیت های نشان داده شده، ماکزیمم تنش و شعاع انحنای میله را بیابید.



شکل م-۲۵-۴

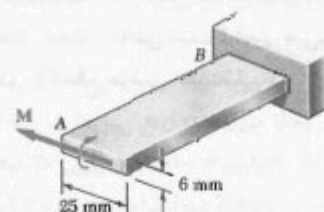
۱۹-۴ مسئله ۱۸-۴ را با فرض $d = 40 \text{ mm}$ حل کنید.

۲۰-۴ اگر برای تیر نشان داده شده، تنش مجاز در کشش 84 MPa و در فشار 110 MPa باشد، ماکزیمم کوپل M را که می توان وارد کرد بیابید.



شکل م-۲۰-۴

۲۱-۴ اگر $\sigma_{all} = 165 \text{ MPa}$ برای نوار فولادی AB برابر با 165 MPa باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم کوپل M را که می توان وارد کرد، (ب) شعاع انحنای متناظر. از $E = 200 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



شکل م-۲۱-۴

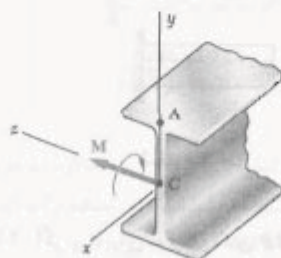
۲۲-۴ میله های راست به قطر 6 mm و به طول 3 m و داخل فلکه ای با قطر داخلی $1/25 \text{ m}$ قرار می دهیم. مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش در میله پیچیده شده، (ب) لنگر خمشی متناظر در میله. فرض کنید تنش ایجاد شده در میله از استقامت تسلیم آن بیشتر نمی شود. $E = 200 \text{ GPa}$.



شکل م-۲۲-۴

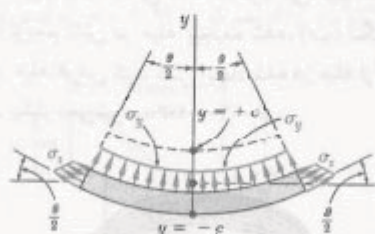
۳-۴ برای میله آلومینیومی و بارگذاری مسئله نمونه ۱-۴، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای ρ' مقطع عرضی، (ب) زاویه بین وجوه میله که در ابتدا عمودی بودند، از $E = 73 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.33$ استفاده کنید.

۳۱-۴ تیر فولادی نورد شده $W 200 \times 31.3$ تحت کوپل $M = 45 \text{ kN.m}$ قرار دارد. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.29$ ، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای ρ ، (ب) شعاع انحنای ρ' مقطع عرضی.



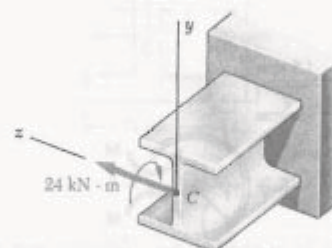
شکل م ۳۱-۴

۳۲-۴ در قسمت ۳-۴ فرض شد که تنش‌های قائم σ_x در عضوی که تحت خمش خالص است ناچیز می‌باشند. برای عضو الاستیکی با مقطع عرضی مستطیلی که ابتدا مستقیم است، (الف) عبارت تقریبی σ_x را به صورت تابعی از y بیابید، (ب) نشان دهید که $(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma/2\rho)(\sigma_x)_{\max}$. لذا، نشان دهید که σ_x را در موارد عملی می‌توان ناچیز گرفت. (راهنمایی: نمودار آزاد قسمتی از تیر را که زیر سطح با مختصه y است در نظر بگیرید و فرض کنید که توزیع تنش σ_x به صورت خطی است).



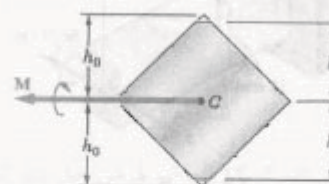
شکل م ۳۲-۴

۲۶-۴ کوپل 24 kN.m بر تیر فولادی نورد شده $W 200 \times 46.1$ وارد شده است. (الف) اگر کوپل حول محور z وارد شود، تنش ماکزیمم و شعاع انحنای تیر را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که کوپل حول محور y وارد شود. از $E = 200 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



شکل م ۲۶-۴

۲۷-۴ میله چهارگوشی فرزندکاری شده است و مقطع آن به صورت نشان داده شده درآمده است. سپس، این میله تحت کوپل M قرار می‌گیرد و حول قطر افقی‌اش خم می‌شود. با در نظر گرفتن حالت $h = 0.9 h_0$ ، ماکزیمم تنش در میله را به صورت $\sigma_m = k \sigma_0$ بیان کنید، که در آن σ_0 ماکزیمم تنش ایجاد شده در صورتی است که میله چهارگوش اولیه تحت همان کوپل M خم شود. مقدار k را نیز بیابید.



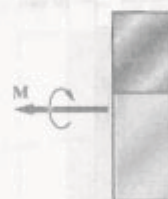
شکل م ۲۷-۴

۲۸-۴ در مسئله ۳۲-۴، مطلوبست: (الف) مقدار h که به‌ازای آن تنش ماکزیمم σ_m تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر k .

۲۹-۴ برای میله و بارگذاری مثال ۱-۴، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای ρ ، (ب) شعاع انحنای ρ' مقطع عرضی، (ج) زاویه بین وجوه میله که در ابتدا عمودی بودند، از $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.29$ استفاده کنید.

۴-۶ خمش عضوهایی که از مواد مختلف ساخته شده‌اند

روابط قسمت ۴-۴ بر مبنای این فرض بود که عضو از یک ماده همگن با مدول الاستیسیته معلوم E ساخته شده است. اگر عضو در خمش خالص باشد و از دو یا چند ماده با مدول‌های الاستیسیته مختلف ساخته شده باشد، برای تعیین تنش در آن باید از روش دیگر استفاده کرد.



شکل ۴-۲۳

فرض کنید میله‌ی زرد و قسمت با مواد مختلف ساخته شده است و مقطع عرضی این دو قسمت، مطابق شکل ۴-۲۳، به هم متصل شده‌اند. این میله مرکب به صورتی که در قسمت ۴-۳ گفته شد تغییر شکل می‌دهد؛ یعنی، مقطع عرضی آن در تمام طول آن یکسان می‌ماند. ضمناً، در قسمت ۴-۳ هیچ فرضی درباره رابطه تنش کرنش ماده یا مواد در نظر گرفته نشد. لذا، کرنش قائم ϵ_x برحسب فاصله y از محور خنثی مقطع به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۴-۲۴ الف و ب)، و فرمول (۴-۸) به کار می‌رود:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (۴-۸)$$

البته، نمی‌توان فرض کرد محور خنثی از مرکز سطح مقطع مرکب می‌گذرد، و یکی از اهداف تحلیل در اینجا تعیین مکان این محور است.

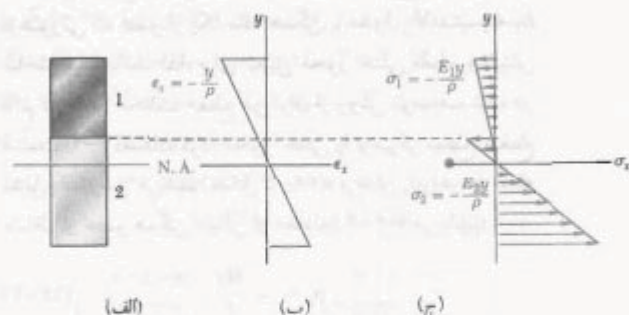
چون مدول‌های الاستیسیته E_1 و E_2 دو ماده با هم تفاوت دارند، تنش قائم در هر ماده نیز یکسان نیست و می‌نویسیم:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \quad (۴-۲۴)$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

به این ترتیب، منحنی توزیع تنش از دو پاره خط راست تشکیل می‌شود (شکل ۴-۲۴ ج). از معادله‌های (۴-۲۴) نتیجه می‌شود که نیروی dF_1 وارد بر جزء با مساحت dA قسمت بالایی مقطع عرضی چنین است:

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad (۴-۲۵)$$



شکل ۴-۲۴ توزیع کرنش و تنش در میله متشکل از دو ماده.

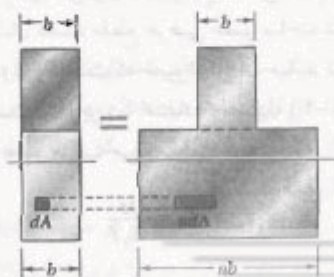
برای نیروی dF_1 وارد بر یک جزء قسمت پایینی مقطع عرضی با همان مساحت dA داریم:

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad (۴-۲۶)$$

اگر نسبت E_2/E_1 را با n نشان دهیم،

$$dF_1 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (n dA) \quad (۴-۲۷)$$

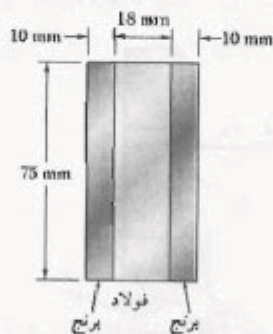
با مقایسه معادله‌های (۴-۲۵) و (۴-۲۷)، دیده می‌شود که نیروی وارد بر یک جزء با مساحت $n dA$ از ماده اول برابر با dF_1 است. به عبارت دیگر، اگر هر دو قسمت میله از ماده اول ساخته شده باشند، با ضرب کردن عرض اجزای قسمت پایینی در n ، مقاومت میله در برابر خمش تغییر نمی‌کند. توجه کنید که این عریض‌شدگی (اگر $n > 1$)، یا باریک‌شدگی (اگر $n < 1$)، در جهت موازی با محور خنثی مقطع روی می‌دهد زیرا فاصله y هر جزء از محور خنثی باید ثابت بماند. مقطع عرضی جدیدی را که به این طریق حاصل می‌شود مقطع تبدیل یافته عضو می‌گویند (شکل ۴-۲۵).



شکل ۴-۲۵ مقطع تبدیل یافته برای میله مرکب.

مثال ۳-۴

با اتصال قطعات فولادی ($E_s = 200 \text{ GPa}$) و برنجی ($E_b = 100 \text{ GPa}$)، میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده ساخته شده است (شکل ۲۷-۴). اگر میله تحت لنگر خمشی $M = 4.5 \text{ kN.m}$ در خمش خالص قرار گیرد، ماکزیم تنش را در فولاد و برنج بیابید.



شکل ۲۷-۴

در شکل ۲۸-۴، مقطع تبدیل یافته متناظر با یک میله تماماً برنجی نشان داده شده است.

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{200 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa}} = 2$$

در نتیجه، عرض قسمت مرکزی برنج که جایگزین قسمت فولادی اولیه می‌شود برابر است با:

$$(18 \text{ mm} \times 2) = 36 \text{ mm}$$

گفتنی است که این تغییراندازه در امتداد موازای با محور خنثی روی می‌دهد. همان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور مرکزی‌اش چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (56 \text{ mm})(75 \text{ mm})^3 = 1.97 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ماکزیم فاصله از محور خنثی، 37.5 mm است. با استفاده از معادله (۱۵-۴)، ماکزیم تنش را در مقطع تبدیل یافته می‌یابیم:

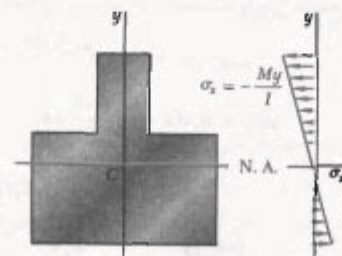
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(4.5 \times 10^3 \text{ N.m})(37.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{1.97 \times 10^6 \text{ m}^4} = 85.7 \text{ MPa}$$

مقدار بالا، ماکزیم تنش در قسمت برنجی میله مرکب اولیه را نیز نشان می‌دهد. ولی، ماکزیم تنش در قسمت فولادی از

یعنی، مقطع تبدیل یافته هم‌ارز است با مقطع عرضی عضو در صورتی که عضو از یک ماده همگن با مدول الاستیته E_1 ساخته شده باشد. لذا، برای تعیین محور خنثی مقطع و تنش قائم در نقاط مختلف مقطع می‌توان از روش توصیف شده در قسمت ۴-۴ استفاده کرد. محور خنثی را از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته رسم می‌کنیم (شکل ۲۶-۴)، و تنش σ_x را در هر نقطه متناظر از عضو همگن خیالی از معادله (۱۶-۴) می‌یابیم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (16-4)$$

(y فاصله از سطح خنثی، و I همان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور گذرا از مرکز سطح است).



شکل ۲۶-۴ توزیع تنش‌ها در مقطع تبدیل یافته.

برای تعیین تنش σ_x در هر نقطه از قسمت بالایی مقطع عرضی میله مرکب اولیه، فقط تنش σ_x را در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته محاسبه می‌کنیم. ولی، برای تعیین تنش σ_x در یک نقطه از قسمت پایینی مقطع عرضی، باید تنش σ_x محاسبه شده در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته را در n ضرب کنیم. همانطور که قبلاً دیدیم، نیروی جزئی یکسان dF بر مساحت $n dA$ از مقطع تبدیل یافته و بر مساحت dA از مقطع اولیه وارد می‌شود. لذا، تنش σ_x در یک نقطه از مقطع اولیه برابر است با n برابر تنش در نقطه متناظر از مقطع تبدیل یافته.

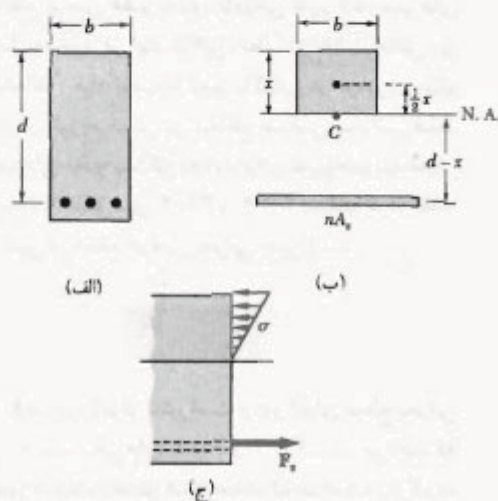
تغییر شکل یک عضو مرکب را با استفاده از مقطع تبدیل یافته نیز می‌توان تعیین کرد. می‌دانیم که مقطع تبدیل یافته نشان دهنده مقطع عرضی عضو ساخته شده از ماده همگنی با مدول E_1 است که تغییر شکل آن مانند تغییر شکل میله مرکب است. بنابراین، با استفاده از معادله (۲۱-۴)، برای شعاع انحنای عضو مرکب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

که در آن I همان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور خنثی خود می‌باشد.



برای تعیین مقطع انتقال یافته یک تیر بتنی تقویت شده، کل مساحت مقطع عرضی A_s میله‌های فولادی را با nA_s جایگزین می‌کنیم (شکل ۴-۳۰ ب)؛ n برابر است با E_s/E_c (و E_s و E_c به ترتیب، مدول الاستیسیته فولاد و مدول الاستیسیته بتن است). چون بتن در تیر فقط تحت فشار به خوبی عمل می‌کند، فقط قسمتی از مقطع عرضی را که در بالای محور خنثی قرار دارد باید در مقطع تبدیل یافته به کار برد.



شکل ۳۰-۴

با تعیین فاصله مرکز سطح مقطع تبدیل یافته تا وجه بالایی تیر می‌توان مکان محور خنثی را به دست آورد. عرض تیر را با b و فاصله خط مرکزی میله‌های فولادی از وجه بالایی را با d نشان می‌دهیم، و همان اول مقطع تبدیل یافته را نسبت به محور خنثی برابر با صفر قرار می‌دهیم. مقطع تبدیل یافته از دو قسمت تشکیل شده است. می‌نویسیم:

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_s (d - x) = 0$$

یا

$$\frac{1}{2} bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \quad (28-4)$$

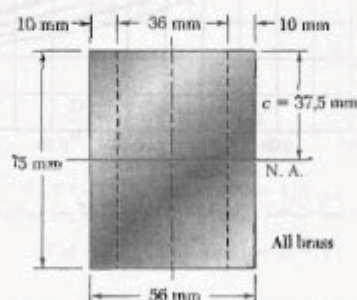
x فاصله مرکز سطح مقطع تبدیل یافته تا وجه بالایی تیر است. با حل این معادله درجه دوم، مکان محور خنثی در تیر و قسمتی از مقطع عرضی تیر بتنی که به طور مؤثر مورد استفاده قرار می‌گیرد به دست می‌آید.

در مسئله نمونه ۴-۴، تنش در مقطع تبدیل یافته را تعیین کردیم. توزیع تنش فشاری در بتن و برابند نیروهای کششی F_s در میله‌های فولادی در شکل ۴-۳۰ ج نشان داده شده‌اند.

مقدار حاصل برای مقطع تبدیل یافته بیشتر است، زیرا وقتی می‌خواهیم از مقطع تبدیل یافته به مقطع اولیه برگردیم، باید مساحت قسمت مرکزی را بر ۱/۹۳۳ تقسیم کنیم. در نتیجه،

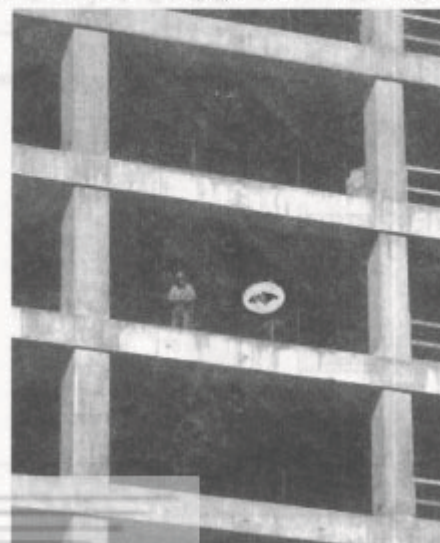
$$\sigma_{\text{در برنج (ماکزیمم)}} = 85.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{در فولاد (ماکزیمم)}} = (2)(85.7 \text{ MPa}) = 171.4 \text{ MPa}$$



شکل ۲۸-۴

تیرهای بتنی تقویت شده (شکل ۴-۲۹)، یکی از نمونه‌های مهم از عضوهای ساختمانی است که از دو ماده مختلف تشکیل شده‌اند. این تیرها، وقتی برای لنگرهای خمشی مثبت طراحی می‌شوند، با میله‌های فولادی که به فاصله کمی بالایی وجه پایینی تیر قرار می‌گیرند تقویت می‌شوند (شکل ۴-۳۰ الف). چون بتن در کشش خیلی ضعیف است، در زیر سطح خنثی ترک برمی‌دارد و میله‌های فولادی تمام بار کششی را تحمل می‌کنند، در حالی که قسمت بالایی تیر بتنی بار فشاری را تحمل می‌کند.



شکل ۲۹-۴

۷-۴ تمرکز تنش

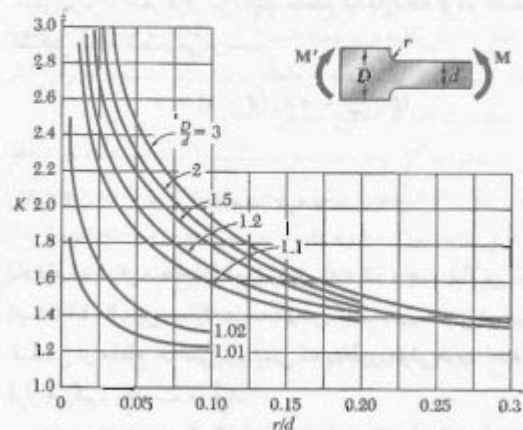
در قسمت ۴-۴، فرمول $\sigma_m = Mc/I$ برای عضوی که دارای صفحه تقارن مقطع عرضی یکنواخت است به دست آمد. در قسمت ۵-۴ دیدیم که اگر کوپل‌های M و M' با استفاده از صفحات صلب و هموار اعمال شوند، فرمول مذکور در تمام طول عضو به کار می‌آید. در موارد دیگر، در نزدیک نقاط بارگذاری، تمرکز تنش روی می‌دهد.

اگر مقطع عرضی عضو به طور ناگهانی تغییر کند، تنش‌های بزرگتری نیز به وجود می‌آیند. در این رابطه، دو حالت خاص زیر بررسی شده‌اند*: میله تخت با تغییر ناگهانی در عرض، و میله تخت شیاردار. توزیع تنش در مقاطع عرضی بحرانی فقط به شکل هندسی عضو بستگی دارد. و برای تعیین ضریب تمرکز تنش می‌توان از شکل‌های ۳۱-۴ و ۳۲-۴ استفاده کرد. مقدار ماکزیمم تنش در مقطع عرضی بحرانی چنین است:

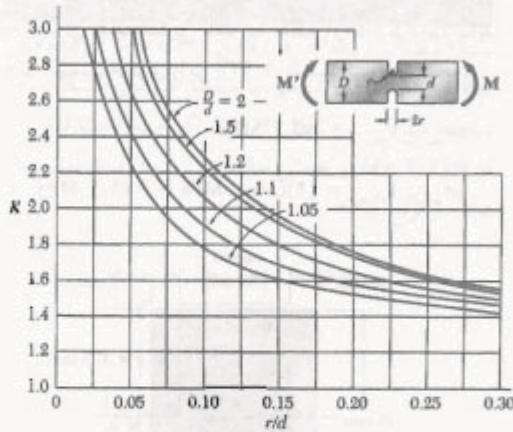
$$\sigma_m = K \frac{Mc}{I} \quad (۲۹-۴)$$

که در آن، K ضریب تمرکز تنش است و c و I برای مقطع بحرانی به عرض d است. شکل‌های ۳۱-۴ و ۳۲-۴ نشان می‌دهند که برای کاهش شدت تمرکز تنش باید تا حد امکان از گرده (ماهیچه) و شیار با شعاع بزرگ استفاده کرد.

در اینجا نیز مانند بارگذاری محوری و پیچش، ضریب K با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش محاسبه شده‌اند. در اغلب موارد، تغییر شکل پلاستیک روی می‌دهد و مقدار ماکزیمم تنش کمتر از مقدار حاصل از معادله (۲۹-۴) است.



شکل ۳۱-۴ ضریب تمرکز تنش برای میله‌های تخت گرددار در خمش خالص*.



شکل ۳۲-۴ ضرایب تمرکز تنش برای میله‌های تخت شیاردار در خمش خالص*.

مثال ۴-۴

یک میله فولادی به عرض ۶۰ mm و به ضخامت ۹ mm دارای شیارهایی به عمق ۱۰ mm است (شکل ۳۳-۴). مطلوب‌ست کمترین عرض مجاز شیارها تا وقتی میله تحت لنگر خمشی ۱۸۰ N.m قرار می‌گیرد، تنش در میله از ۱۵۰ MPa بیشتر نشود. از شکل ۳۳-۴ الف،

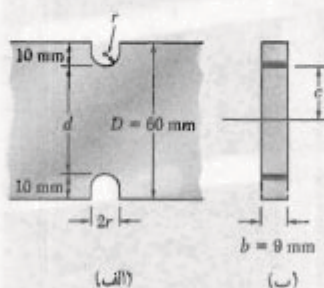
$$d = 60 \text{ mm} - 2(10 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

$$c = \frac{1}{2}d = 20 \text{ mm} \quad b = 9 \text{ mm}$$

ممان اینرسی مقطع عرضی بحرانی نسبت به محور خشی آن چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b d^3 = \frac{1}{12} (9 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3$$

$$= 4.8 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$



شکل ۳۳-۴

* W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2d. ed., John Wiley & Sons, New York 1997.



با ضرب کردن ابعاد افقی قسمت فولادی مقطع در $n = 16$ ، مقطع تبدیل یافته‌ای که تماماً از چوب ساخته شده است به‌دست می‌آید.

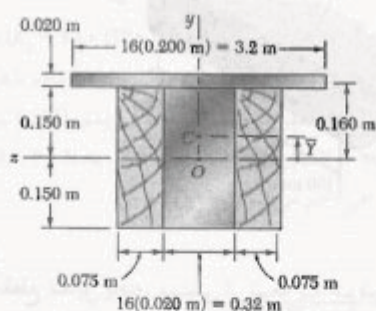
محور خنثی. محور خنثی از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می‌گذرد. چون این مقطع از دو مستطیل تشکیل شده است، داریم

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0,160 \text{ m})(3,2 \text{ m} \times 0,20 \text{ m}) + 0}{3,2 \text{ m} \times 0,20 \text{ m} + 0,470 \text{ m} \times 0,300 \text{ m}} = 0,050 \text{ m}$$

ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح. با استفاده از نظریه محوره‌های موازی،

$$I = \frac{1}{12}(0,470)(0,300)^3 + (0,470 \times 0,300)(0,050)^2 + \frac{1}{12}(3,2)(0,20)^3 + (3,2 \times 0,20)(0,160 - 0,050)^2$$

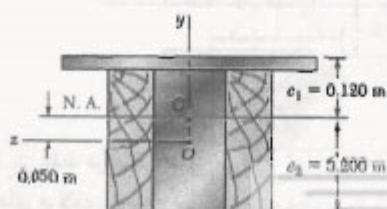
$$I = 2,19 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$



الف. تنش ماکزیمم در چوب. دورترین فاصله از محور خنثی در امتداد لبه چوب قرار دارد، یعنی در جایی که $c_1 = 0,200 \text{ m}$

$$\sigma_w = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N.m})(0,200 \text{ m})}{2,19 \times 10^{-7} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_w = 4,57 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$



مقدار تنش Mc/I عبارت است از:

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180 \text{ N.m})(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{28 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 75 \text{ MPa}$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۲۹-۴) و با استفاده از $\sigma_m = 150 \text{ MPa}$ داریم

$$150 \text{ MPa} = K(75 \text{ MPa})$$

$$\Rightarrow K = 2$$

از طرف دیگر،

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1,5$$

برای $K = 2$ و $D/d = 1,5$ ، طبق شکل ۴-۱۳، $r/d = 0,13 \times 32 = 4$

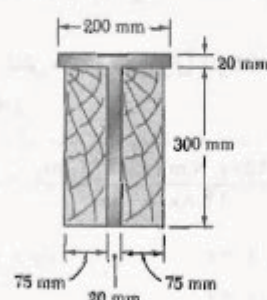
$$r = 0,13d = 0,13(40 \text{ mm}) = 5,2 \text{ mm}$$

لذا، کمترین عرض مجاز شیار چنین است:

$$2r = 2(5,2 \text{ mm}) = 10,4 \text{ mm}$$

مسئله نمونه ۳-۴

دو ورق فولادی به هم جوش شده‌اند و یک تیر T شکل را تشکیل داده‌اند. این تیر به دو الوله بلوط پیچ و مهره شده است. مدول الاستیته برای چوب $12,5 \text{ GPa}$ و برای فولاد 200 GPa است. اگر لنگر خمشی $M = 50 \text{ kN.m}$ بر این تیر مرکب وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش ماکزیمم در چوب، (ب) تنش در فولاد در امتداد لبه بالایی.



حل

مقطع تبدیل یافته، ابتدا نسبت زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12,5 \text{ GPa}} = 16$$

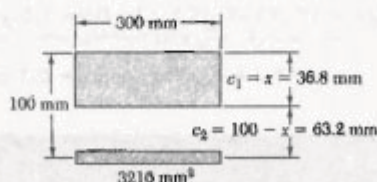
از بتن تحت فشار است (بالای محور خشی)، و دیگری مساحت تبدیل یافته فولاد، nA_s ، است. می‌نویسیم:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8.0$$

$$nA_s = 8.0 (402 \text{ mm}^2) = 3216 \text{ mm}^2$$

محور خشی. محور خشی تیغه از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می‌گذرد. ممان مقاطع تبدیل یافته را نسبت به محور خشی با هم جمع می‌کنیم:

$$300x \left(\frac{x}{2} \right) + 3216 (100 - x) = 0 \quad x = 36.8 \text{ mm}$$



ممان اینرسی. ممان اینرسی مساحت تبدیل یافته نسبت به محور گذرا از مرکز سطح چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (300)(36.8)^3 + 3216 (100 - 36.8)^2 = 12.78 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

الف. تنش ماکزیم در بتن. در بالای تیغه، داریم
و $c_1 = 36.8 \text{ mm}$

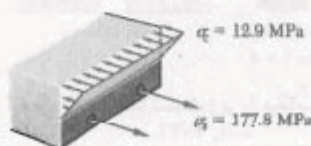
$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4500 \text{ N.m})(36.8 \text{ mm})}{12.78 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_c = 12.9 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

ب. تنش در فولاد. برای فولاد، داریم $c_2 = 63.2 \text{ mm}$ و $n = 8.0$

$$\sigma_s = n \frac{Mc_2}{I} = 8.0 \frac{(4500 \text{ N.m})(63.2 \text{ mm})}{12.78 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_s = 177.8 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



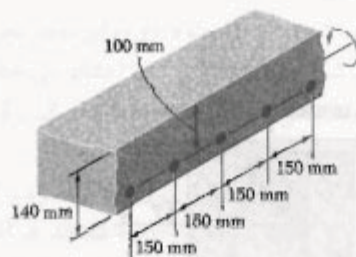
ب. تنش در فولاد. در امتداد لبه بالایی، $c_1 = 36.8 \text{ mm}$ از مقطع تبدیل یافته، تنش معادل در چوب را می‌یابیم و آن را در n ضرب می‌کنیم تا تنش در فولاد به دست آید:

$$\sigma_s = n \frac{Mc_1}{I} = (8.0) \frac{(4500 \text{ N.m})(36.8 \text{ mm})}{12.78 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_s = 177.8 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

مسئله نمونه ۴-۴

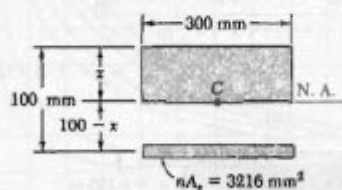
یک تیغه بتنی توسط میله‌های فولادی به قطر 16 mm تقویت شده است. این میله‌ها به فاصله 38 mm بالای وجه پایینی تیغه قرار دارند و فاصله مراکز آنها از یکدیگر 150 mm است. مدول الاستیسیته برای بتن 25 GPa و برای فولاد 200 GPa است. اگر لنگر خمشی 4.5 kN.m بر هر فوت عرض تیغه وارد شود، مطلوب است: (الف) تنش ماکزیم در بتن، (ب) تنش در فولاد.



حل

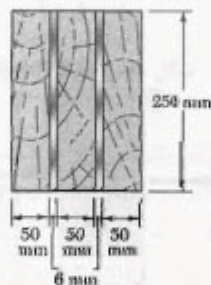
مقطع تبدیل یافته. قسمتی از تیغه به عرض 300 mm را در نظر می‌گیریم، که در آن دو میله به قطر 16 mm کلاً دارای مساحت مقطع عرضی زیر هستند:

$$A_s = 2 \left[\frac{\pi}{4} (16 \text{ mm})^2 \right] = 402 \text{ mm}^2$$



چون بتن فقط در فشار عمل می‌کند، تمام نیروهای کششی را میله‌های فولادی تحمل می‌کنند و مقطع تبدیل یافته از دو مساحت نشان داده شده تشکیل شده است. یکی از آنها قسمتی

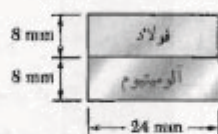
فولاد	چوب	
۲۰۰ GPa	۱۴ GPa	مدول الاستیسیته
۱۵۰ MPa	۱۴ MPa	تنش مجاز



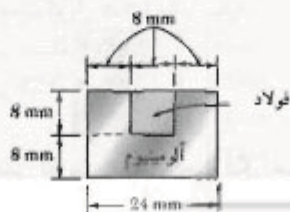
شکل م ۳۷-۴

۳۸-۴ در مسئله ۳۷-۴، ماکزیمم لنگر خمشی را برای خمش عضو مدل یک محور عمودی بیابید.

۳۹-۴ و ۴۰-۴ از اتصال میله فولادی ($E_s = 210 \text{ GPa}$) و میله آلومینیومی ($E_a = 70 \text{ GPa}$)، میله مرکب نشان داده شده به وجود آمده است. مطلوبست تنش ماکزیمم: (الف) در آلومینیوم، (ب) در فولاد، وقتی میله تحت لنگر $M = 60 \text{ N.m}$ حول یک محور افقی خم می‌شود.



شکل م ۳۹-۴

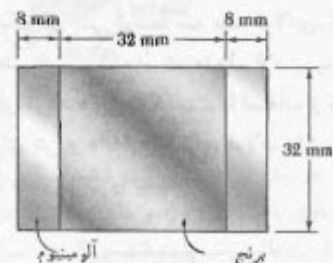


شکل م ۴۰-۴

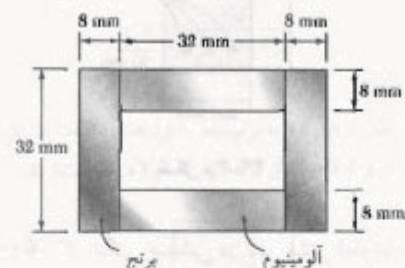
مسائل

۳۳-۴ و ۳۴-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از برنج و آلومینیوم است. با استفاده از داده‌های زیر، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را برای خمش میله حول یک محور افقی بیابید.

برنج	آلومینیوم	
۱۰۵ GPa	۷۰ GPa	مدول الاستیسیته
۱۶۰ MPa	۱۰۰ MPa	تنش مجاز



شکل م ۳۳-۴



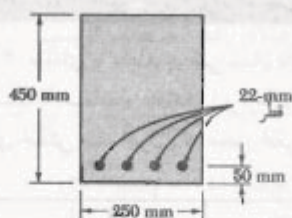
شکل م ۳۴-۴

۳۵-۴ و ۳۶-۴ برای میله مرکب نشان داده شده، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را در میله برای خمش آن حول یک محور عمودی بیابید:

۳۵-۴ میله مسئله ۳۳-۴

۳۶-۴ میله مسئله ۳۴-۴

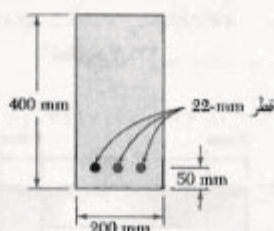
۳۷-۴ سه تیر چوبی و دو ورق فولادی به هم پیچ شده‌اند و عضو مرکب نشان داده شده را ساخته‌اند. با استفاده از داده‌های زیر، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را برای خمش عضو حول یک محور افقی بیابید.



شکل م ۴۷

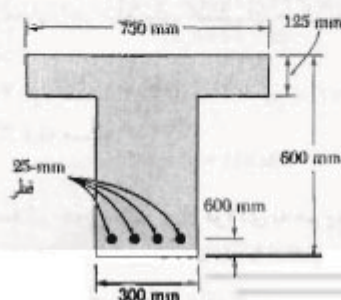
۴۸-۴ مسئله ۴۷-۴ را با این فرض حل کنید که عمق تیر از ۴۵۰ mm به ۵۰۰ mm افزایش یابد.

۴۹-۴ یک تیر بتنی توسط سه میله فولادی، که مطابق شکل قرار دارند، تقویت شده است. مدول الاستیسیته برای بتن ۲۰ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. با استفاده از تنش مجاز ۹/۴۵ MPa برای بتن و ۱۲۰ MPa برای فولاد، ماکزیمم لنگر خمشی مثبت مجاز در تیر را بیابید.



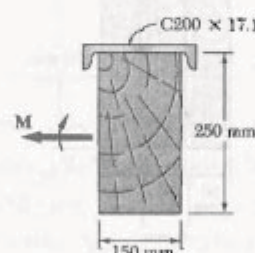
شکل م ۴۹

۵۰-۴ اگر لنگر خمشی در تیر بتنی تقویت شده‌ای ۲۵۰ kN.m + و مدول الاستیسیته برای بتن ۲۵ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa باشد، مطلوبست: (الف) تنش در فولاد، (ب) ماکزیمم تنش در بتن.

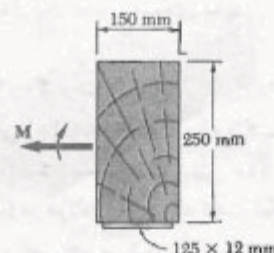


شکل م ۵۰

۴۱-۴ و ۴۲-۴ تیر چوبی با مقطع عرضی ۱۵۰ × ۲۵۰ mm به تقویت‌کننده فولادی پیچ شده است. مدول الاستیسیته چوب و فولاد، به ترتیب، ۱۲ GPa و ۲۰۰ GPa است. اگر تیر تحت کوبل $M = ۵۰ \text{ kN.m}$ حول یک محور افقی خم شود، مطلوبست ماکزیمم تنش: (الف) در چوب، (ب) در فولاد.



شکل م ۴۱



شکل م ۴۲

۴۳-۴ و ۴۴-۴ برای میله مرکب نشان داده شده، شعاع انحنای ناشی از اعمال کوبل ۳۵ N.m را بیابید.

۴۳-۴ میله مسئله ۲۹-۴

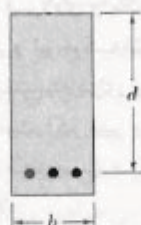
۴۴-۴ میله مسئله ۴۰-۴

۴۵-۴ و ۴۶-۴ برای تیر مرکب نشان داده شده، شعاع انحنای ناشی از اعمال کوبل ۵۰ kN.m را بیابید.

۴۵-۴ تیر مسئله ۴۱-۴

۴۶-۴ تیر مسئله ۴۲-۴

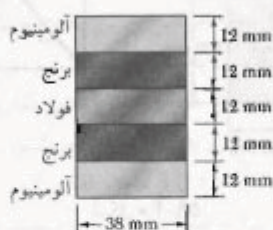
۴۷-۴ تیر بتنی تقویت شده‌ای تحت لنگر خمشی مثبت ۱۷۵ kN.m قرار دارد. اگر مدول الاستیسیته برای بتن ۲۵ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa باشد، مطلوبست: (الف) تنش در فولاد، (ب) ماکزیمم تنش در بتن.



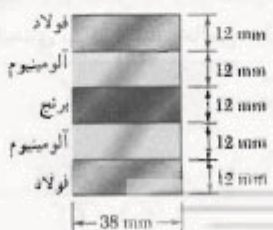
شکل م ۵۳-۴ و م ۵۴-۴

۵۴-۴ برای تیر بتنی نشان داده شده، مدول الاستیسته برای بتن ۲۵ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. اگر $b = ۲۰۰ \text{ mm}$ و $d = ۴۵۰ \text{ mm}$ ، با استفاده از تنش مجاز ۱۲٫۵ MPa برای بتن و ۱۴۰ MPa برای فولاد، مطلوبست: (الف) مساحت A_s فولاد تقویت‌کننده در صورتی که بخواهیم طرح متوازن باشد، (ب) ماکزیمم لنگر خمشی مجاز (برای تعریف طرح متوازن، به مسئله ۵۲-۴ مراجعه کنید).

۵۵-۴ و ۵۶-۴ پنج تسمه فلزی، هر یک با مقطع عرضی $۱۲ \times ۳۸ \text{ mm}$ ، به یکدیگر متصل و تیر مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. مدول الاستیسته برای فولاد ۲۰۰ GPa، برای برنج ۱۰۵ GPa و برای آلومینیوم ۷۰ GPa است. اگر تیر با اعمال کوپل ۱٫۴ kN.m حول یک محور افقی خم شود، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در هر یک از سه فلز، (ب) شعاع انحنای تیر مرکب.

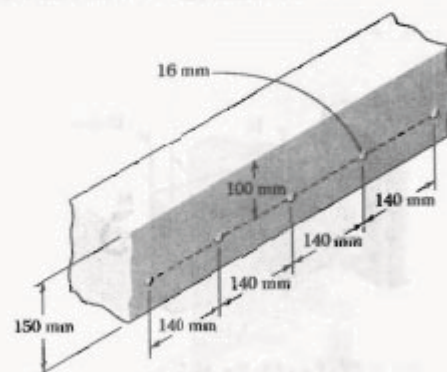


شکل م ۵۵-۴



شکل م ۵۶-۴

۵۱-۴ یک دال بتنی توسط میله‌هایی به قطر ۱۶ mm تقویت شده است. فاصله مراکز میله‌ها از هم ۱۴۰ mm است. مدول الاستیسته بتن و فولاد، به ترتیب، ۲۰ GPa و ۲۰۰ GPa است. با استفاده از تنش مجاز ۹ MPa برای بتن و ۱۴۰ MPa برای فولاد، ماکزیمم لنگر خمشی را که می‌توان بر واحد طول دال وارد کرد بیابید.

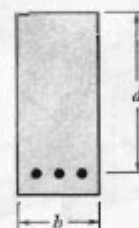


شکل م ۵۱-۴

۵۲-۴ در یک تیر بتنی تقویت شده، هرگاه ماکزیمم تنش در فولاد مساوی با تنش مجاز σ_s و ماکزیمم تنش در بتن مساوی با تنش مجاز σ_c باشد، تیر را متوازن می‌گویند. نشان دهید که برای دستیابی به یک طرح متوازن، فاصله x از نوک تیر تا محور خنثی باید به صورت زیر باشد:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$$

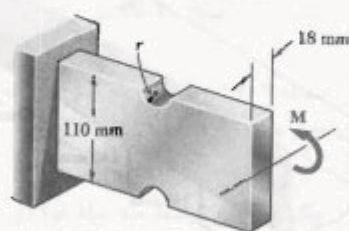
که در آن E_s و E_c ، به ترتیب، مدول‌های الاستیسته بتن و فولاد هستند و d فاصله از نوک تیر تا فولاد تقویت‌کننده است.



شکل م ۵۲-۴

۵۳-۴ برای تیر بتنی نشان داده شده، مدول الاستیسته برای بتن ۲۴ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. اگر $b = ۲۰۰ \text{ mm}$ و $d = ۵۵۰ \text{ mm}$ ، با استفاده از تنش مجاز ۱۲ MPa برای بتن و ۱۴۰ MPa برای فولاد، مطلوبست: (الف) مساحت A_s فولاد تقویت‌کننده در صورتی که بخواهیم طرح متوازن باشد، (ب) ماکزیمم لنگر خمشی مجاز (برای تعریف طرح متوازن، به مسئله ۵۲-۴ مراجعه کنید).

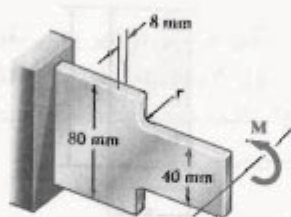
۶۱-۴ شیارهای نیم دایره‌ای با شعاع r ، مطابق شکل، در جوانب یک عضو فولادی فرغ شده‌اند. با استفاده از تنش مجاز 55 MPa ، مطلوبست ماکزیمم لنگر خمشی که می‌توان بر عضو وارد کرد در صورتی که شعاع r شیارهای نیم دایره‌ای برابر است با: (الف) 10 mm ، (ب) 18 mm .



شکل م ۶۱-۴ و م ۶۲-۴

۶۲-۴ شیارهای نیم دایره‌ای با شعاع r ، مطابق شکل، در جوانب یک عضو فولادی فرغ شده‌اند. اگر $M = 450 \text{ N.m}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش در عضو در صورتی که: (الف) $r = 10 \text{ mm}$ ، (ب) $r = 18 \text{ mm}$.

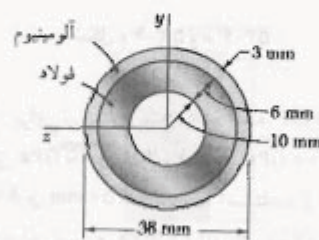
۶۳-۴ اگر $M = 250 \text{ N.m}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش در تیر نشان داده شده وقتی شعاع r گردیده برابری است با: (الف) 4 mm ، (ب) 8 mm .



شکل م ۶۳-۴ و م ۶۴-۴

۶۴-۴ اگر تنش مجاز در تیر نشان داده شده 90 MPa باشد، مطلوبست لنگر خمشی مجاز M وقتی شعاع r گردیده‌ها برابر است با: (الف) 8 mm ، (ب) 12 mm .

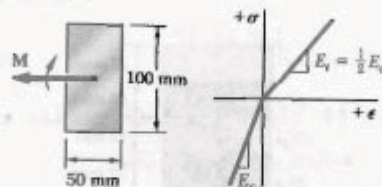
۵۷-۴ یک لوله فولادی و یک لوله آلومینیومی به یکدیگر محکم شده‌اند و تیر مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. مدول الاستیسیته برای فولاد 210 GPa و برای آلومینیوم 70 GPa است. اگر تیر مرکب با اعمال گویل 500 N.m خم شود، مطلوبست ماکزیمم تنش: (الف) در آلومینیوم، (ب) در فولاد.



شکل م ۵۷-۴

۵۸-۴ مسئله ۵۷-۴ را با این فرض حل کنید که لوله داخلی به ضخامت 6 mm از آلومینیوم و لوله خارجی به ضخامت 3 mm از فولاد ساخته شده باشند.

۵۹-۴ تیر مستطیلی نشان داده شده از پلاستیکی ساخته شده است که مدول الاستیسیته آن در کشش نصف مقدار آن در فشار است. برای لنگر خمشی $M = 600 \text{ N.m}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش کششی، (ب) ماکزیمم تنش فشاری.



شکل م ۵۹-۴

۶۰-۴ یک تیر مستطیلی از ماده‌ای ساخته شده است که مدول الاستیسیته آن در کشش E_t و در فشار E_c است. نشان دهید که شعاع انحنای تیر در خمش خالص عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_t I}$$

که در آن

$$E_r = \frac{4 E_t E_c}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}$$

۴-۸ تغییر شکل پلاستیک

برای استنتاج رابطه $M/\epsilon_x = \sigma_x$ در قسمت ۴-۴، فرض شد قانون هوک در تمام عضو به کار می‌رود. اگر تنش در قسمتی از عضو از استقامت تسلیم بیشتر شود، با اگر ماده از نوع شکننده با نمودار تنش-کرنش غیرخطی باشد، رابطه بالا صحت نخواهد داشت. در این قسمت می‌خواهیم یک روش کلی را برای تعیین توزیع تنش در عضوی که در خمش خالص است و از قانون هوک پیروی نمی‌کند بررسی کنیم.

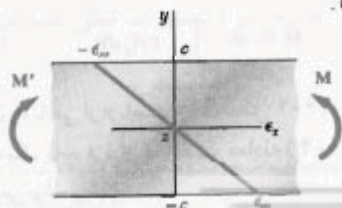
در قسمت ۳-۴، هنگام اثبات این موضوع که کرنش قائم ϵ_x برحسب فاصله y از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند، هیچ رابطه خاصی را برای تنش-کرنش در نظر نگرفتیم. در اینجا نیز از این خاصیت استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (۱۰-۴)$$

که در آن، y فاصله نقطه مورد نظر از سطح خنثی است، و c ماکزیم مقدار y است.

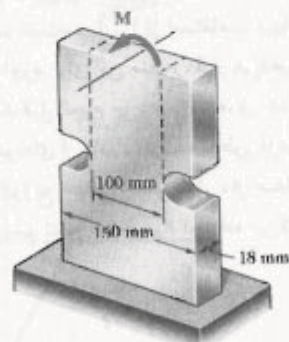
البته، نمی‌توان فرض کرد محور خنثی از مرکز سطح مقطع داده شده می‌گذرد، زیرا این خاصیت در قسمت ۴-۴ با فرض تغییر شکل الاستیک به دست آمد. به طور کلی، مکان محور خنثی با توجه به معادله‌های (۱-۴) و (۳-۴) و با آزمون و خطا به دست می‌آید. ولی، در حالت خاصی که عضوی دارای صفحات تقارن افقی و عمودی است و از ماده‌ای ساخته شده است که رابطه تنش-کرنش آن در کشش و فشار یکسان است، محور خنثی بر محور تقارن افقی مقطع منطبق است. در حقیقت، با توجه به خواص چنین ماده‌ای، تنش‌ها باید نسبت به محور خنثی متقارن باشند. این حالت، و نیز معادله (۱-۴)، وقتی برقرار می‌شود که محور خنثی محور تقارن افقی باشد.

ابتدا، حالت خاص بالا را تحلیل می‌کنیم. در این حالت، فاصله y در معادله (۱۰-۴) از محور تقارن افقی z مقطع عرضی اندازه‌گیری می‌شود و توزیع کرنش ϵ_x نسبت به آن محور به صورت خطی و متقارن است (شکل ۴-۳۴). منحنی تنش-کرنش نیز نسبت به مبدأ مختصات متقارن است (شکل ۴-۳۵).

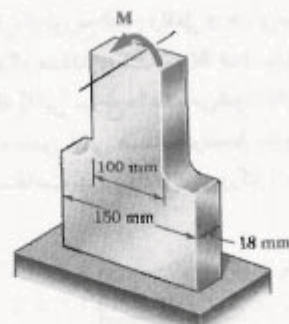


شکل ۴-۳۴

۴-۶۵ تنش مجاز برای یک میله فولادی ۸۰ MPa است. مطلوبست ماکزیمم کوپل M که می‌توان بر میله وارد کرد در صورتی که (الف) میله دارای شیارهای نیم‌دایره‌ای با شعاع $r = 15 \text{ mm}$ باشد (شکل م ۴-۷۳ الف)، (ب) شیارها حذف شوند و میله به صورت نشان داده شده در شکل م ۴-۶۵ ب در آید.



(الف)



(ب)

شکل م ۴-۶۵ و م ۴-۶۶

۴-۶۶ کوپل $M = 2 \text{ kN.m}$ بر انتهای یک میله فولادی وارد شده است. مطلوبست ماکزیمم تنش در میله به شرطی که: (الف) میله دارای شیارهای نیم‌دایره‌ای با شعاع $r = 10 \text{ mm}$ باشد (شکل م ۴-۶۵ الف)، (ب) شیارها حذف شوند و میله به صورت نشان داده شده در شکل م ۴-۶۵ ب در آید.

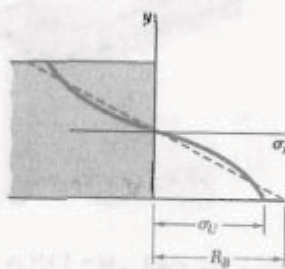


اگر σ_x تابع معلومی از ϵ_x باشد، از معادله (۴-۱۰) برای بیان σ_x برحسب y می‌توان استفاده، و انتگرال در (۴-۳۱) را به صورت تحلیلی تعیین کرد. در غیر اینصورت، لنگر خمشی M را با انتگرال‌گیری عددی باید به دست آورد. توجه کنید که انتگرال در معادله (۴-۳۱) همان اول سطح شکل ۴-۳۶ را، که بالای محور افقی است و با منحنی توزیع تنش و محور عمودی محدود شده است، نسبت به محور افقی نشان می‌دهد.

لنگر خمشی نهایی M_U که باعث شکست عضو می‌شود یک پارامتر مهم است، و آن را از استقامت نهایی σ_U ماده می‌توان به دست آورد. برای این منظور، قرار می‌دهیم $\sigma_{max} = \sigma_U$ و محاسبه را مانند قبل انجام می‌دهیم. البته، در عمل بهتر است M_U را از روی نمونه‌ای از ماده داده شده به طور آزمایشی بیابیم. سپس، با فرض توزیع خیالی تنش، از معادله (۴-۱۵) برای تعیین ماکزیمم تنش متناظر R_B استفاده می‌کنیم:

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \quad (۴-۳۲)$$

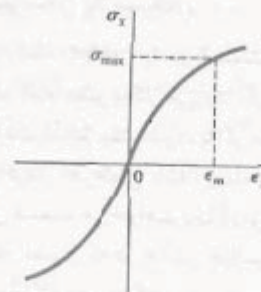
تنش خیالی R_B را مدول شکست خمشی ماده می‌گویند. از معادله ۴-۳۲ برای تعیین لنگر خمشی نهایی عضوی که مدول شکست آن معلوم است می‌توان استفاده کرد. در عضوی با مقطع عرضی مستطیلی، از توزیع تنش واقعی و خیالی نشان داده شده در شکل ۴-۳۷، مقدار یکسان M_U به دست می‌آید. لذا، مساحت‌هایی که با این توزیع‌ها داده می‌شوند دارای همان اول یکسان نسبت به محور افقی هستند. در نتیجه، مدول گسیختگی R_B همواره از استقامت نهایی واقعی σ_U بزرگتر است.



شکل ۴-۳۷

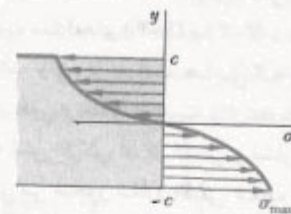
۴-۹. عضوهای الاستوپلاستیک

برای اطلاعات بیشتر درباره رفتار پلاستیکی یک عضو تحت خمشی، عضوی را که از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دارای مقطع عرضی مستطیلی



شکل ۴-۳۵

توزیع تنش در مقطع عرضی عضو، یعنی نمودار σ_x برحسب y ، به صورت زیر به دست می‌آید. با فرض اینکه σ_{max} معلوم شده است، ابتدا مقدار متناظر ϵ_m را از نمودار تنش-کرنش می‌یابیم و این مقدار را در معادله (۴-۱۰) می‌گذاریم. سپس، برای هر مقدار y ، مقدار متناظر ϵ_x را از معادله (۴-۱۰) یا شکل (۴-۳۴) می‌یابیم، و از نمودار تنش-کرنش شکل ۴-۳۵ تنش σ_x متناظر با این مقدار ϵ_x را به دست می‌آوریم. با ترسیم σ_x برحسب y ، توزیع تنش دلخواه به دست می‌آید (شکل ۴-۳۶).



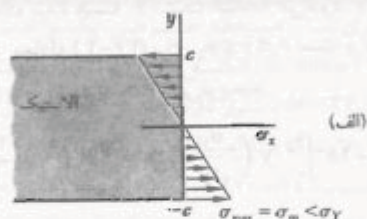
شکل ۴-۳۶

برای استنتاج معادله (۴-۳) در قسمت ۴-۲، هیچ رابطه خاصی را بین تنش و کرنش در نظر نگرفتیم. بنابراین، برای تعیین لنگر خمشی M متناظر با توزیع تنش به دست آمده در شکل ۴-۳۶، از معادله (۴-۳) استفاده می‌کنیم. برای یک عضو با مقطع عرضی مستطیلی به عرض b ، جزء مساحت در معادله (۴-۳) به صورت $dA = b dy$ است و می‌نویسیم:

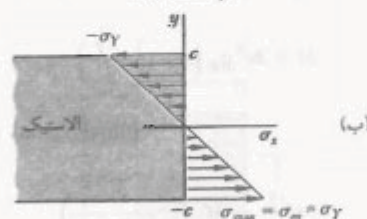
$$M = -b \int_{-c}^c y \sigma_x dy \quad (۴-۳۰)$$

که در آن σ_x تابعی از y است که در شکل ۴-۳۶ رسم شده است. چون σ_x یک تابع فرد از y است، معادله (۴-۳۰) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

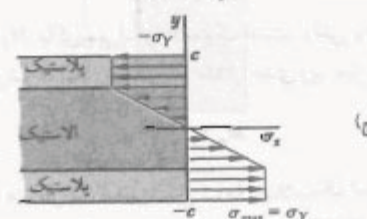
$$M = -2b \int_0^c y \sigma_x dy \quad (۴-۳۱)$$



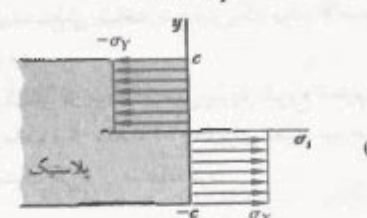
(الف) $M < M_Y$



(ب) $M = M_Y$



(ج) $M > M_Y$



(د) $M = M_P$

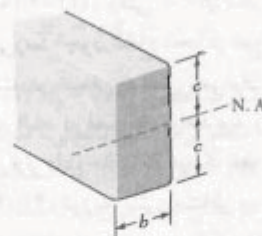
شکل ۴-۳۸

با افزایش بیشتر لنگر خمشی، نواحی پلاستیک در عضو گسترش می‌یابند، به طوری که تنش یکنواخت در ناحیه بالایی برابر با $-\sigma_Y$ و در ناحیه پایینی برابر با $+\sigma_Y$ است (شکل ۴-۳۸ ج). بین این نواحی پلاستیک، هسته الاستیک وجود دارد که در آن تنش σ_x برحسب «به صورت خطی تغییر می‌کند:

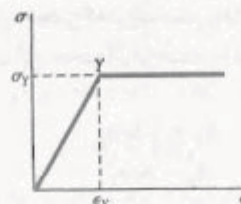
$$\sigma_x = -\frac{\sigma_Y}{y_Y} y \quad (۴-۳۶)$$

در رابطه بالا، y_Y نصف ضخامت هسته الاستیک است. با افزایش M ، نواحی پلاستیک گسترش می‌یابند تا اینکه تغییر شکل کاملاً پلاستیک می‌شود (شکل ۴-۳۸ د).

به عرض b و به ارتفاع $2c$ است (شکل ۴-۳۸). در قسمت ۲-۱۷ دیدیم که نمودار تنش-کرنش برای یک ماده الاستوپلاستیک ایده‌آلی مانند شکل ۴-۳۹ است.



شکل ۴-۳۸



شکل ۴-۳۹

تا وقتی تنش قائم σ_x از استقامت تسلیم σ_Y بیشتر نشده است، قانون هوک به کار می‌رود و توزیع تنش در عرض این مقطع به صورت خطی است (شکل ۴-۳۸ الف). ماکزیمم مقدار تنش چنین است:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۴-۱۵)$$

با افزایش لنگر خمشی، σ_m سرانجام به مقدار σ_Y می‌رسد (شکل ۴-۳۸ ب). با جایگذاری در معادله (۴-۱۵) و با حل مقدار متناظر M ، مقدار M_Y لنگر خمشی در شروع تسلیم به دست می‌آید:

$$M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y \quad (۴-۳۳)$$

لنگر M_Y را ماکزیمم لنگر الاستیک می‌گویند، زیرا بزرگترین لنگری است که به ازای آن تغییر شکل کاملاً الاستیک است. برای مقطع عرضی مستطیلی،

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{1}{3} bc^2 \quad (۴-۳۴)$$

در نتیجه،

$$M_Y = \frac{1}{3} bc^2 \sigma_Y \quad (۴-۳۵)$$

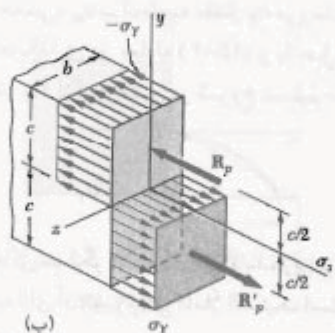
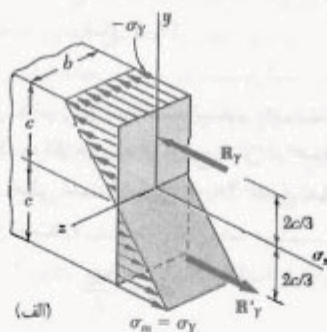
معادله (۴-۴۳) فقط پس از شروع تسلیم، یعنی برای $M < M_Y$ ، به کار می‌رود. برای $M < M_Y$ ، از معادله (۴-۲۱) باید استفاده کرد.

طبق معادله (۴-۴۳)، وقتی $\rho = 0$ ، لنگر خمشی به مقدار $M_p = \frac{2}{3} M_Y$ می‌رسد. چون شعاع انحنا در هیچ نقطه‌ای از سطح خشی صفر نیست، در خمش خالص نمی‌توان تغییر شکل کاملاً پلاستیک داشت. البته، در فصل ۵ خواهید دید وقتی یک تیر تحت بارگذاری عرضی قرار دارد، حالت بالا در یک نقطه به وجود می‌آید.

در شکل ۴-۴۱، توزیع تنش متناظر با ماکزیمم لنگر الاستیک M_Y و متناظر با حالت حدی لنگر پلاستیک M_p در یک عضو مستطیلی در سه بعد نشان داده شده است. در هر دو حالت، برایتند نیروهای کششی جزئی و برایتند نیروهای فشاری جزئی از مراکز حجمی که توزیع تنش را نشان می‌دهند می‌گذرند و مقدار آنها با این حجم‌ها برابر است. در نتیجه،

$$R_Y = \frac{1}{3} bc \sigma_Y$$

$$R_p = bc \sigma_Y$$



شکل ۴-۴۱

* معادله (۴-۲۲) برای عضوی به کار می‌رود که از ماده پخش‌شویاری یا نقطه تسلیم معین ساخته شده است، و استنتاج آن ربطی به شکل مقطع عرضی عضو و نمودار تنش-کرنش پس از نقطه تسلیم ندارد.

از معادله (۴-۳۱) برای تعیین مقدار لنگر خمشی متناظر با ضخامت داده شده هسته الاستیک استفاده می‌شود. با توجه به اینکه σ_Y در معادله (۴-۳۶) برای $0 \leq y \leq y_Y$ است و در ناحیه $y_Y \leq y \leq c$ برابر است با $-\sigma_Y$ ، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} M &= -2b \int_0^{y_Y} y \left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y} y \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y (-\sigma_Y) dy \\ &= \frac{2}{3} b y_Y^3 \sigma_Y + b c^2 \sigma_Y - b y_Y^2 \sigma_Y \\ M &= b c^2 \sigma_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^3}{c^3} \right) \quad (4-37) \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۴-۳۵)،

$$M = \frac{2}{3} M_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^3}{c^3} \right) \quad (4-38)$$

که در آن M_Y ماکزیمم لنگر الاستیک است. وقتی y_Y به صفر نزدیک می‌شود، لنگر خمشی به مقدار حدی زیر میل می‌کند:

$$M_p = \frac{2}{3} M_Y \quad (4-39)$$

را، که متناظر با تغییر شکل کاملاً پلاستیک است، لنگر پلاستیک عضو می‌گویند. گفتنی است که معادله (۴-۳۹) فقط برای عضو مستطیلی ساخته شده از یک ماده الاستوپلاستیک به کار می‌رود.

توزیع کرنش در مقطع عرضی پس از شروع تسلیم به صورت خطی می‌ماند، و از معادله (۴-۸) برای تعیین نیم ضخامت y_Y هسته الاستیک می‌توان استفاده کرد:

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \quad (4-40)$$

(ϵ_Y کرنش تسلیم و ρ شعاع انحنا متناظر با لنگر خمشی $M \geq M_Y$ است). وقتی لنگر خمشی با M_Y برابر است، $y_Y = c$ ؛ از معادله (۴-۴۰)،

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \quad (4-41)$$

(ρ_Y شعاع انحنا متناظر با ماکزیمم لنگر الاستیک M_Y است). از تقسیم (۴-۴۰) بر (۴-۴۱)، داریم:

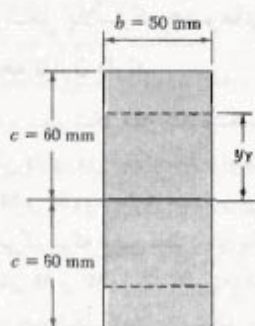
$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \quad (4-42)$$

با جایگذاری y_Y/c از (۴-۴۲) در (۴-۳۸)، لنگر خمشی M برحسب شعاع انحنا ρ سطح خشی به دست می‌آید:

$$M = \frac{2}{3} M_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\rho^3}{\rho_Y^3} \right) \quad (4-43)$$

مثال ۴-۵

عضوی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی $50 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$ (شکل ۴-۲۲) تحت لنگر خمشی $M = 36.8 \text{ kN.m}$ قرار دارد. این عضو از یک ماده الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم 240 MPa و مدول الاستیسیته 200 GPa ساخته شده است. مطلوب است: (الف) ضخامت هسته الاستیک، (ب) شعاع انحنای سطح خنثی.



شکل ۴-۲۲

(الف) ضخامت هسته الاستیک. ابتدا، ماکزیمم لنگر الاستیک M_Y را تعیین می‌کنیم. با جایگذاری داده‌ها در معادله (۴-۳۴)، داریم

$$\frac{I}{c} = \frac{1}{3} bc^3 = \frac{1}{3} (50 \times 10^{-3} \text{ m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

با جایگذاری این مقدار، و نیز $\sigma_Y = 240 \text{ MPa}$ در معادله (۴-۳۳)،

$$M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y = (120 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(240 \text{ MPa}) = 28.8 \text{ kN.m}$$

با جایگذاری مقادیر M و M_Y در معادله (۴-۳۸)، داریم

$$36.8 \text{ kN.m} = \frac{1}{3} (28.8 \text{ kN.m}) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_Y}{c}\right)^3 = 0.444 \Rightarrow \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

چون $c = 60 \text{ mm}$

$$y_Y = 0.666(60 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

لذا، ضخامت هسته الاستیک 80 mm است.

لنگرهای متناظر، به ترتیب، عبارتند از:

$$M_Y = \left(\frac{1}{3} c\right) R_Y = \frac{1}{3} bc^2 \sigma_Y \quad (4-44)$$

و

$$M_P = c R_P = bc^2 \sigma_Y \quad (4-45)$$

لذا، برای یک عضو مستطیلی، $M_P = \frac{3}{2} M_Y$ (معادله ۴-۳۹).

برای تیرها با مقطع عرضی غیرمستطیلی، محاسبه ماکزیمم لنگر الاستیک M_Y و ماکزیمم لنگر پلاستیک M_P معمولاً با استفاده از روش ترمیمی ساده می‌شود (مسئله نمونه ۴-۵). در این حالت کلی، دیده می‌شود که نسبت $k = M_P/M_Y$ معمولاً $\frac{3}{2}$ نیست. مثلاً، این نسبت برای تیرهای بال پهن تقریباً از 1.08 تا 1.14 است. نسبت $k = M_P/M_Y$ فقط به شکل مقطع عرضی بستگی دارد، و آن را ضرب شکل مقطع عرضی می‌گویند. اگر ضرب شکل k و ماکزیمم لنگر الاستیک M_Y یک تیر معلوم باشند، لنگر پلاستیک M_P تیر را در رابطه زیر می‌توان یافت:

$$M_P = k M_Y \quad (4-46)$$

نسبت M_P/σ_Y را، که از تقسیم لنگر پلاستیک M_P بر استقامت تسلیم σ_Y عضو به دست می‌آید، مدول پلاستیک عضو می‌گویند و با Z نشان داده می‌شود. اگر مدول پلاستیک Z و استقامت تسلیم σ_Y یک تیر معلوم باشند، لنگر پلاستیک M_P آن را از رابطه زیر می‌توان یافت:

$$M_P = Z \sigma_Y \quad (4-47)$$

با توجه به رابطه $M_Y = S \sigma_Y$ (معادله ۴-۱۸)، و مقایسه آن با معادله (۴-۴۷)، نتیجه می‌شود که ضریب شکل k را برحسب نسبت مدول پلاستیک به مدول الاستیک می‌توان بیان کرد:

$$k = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{Z \sigma_Y}{S \sigma_Y} = \frac{Z}{S} \quad (4-48)$$

طبق معادله‌های (۴-۴۵) و (۴-۴۷)، مدول پلاستیک یک

تیر مستطیلی چنین است:

$$Z = \frac{M_P}{\sigma_Y} = \frac{bc^2 \sigma_Y}{\sigma_Y} = bc^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

(b و h به ترتیب، عرض و ارتفاع مقطع عرضی تیر هستند).

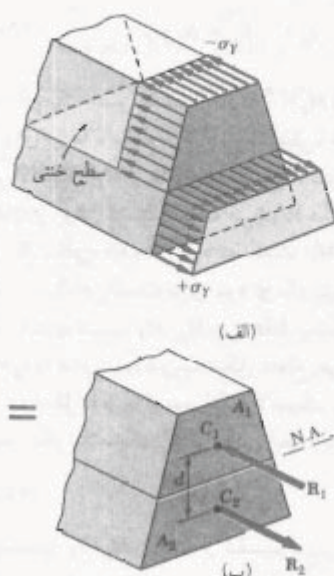
طبق معادله (۴-۱۹)، مدول الاستیک این تیر چنین است:

$$S = \frac{1}{6} bh^3$$

با جایگذاری مقادیر Z و S در معادله (۴-۴۸)، ضریب شکل تیر مستطیلی به دست می‌آید:

$$k = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{3} bh^3}{\frac{1}{6} bh^3} = \frac{2}{3}$$

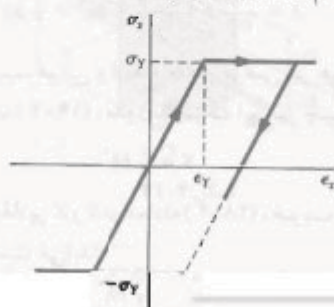
در مسئله نمونه ۴-۶، لنگر پلاستیک عضوی که فقط یک صفحه تقارن دارد محاسبه شده است.



شکل ۴-۴۳

۴-۱۱ تنش‌های باقیمانده

در قسمت‌های قبل دیدیم که اگر لنگر خمشی وارد بر یک عضو الاستوپلاستیک به اندازه کافی بزرگ باشد، در آن ناحیه پلاستیک به وجود می‌آید. اگر لنگر خمشی دوباره تا صفر کاهش یابد، کاهش تنش و کرنش در هر نقطه را در نمودار تنش-کرنش با یک خط مستقیم می‌توان نشان داد (شکل ۴-۴۴). همانطور که خواهید دید، مقدار نهایی تنش در یک نقطه، به‌طور کلی، صفر نیست. در اغلب نقاط، تنش باقیمانده و تنش وجود دارد که ممکن است با ماکزیمم تنش ایجاد شده در انتهای فاز بارگذاری هم‌علامت باشد یا نباشد.



شکل ۴-۴۴

(ب) شعاع انحنا، کرنش تسلیم چنین است:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{240 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

با حل ρ از معادله (۴-۴۰) و با جایگذاری مقادیر y_y و ϵ_y

$$\rho = \frac{y_y}{\epsilon_y} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3 \text{ m}$$

۴-۱۰ تغییر شکل پلاستیک عضوهایی که فقط یک

صفحه تقارن دارند

هنگام بحث درباره تغییر شکل‌های پلاستیک، فرض می‌شد عضو تحت خمش دارای دو صفحه تقارن است، یکی صفحه شامل کوپل‌های M و M' ، و دیگری عمود بر آن صفحه. اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که عضو فقط دارای یک صفحه تقارن، شامل کوپل‌های M و M' است. البته، فقط حالتی را تحلیل می‌کنیم که تغییر شکل کاملاً پلاستیک است و در آن تنش قائم یکنواخت در بالای سطح خمشی دارای مقدار $+\sigma_y$ و در پایین آن سطح دارای مقدار $+\sigma_y$ است (شکل ۴-۴۳ الف).

همانطور که در قسمت ۴-۸ گفته شد، وقتی مقطع عرضی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح متقارن نباشد، نمی‌توان فرض کرد محور خمشی بر محور گذرا از مرکز سطح منطبق است. برای تعیین مکان محور خمشی، نیروی برآیند فشاری R_1 و نیروی برآیند کششی R_2 را در شکل ۴-۴۳ ب که، به ترتیب، بر قسمت‌های A_1 و A_2 از مقطع عرضی وارد می‌شوند. در نظر می‌گیریم A_1 و A_2 ، به ترتیب، بالای محور خمشی و پایین آن قرار دارند. چون نیروهای R_1 و R_2 یک کوپل معادل یا کوپل وارد بر عضو را تشکیل می‌دهند، دارای مقدار یکسان هستند. بنابراین، $R_1 = R_2$ یا $A_1 \sigma_y = A_2 \sigma_y$. در نتیجه، $A_1 = A_2$. به عبارت دیگر، محور خمشی مقطع عرضی را به دو قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند. گفتنی است که محوری که به این طریق به دست می‌آید، به‌طور کلی، محور گذرا از مرکز سطح مقطع نیست.

همچنین، مشاهده می‌شود که خطوط اثر برآیندهای R_1 و R_2 از مراکز سطح C_1 و C_2 دو قسمتی که در بالا تعریف شدند می‌گذرند. اگر فاصله بین C_1 و C_2 را با d و مساحت کل مقطع عرضی را با A نشان دهیم، لنگر پلاستیک عضو را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$M_p = \left(\frac{1}{2} A \sigma_y \right) d$$

توزیع تنش معکوس ناشی از لنگر خمشی $۳۶/۸ \text{ kN.m}$ در فاز بار برداری به صورت خطی است و در شکل ۴-۴۵ ب نشان داده شده است. ماکزیمم تنش σ'_m از معادله (۴-۱۵) به دست می آید. از مثال ۴-۵۵، $I/c = ۱۲۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^3$ و می نویسیم

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۶/۸ \text{ kN.m}}{۱۲۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^3} = ۳۰۶/۷ \text{ MPa}$$

با ترکیب این دو توزیع تنش، تنش های باقیمانده به دست می آید (شکل ۴-۴۵ ج). دیده می شود، با وجود اینکه تنش های معکوس از استقامت تسلیم σ_y بیشتر می شوند، فرض توزیع خطی تنش های معکوس هنوز صحت دارد، زیرا این تنش ها از $۲\sigma_y$ بیشتر نشده اند.

(ب) شعاع انحنای پس از باربرداری. قانون هوک را در هر نقطه از هسته $40 \text{ mm} < |y|$ می توان به کار برد، زیرا هیچ تغییر شکل پلاستیکی در آن قسمت عضو به وجود نمی آید. لذا، کرنش باقیمانده در فاصله $y = 40 \text{ mm}$ چنین است:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-۳۵/۵ \times ۱۰^{-۶} \text{ Pa}}{۲۰۰ \times ۱۰^9 \text{ Pa}} = -۱۷۷/۵ \times ۱۰^{-۶}$$

با حل ρ از معادله (۴-۸) و با جایگذاری مقادیر y و ϵ_x ،

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{40 \times ۱۰^{-۳} \text{ m}}{۱۷۷/۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۲۲۵ \text{ m}$$

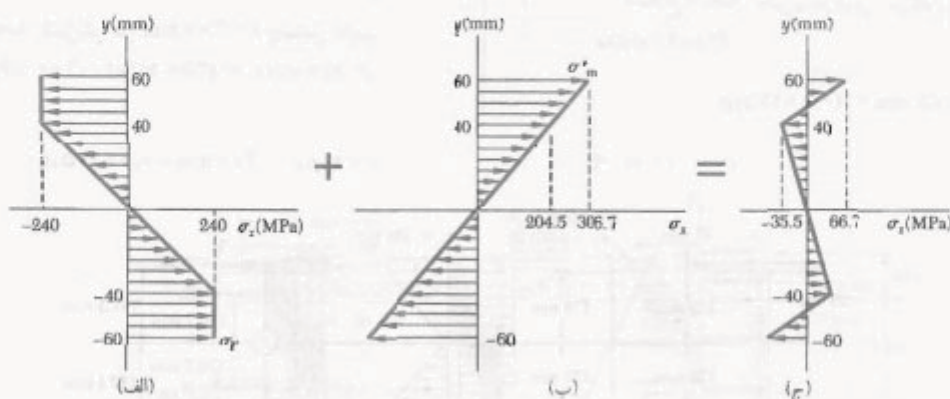
مقدار حاصل برای ρ ، پس از حذف بار، تغییر شکل دائمی عضو را نشان می دهد.

چون در فاز باربرداری در تمام نقاط رابطه خطی بین σ_x و ϵ_x به کار می رود، برای تعیین تغییر تنش در هر نقطه می توان از معادله (۴-۱۶) استفاده کرد. به عبارت دیگر، فاز باربرداری را با فرض اینکه عضو کاملاً الاستیک است می توان بررسی کرد. تنش های باقیمانده را با استفاده از اصلی ترکیب می توان به دست آورد (به همان صورتی که در قسمت ۲-۲۰ برای بارگذاری مرکزی محوری توضیح داده شد و مجدداً در قسمت ۳-۱۱ برای پیچش به کار رفت). تنش های ناشی از اعمال لنگر خمشی M و تنش های معکوس ناشی از لنگر خمشی M را در فاز بار برداری در نظر می گیریم. تنش های گروه اول رفتار الاستوپلاستیکی عضو را در فاز بارگذاری، و تنش های گروه دوم رفتار خطی همان ماده را در فاز باربرداری نشان می دهند. با جمع کردن این دو گروه، توزیع تنش های باقیمانده در عضو به دست می آید.

مثال ۴-۶

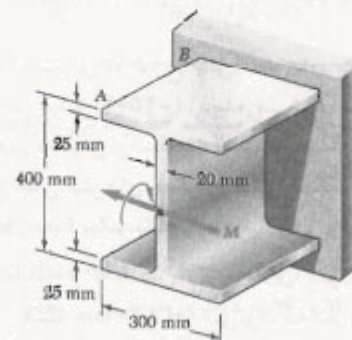
برای عضو مثال ۴-۵۵، مطلوب است: (الف) توزیع تنش های باقیمانده، (ب) شعاع انحنای پس از اینکه لنگر خمشی از مقدار ماکزیمم $۳۶/۸ \text{ kN.m}$ به صفر کاهش می یابد.

(الف) توزیع تنش های باقیمانده. از مثال ۴-۵۵ دیده می شود که استقامت تسلیم σ_y برابر با ۲۴۰ MPa و ضخامت هسته الاستیک، $۲۷/۲$ ، برابر با ۸۰ mm است. توزیع تنش در عضو بارگذاری شده در شکل ۴-۴۵ الف نشان داده شده است.



مسئله نمونه ۴-۵

تیر AB از فولاد کم آلیاژ پر استقامت الاستوپلاستیک ($\sigma_Y = 350 \text{ MPa}$ و $E = 200 \text{ GPa}$) ساخته شده است. با صرفنظر از تأثیر گرده‌ها، مطلوبست لنگر خمشی M و شعاع انحنای متناظر (الف) وقتی تعلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) وقتی بال‌ها کاملاً پلاستیک شده‌اند.



حل

الف. شروع تسلیم. ممان اینرسی مقطع نسبت به محور گذرا از مرکز سطح چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (300 \text{ mm})(400 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12} (300 \text{ mm} - 20 \text{ mm})(250 \text{ mm})^3 = 600 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

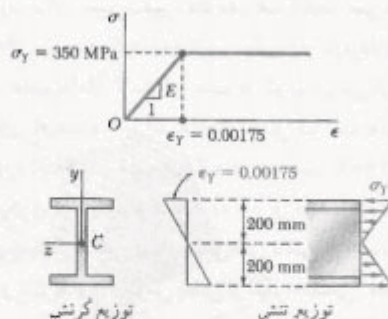
لنگر خمشی. برای $\sigma_{\max} = \sigma_Y = 350 \text{ MPa}$ و $c = 200 \text{ mm}$

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(350 \text{ MPa})(600 \times 10^6 \text{ mm}^4)}{200 \text{ mm}}$$

$$M_Y = 1.05 \times 10^7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

شعاع انحنای. کرنش در $c = 200 \text{ mm}$ چنین است $\epsilon_Y = \sigma_Y / E = (350 \text{ MPa}) / (200 \text{ GPa}) = 0.00175$ معادله (۴-۴).

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \quad 200 \text{ mm} = 0.00175 \rho_Y \quad \rho_Y = 114 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



ب. بال‌های کاملاً پلاستیک. وقتی بال‌ها کاملاً پلاستیک شده‌اند، کرنش و تنش در مقطع مانند شکل زیر هستند. نیروهای برآیند فشاری R_1 و R_2 را که بر بال و بالایی وارد می‌شوند، و نیروهای برآیند کششی R_3 و R_4 را در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم:

$$R_1 = R_2 = (350 \text{ MPa})(0.3 \text{ m})(0.0175 \text{ m}) = 1.8375 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$R_3 = R_4 = \frac{1}{2} (350 \text{ MPa})(0.175 \text{ m})(0.0175 \text{ m}) = 0.539 \text{ kN}$$

لنگر خمشی. لنگر R_1, R_2, R_3, R_4 و نسبت به محور z محاسبه و آنها را با هم جمع می‌کنیم:

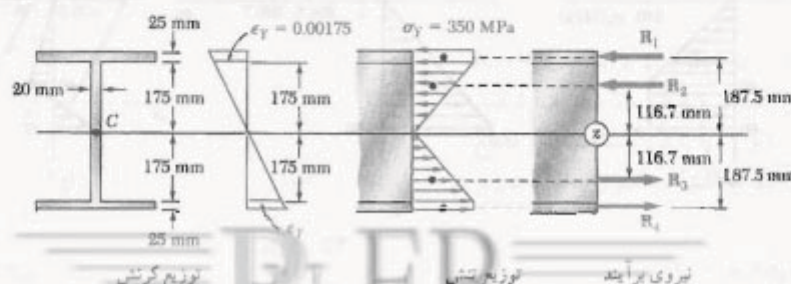
$$M = 2[R_1(0.1875 \text{ m}) + R_2(0.1167 \text{ m})] + 2[(0.539 \text{ kN})(0.1875 \text{ m}) + (0.539 \text{ kN})(0.1167 \text{ m})]$$

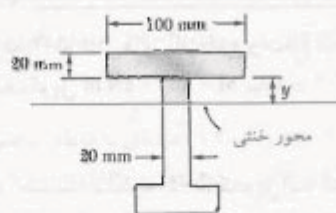
$$M = 1.13 \times 10^7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

شعاع انحنای. چون در این بارگذاری $y_Y = 175 \text{ mm}$ از معادله (۴-۴).

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \quad 0.175 \text{ m} = (0.00175) \rho$$

$$\rho = 100 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$





این نیرو از مرکز سطح A_1 می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$R_1 = A_1 \sigma_y = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}$$

$$R_2 = A_2 \sigma_y = [(0.020 \text{ m})(0.020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}$$

$$R_3 = A_3 \sigma_y = [(0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

$$R_4 = A_4 \sigma_y = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

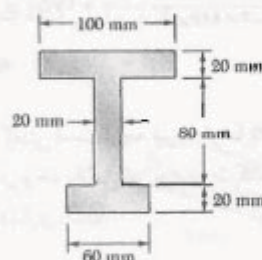
لنگر پلاستیک M_p از مجموع لنگر نیروها نسبت به محور z بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_p &= (0.030 \text{ m}) R_1 + (0.010 \text{ m}) R_2 + (0.030 \text{ m}) R_3 \\ &\quad + (0.070 \text{ m}) R_4 \\ &= (0.030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0.010 \text{ m})(96 \text{ kN}) \\ &\quad + (0.030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0.070 \text{ m})(288 \text{ kN}) \\ &= 44.16 \text{ kN.m} \quad M_p = 44.16 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

توجه: چون مقطع عرضی نسبت به محور z تقارن ندارد، مجموع لنگرهای R_1 و R_3 با مجموع لنگرهای R_2 و R_4 برابر نیست.

مسئله نمونه ۴-۶

لنگر پلاستیک M_p یک تیر با مقطع عرضی نشان داده شده را وقتی تیر حول یک محور افقی خم می‌شود بیابید. فرض کنید که تیر از نوع الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم 240 MPa است.



حل

محور خشی. وقتی تغییر شکل کاملاً پلاستیک است، محور خشی مقطع عرضی را به دو قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند، چون مساحت کل عبارت است از:

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4800 \text{ mm}^2$$

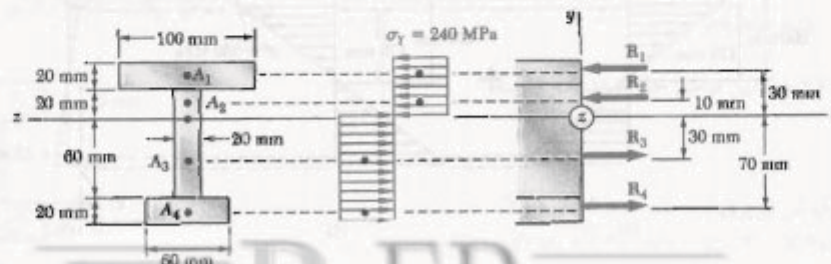
مساحتی که بالای محور خشی قرار دارد 2400 mm^2 است. می‌نویسیم:

$$(20)(100) + 20y = 2400 \Rightarrow y = 20 \text{ mm}$$

توجه کنید که محور خشی از مرکز سطح مقطع عرضی نمی‌گذرد.

لنگر پلاستیک. برابری نیروهای جزئی وارد بر مساحت A_1 چنین است:

$$R_1 = A_1 \sigma_y$$

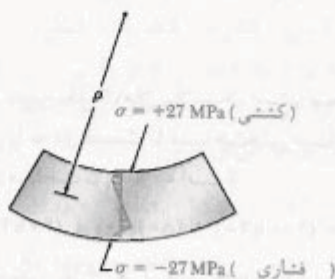


شعاع انحنای دائمی. در $y = 175 \text{ mm}$ ، تنش باقیمانده برابر است با $\sigma = -20 \text{ MPa}$ ، چون هیچ تغییر شکل پلاستیک در این نقطه روی نداده است. قانون هوک را می‌توان به کار برد و داریم $\epsilon_y = \sigma/E$ ، با توجه به معادله (۸-۴).

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_y} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(0.175 \text{ m})(200 \text{ GPa})}{-20 \text{ MPa}} = +1750 \text{ m}$$

$$\rho = 1750 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

گفتنی است گرچه تیر به طرف بالا تقعر دارد، ولی تنش باقیمانده در وجه بالایی تیر به صورت کششی و در وجه پایینی به صورت فشاری است.



مسئله نمونه ۷-۴
برای تیر مسئله نمونه ۵-۲، تنش‌های باقیمانده و شعاع انحنای دائمی را پس از حذف کوپل $M = 1130 \text{ kN.m}$ بیابید.

حل

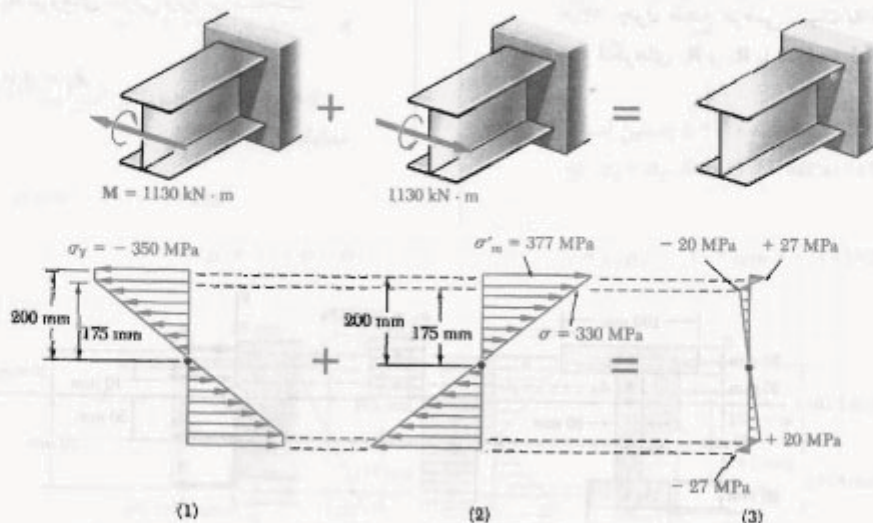
بارگذاری. در مسئله نمونه ۵-۲، کوپل با لنگر $M = 1130 \text{ kN.m}$ وارد شد و تنش‌های نشان داده شده در شکل ۱ به دست آمد.

باربرداری الاستیک. با اعمال لنگر مخالف $M = -1130 \text{ kN.m}$ (که مساوی و متضاد با لنگر کوپل اولیه است)، تیر باربرداری می‌شود. در فاز باربرداری، رفتار تیر کاملاً الاستیک است. از مسئله نمونه ۵-۲، $I = 600 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ، در نتیجه، تنش ماکزیمم چنین است:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(1130 \text{ kN.m})(0.175 \text{ m})}{600 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 377 \text{ MPa}$$

تنش‌های ناشی از باربرداری در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.

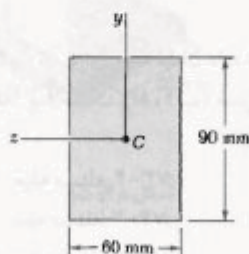
تنش‌های باقیمانده. با ترکیب تنش‌های ناشی از بارگذاری (شکل ۱) و باربرداری (شکل ۲)، تنش‌های باقیمانده در تیر به دست می‌آید (شکل ۳).



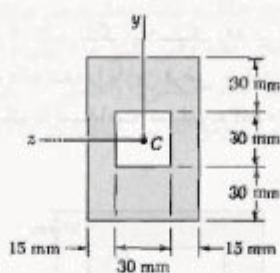
REB

۷۲-۴ در مسئله ۷۱-۴، مقدار M را برای شعاع زیراسیون $9/4$ m بیابید.

۷۳-۴ و ۷۴-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ($E = 200$ GPa و $\sigma_y = 240$ MPa) ساخته شده است. برای خمش حول محور z ، مطلوبست لنگر خمشی که به ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت 30 mm هستند.

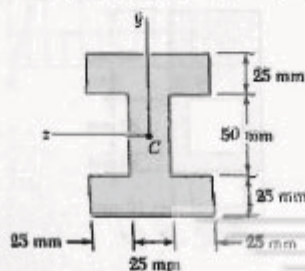


شکل م-۷۳



شکل م-۷۴

۷۵-۴ و ۷۶-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ($E = 200$ GPa و $\sigma_y = 300$ MPa) ساخته شده است. برای خمش حول محور z ، مطلوبست لنگر خمشی که به ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت 25 mm هستند.



شکل م-۷۵

مسائل

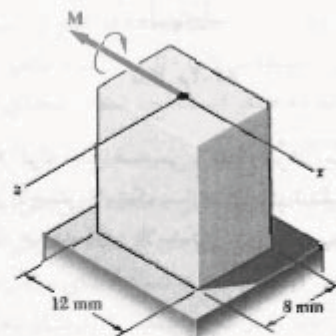
۶۷-۴ میله فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده از نوع الاستوپلاستیک است. $E = 200$ GPa و $\sigma_y = 230$ MPa. مطلوبست لنگر خمشی M که به ازای آن: (الف) ابتدا تسلیم روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت 2 mm باشند.



شکل م-۶۷

۶۸-۴ در مسئله ۶۷-۴، ضخامت مناطق پلاستیک را در بالا و پایین میله در شرایط زیر بیابید: (الف) $M = 30$ N.m، (ب) $M = 35$ N.m.

۶۹-۴ میله منشوری نشان داده شده با $\sigma_y = 300$ MPa تحت کوپل M که به موازات محور x است قرار دارد. مطلوبست لنگر M کوپل که به ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) هسته الاستیک میله به ضخامت 4 mm است.

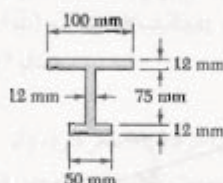


شکل م-۶۹

۷۰-۴ مسئله ۶۹-۴ را با این فرض حل کنید که M به موازات محور z باشد.

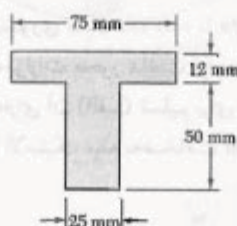
۷۱-۴ میله چهارگوش توپری به ضلع 15 mm از فولاد الاستوپلاستیک است. $E = 200$ GPa و $\sigma_y = 330$ MPa. اگر کوپل M به موازات یک ضلع مقطع عرضی بر میله وارد شود، مقدار M را برای شعاع زیراسیون $1/8$ m بیابید.

۸۳-۴ لنگر پلاستیک M_p را برای مقطع عرضی نشان داده شده بیابید. تیر از جنس فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم 250 MPa است.



شکل م ۸۳-۴

۸۴-۴ لنگر پلاستیک M_p را برای مقطع عرضی نشان داده شده بیابید. تیر از جنس فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم 330 MPa است.



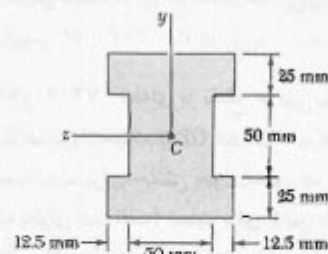
شکل م ۸۴-۴

۸۵-۴ لوله جدار ضخیمی با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم σ_y ساخته شده است. عبارت لنگر پلاستیک M_p را بر حسب c_1 ، c_2 و σ_y بیابید.



شکل م ۸۵-۴ و ۸۶-۴

۸۶-۴ لنگر پلاستیک M_p لوله جدار ضخیمی با مقطع عرضی نشان داده شده را بیابید در صورتی که بدانیم $\sigma_y = 240 \text{ MPa}$ و $c_1 = 40 \text{ mm}$ ، $c_2 = 60 \text{ mm}$.



شکل م ۷۶-۴

۷۷-۴ تا ۸۰-۴ برای میله نشان داده شده، مطلوب است:
(الف) لنگر کاملاً پلاستیک M_p ، (ب) ضریب شکل مقطع عرضی.

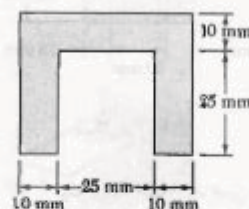
۷۷-۴ میله مسئله ۷۳-۴:

۷۸-۴ میله مسئله ۷۴-۴:

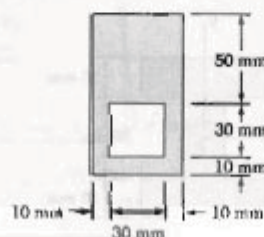
۷۹-۴ میله مسئله ۷۵-۴:

۸۰-۴ میله مسئله ۷۶-۴:

۸۱-۴ و ۸۲-۴ لنگر پلاستیک M_p تیر فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده را با این فرض بیابید که تیر از فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم 240 MPa ساخته شده است.

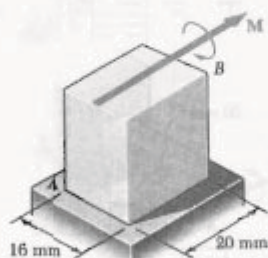


شکل م ۸۱-۴



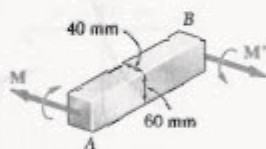
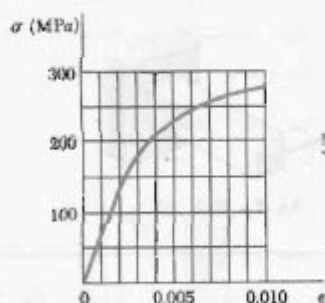
شکل م ۸۲-۴

۹۵-۴ میله منشوری AB از فولاد الاستوپلاستیک ($E = 200 \text{ GPa}$) ساخته شده است. اگر با اعمال لنگر کوپل $M = 350 \text{ N.m}$ بر میله شعاع انحنا 2.4 m باشد، مطلوبست: (الف) استقامت تسلیم σ_y فولاد، (ب) ضخامت هسته الاستیک میله.



شکل م-۹۵

۹۶-۴ میله منشوری AB از آلایز آلومینیوم، با نمودار تنش-کرنش نشان داده شده، ساخته شده است. به فرض اینکه نمودارهای σ - ϵ در فشار و کشش مشابه هم هستند، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای میله وقتی تنش ماکزیمم 250 MPa است، (ب) مقدار متناظر لنگر خمشی. (راهنمایی: در قسمت ب، σ را برحسب ϵ رسم و از روش تقریبی انتگرالگیری استفاده کنید.



شکل م-۹۶

۸۷-۴ و ۸۸-۴ برای تیر نشان داده شده، کوپلی که لنگر آن با لنگر کاملاً پلاستیک M_p مساوی است وارد و سپس حذف می‌شود. با استفاده از استقامت تسلیم 240 MPa ، تنش باقیمانده را در $y = 45 \text{ mm}$ بیابید.
۸۷-۴ تیر مسئله ۷۳-۴.
۸۸-۴ تیر مسئله ۷۴-۴.

۸۹-۴ و ۹۰-۴ برای تیر نشان داده شده، کوپلی که لنگر آن با لنگر کاملاً پلاستیک M_p مساوی است وارد و سپس حذف می‌شود. با استفاده از استقامت تسلیم 290 MPa ، تنش باقیمانده را در $y = 25 \text{ mm}$ و در $y = 50 \text{ mm}$ بیابید.
۸۹-۴ تیر مسئله ۷۵-۴.
۹۰-۴ تیر مسئله ۷۶-۴.

۹۱-۴ کوپل خمشی بر میله مسئله ۷۳-۴ وارد شده است، و مناطق پلاستیک به ضخامت 30 mm را در بالا و پایین میله به وجود آورده است. پس از حذف کوپل، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در $y = 25 \text{ mm}$ ، (ب) نقاطی که در آنها تنش باقیمانده صفر است، (ج) شعاع انحنای متناظر با تغییر شکل دائمی میله.

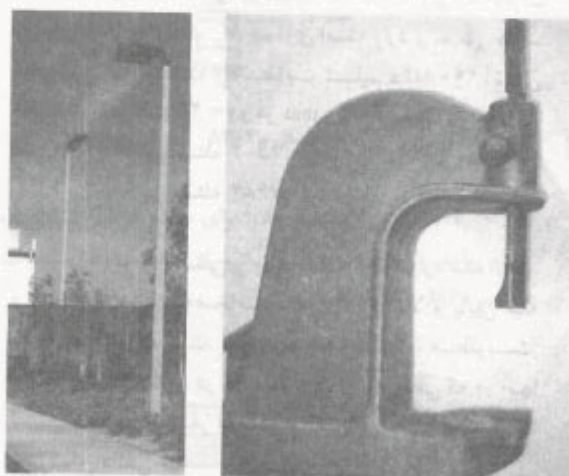
۹۲-۴ کوپل خمشی بر میله مسئله ۷۵-۴ وارد شده است، و مناطق پلاستیک به ضخامت 50 mm را در بالا و پایین میله به وجود آورده است. پس از حذف کوپل، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در $y = 50 \text{ mm}$ ، (ب) نقاطی که در آنها تنش باقیمانده صفر است، (ج) شعاع انحنای متناظر با تغییر شکل دائمی میله.

۹۳-۴ یک میله مستطیلی مستقیم و بی‌تنش، با اعمال دو کوپل M به صورت قوس دایره‌ای با شعاع ρ در می‌آید. پس از حذف کوپل‌ها، دیده می‌شود که شعاع انحنای میله ρ_p است. اگر شعاع انحنای میله را در شروع تسلیم با ρ_y نشان دهیم، نشان دهید که شعاع‌های انحنای در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_y} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{\rho_y} \right) \right] \right\}$$

۹۴-۴ میله توپری با مقطع عرضی مستطیلی از یک ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. اگر لنگر خمشی و شعاع انحنای در شروع تسلیم، به ترتیب، با M_y و ρ_y نشان دهیم، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای وقتی لنگر کوپل $M = 1.25 M_y$ بر میله وارد می‌شود، (ب) شعاع انحنای پس از حذف کوپل. نتایج را با استفاده از رابطه بعدست آمده در مسئله ۹۳-۴ واری کنید.

حالتی بررسی می‌کنیم که خط اثر بار از مرکز سطح مقطع عرضی نگذرد. این حالت را بارگذاری خارج از مرکز می‌گویند. در شکل‌های ۴۶-۴ و ۴۷-۴، دو نمونه از بارگذاری خارج از مرکز نشان داده شده است. در تیرهای برق اتوبان‌ها، وزن لامپ موجب بارگذاری خارج از مرکز در تیر برق می‌شود. به‌طور مشابه، نیروهای عمودی وارد بر یک پرس باعث بارگذاری خارج از مرکز برای ستون نگهدارنده پرس می‌شوند.

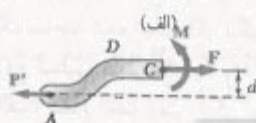
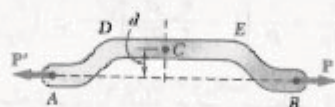


شکل ۴۶-۴

شکل ۴۷-۴

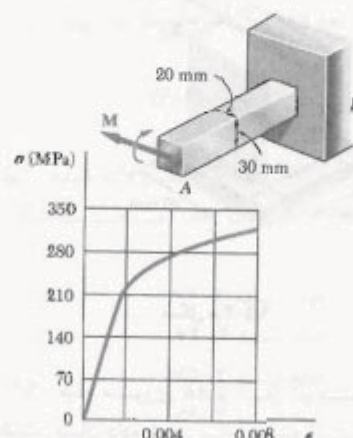
در این قسمت، فقط عضوهایی را تحلیل می‌کنیم که دارای صفحه تقارن هستند، و فرض می‌کنیم که بار در صفحه تقارن عضو وارد می‌شود (شکل ۴۸-۴ الف). لذا، نیروهای داخلی مؤثر بر یک مقطع عرضی داده شده را می‌توان با نیروی F وارد بر مرکز سطح مقطع عرضی و کوپل M که در صفحه عضو اثر می‌کند نشان داد (شکل ۴۸-۴ ب). از تعادل نمودار آزاد AC نتیجه می‌شود که نیروی F با P' مساوی و در جهت مخالف آن است و لنگر کوپل M با لنگر P' نسبت به C مساوی و در جهت مخالف آن است. اگر فاصله مرکز سطح C را از خط اثر نیروهای P و P' (خط AB) با d نشان دهیم، داریم

$$F = P \quad \text{و} \quad M = Pd \quad (۴۹-۴)$$



شکل ۴۸-۴

۹۷-۴ میله منشوری AB از آلیاژ برنز، با نمودار تنش-کرنش داده شده، ساخته شده است. به‌فرض اینکه نمودارهای σ - ϵ در فشار و کشش مشابه هم هستند، مطلوب است: (الف) تنش ماکزیمم در میله وقتی شعاع اتحنا 2.5 mm است، (ب) مقدار متناظر لنگر خمشی. (به راهنمایی مسئله ۹۶-۴ نگاه کنید).



شکل ۹۷-۴

۹۸-۴ میله منشوری با مقطع عرضی مستطیلی از آلیاژی با نمودار تنش-کرنش نشان داده شده ساخته شده است. این نمودار را می‌توان با رابطه $\epsilon = k\sigma^n$ برای $\sigma > 0$ و $\epsilon = -k\sigma^n$ برای $\sigma < 0$ نشان داد. اگر کوپل M بر میله وارد شود، نشان دهید که تنش ماکزیمم عبارت است از

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n} \frac{Mc}{I}$$

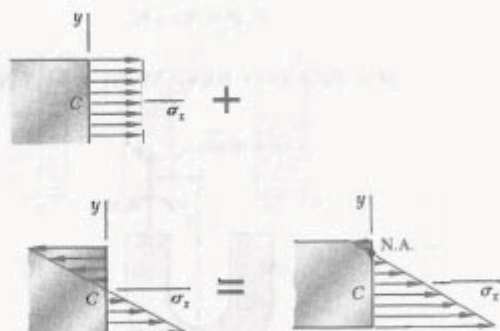


شکل ۹۸-۴

۱۲-۴ بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

در قسمت ۵.۱ دیدیم که توزیع تنش را در مقطع عرضی عضوی که تحت بارگذاری محوری است می‌توان یکنواخت فرض کرد به شرطی که خط اثر بارهای P و P' از مرکز سطح مقطع عرضی بگذرد. این را بارگذاری مرکزی می‌گویند. حال، توزیع تنش را در

است که محور خمشی بر محور گذرا از مرکز سطح مقطع منطبق
لیست، زیرا برای $y = 0$ و $\sigma_x = 0$.

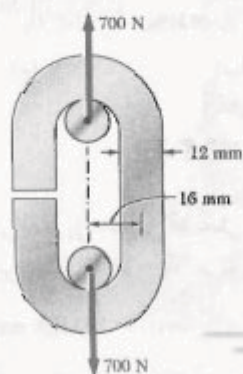


شکل ۵۱-۴

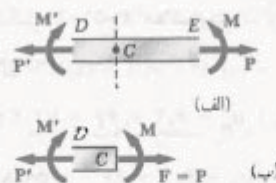
نتایج بالا فقط تا وقتی صحت دارند که اصل ترکیب
(قسمت ۲-۱۲) و اصل سنت-ونانت (قسمت ۲-۱۷)
به کار روند. یعنی، تنش‌های موجود از حد تناسب ماده فراتر
نروند، تغییر شکل ناشی از خمش بر فاصله d در شکل
۴-۴۸ الف خیلی تأثیر نگذارد، و مقطع عرضی که در آن تنش
محاسبه می‌شود خیلی نزدیک به نقاط D یا E در شکل
۴-۴۸ الف نباشند. این شرایط نشان می‌دهند که روش ترکیب را
نمی‌توان برای تغییر شکل پلاستیک به کار برد.

مثال ۴-۷

با خم کردن میله‌های فولادی کم‌کربن به قطر ۱۲ mm، زنجیر
حلقه باز نشان داده به دست آمده است (شکل ۴-۵۲). اگر بار
۷۰۰ N بر زنجیر وارد شود، مطلوب است: (الف) ماکزیمم
تنش‌های کششی و فشاری در قسمت مستقیم حلقه، (ب) فاصله
بین خط گذرا از مرکز سطح و محور خمشی مقطع عرضی.



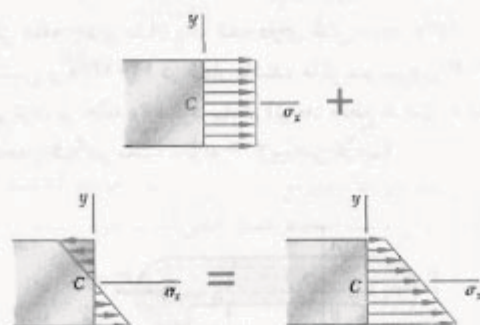
شکل ۵۲-۴



شکل ۴-۴۹

حال، قسمت مستقیم DE از عضو AB را جدا می‌کنیم و آن را
تحت بارهای مرکزی P و P' و کوپل‌های M و M' قرار می‌دهیم
(شکل ۴-۴۹). نیروهای داخلی در مقطع عرضی داده شده را با
نیروی F و کوپل M نشان می‌دهیم. از ترکیب توزیع تنش
یکنواخت ناشی از بارهای مرکزی P و P' و توزیع خطی ناشی
از کوپل‌های خمشی M و M' ، توزیع تنش در برگذاری خارج از
مرکز به دست می‌آید (شکل ۴-۵۰):

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{مرکزی}} + (\sigma_x)_{\text{خمشی}}$$



شکل ۵۰-۴

با توجه به معادله‌های (۵۰-۱) و (۴-۱۶)،

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (50-4)$$

که در آن A مساحت مقطع عرضی و I ممان اینرسی نسبت به
محور گذرا از مرکز سطح است، و y از محور مرکزی مقطع
عرضی اندازه‌گیری می‌شود. رابطه بالا نشان می‌دهد که توزیع
تنش در عرض مقطع خطی است نه یکنواخت. برحسب شکل
هندسی مقطع عرضی و خروج از مرکز بر، تنش‌های مرکب
می‌توانند دارای علامت یکسان باشند (شکل ۴-۵۰)، یا بعضی
از آنها دارای علامت مثبت و بعضی دارای علامت منفی باشند
(شکل ۴-۵۱). در حالت دوم، خطی در مقطع وجود دارد که در
امتداد آن $\sigma_x = 0$ ، این خط را محور خمشی مقطع می‌گویند. گفتنی

با ترکیب این دو توزیع تنش در بارگذاری خارج از مرکز داده شده را می‌یابیم (شکل ۴-۵۴). ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری در مقطع، به ترتیب، عبارتند از:

$$\sigma_t = \sigma_o + \sigma_m = 67.2 + 66 = 133.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_o - \sigma_m = 67.2 - 66 = 1.2 \text{ MPa}$$

(ب) فاصله بین محور گذرا از مرکز سطح و محور خشی. با قرار دادن $\sigma_x = 0$ در معادله (۴-۵۰) و با حل y_o ، فاصله مزبور به‌دست می‌آید:

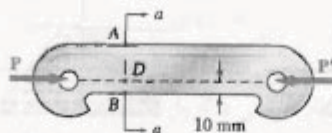
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_o}{I}$$

$$y_o = \left(\frac{P}{A} \right) \left(\frac{I}{M} \right) = (67.2 \text{ MPa}) \frac{1.0179 \times 10^{-11} \text{ m}^4}{11.7 \text{ N.m}}$$

$$y_o = 0.56 \text{ mm}$$

مسئله نمونه ۴-۸

اگر حلقه چدنی نشان داده شده دارای تنش مجاز 30 MPa کشش و 120 MPa در فشار باشند، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان بر حلقه وارد کرد بیابید. (توجه: مقطع عرضی T شکل حلقه را قبلاً در مسئله نمونه ۲-۴ بررسی کردیم).



حل

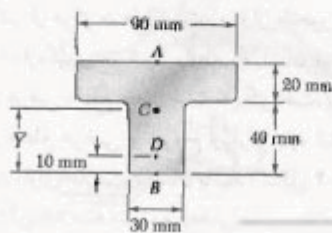
خواص مقطع عرضی. از مسئله نمونه ۲-۴،

$$A = 3000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \bar{Y} = 28 \text{ mm} = 0.028 \text{ m}$$

$$I = 868 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

حال، می‌نویسیم:

$$d = (0.028 \text{ m}) + (0.010 \text{ m}) = 0.038 \text{ m}$$



(الف) ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری. نیروهای داخلی در مقطع عرضی معادل‌اند با نیروی P و گویل خمشی M (شکل ۴-۵۳) با مقادیر زیر:

$$P = 700 \text{ N}$$

$$M = Pd = (700 \text{ N})(0.016 \text{ m}) = 11.2 \text{ N.m}$$

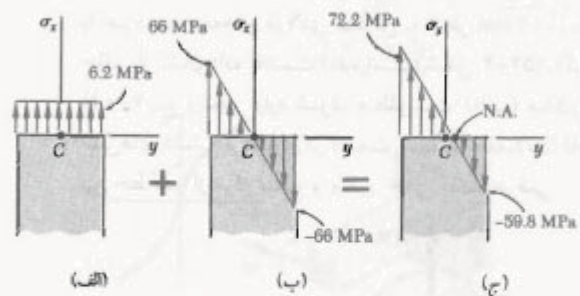


شکل ۴-۵۳

توزیع تنش در قسمت‌های الف و ب شکل ۴-۵۴ داده شده‌اند. توزیع ناشی از بار مرکزی P یکنواخت و مساوی با $\sigma_o = P/A$ است. می‌نویسیم:

$$A = \pi c^2 = \pi (6 \text{ mm})^2 = 113.1 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{700 \text{ N}}{113.1 \text{ mm}^2} = 6.2 \text{ MPa}$$



شکل ۴-۵۴

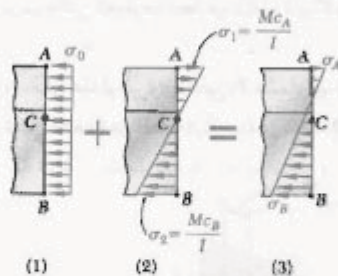
توزیع ناشی از گویل خمشی M خطی است و تنش ماکزیمم حاصل برابر است با $\sigma_m = Mc/I$. می‌نویسیم:

$$I = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi (6 \text{ mm})^4 = 1.0179 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(11.2 \times 10^{-3} \text{ N.m})(6 \text{ mm})}{1.0179 \text{ mm}^4} = 66 \text{ MPa}$$

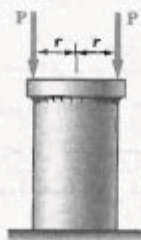
با انتخاب مقدار کوچکتر، تنش‌های حاصل از تنش مجاز بیشتر نمی‌شوند. در نتیجه،

$$P = 77.0 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



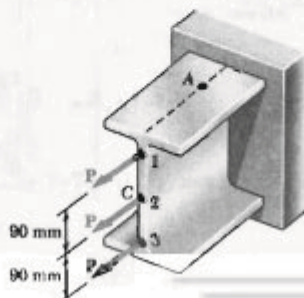
مسائل

۹۹-۴ دو نیروی P را به‌طور جداگانه یا همزمان می‌توان بر ورقه‌ای که به میله توپر استوانه‌ای به شعاع r جوش شده است وارد کرد. مطلوبست ماکزیم تنش فشاری در میله استوانه‌ای: (الف) وقتی هر دو نیرو وارد شوند، (ب) وقتی یکی از نیروها وارد شود.



شکل م ۹۹-۴

۱۰۰-۴ سه بار مجوزی، هر یک با مقدار $P = 50 \text{ kN}$ ، را بر انتهای تیر فولادی نورد $W 200 \times 31.1$ می‌توان وارد کرد. مطلوبست تنش در نقطه A : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای وقتی که بارها فقط در نقاط ۱ و ۲ وارد شوند.



شکل م ۱۰۰-۴ و ۱۰۱-۴

نیرو و کوپل در C ، نیروی P را با سیستم نیرو-کوپل معادل در مرکز سطح C جایگزین می‌کنیم

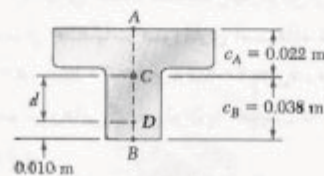
$$P = P \quad M = P(d) = P(0.1028 \text{ m}) = 0.1028 P$$

نیروی P وارد بر مرکز سطح باعث توزیع تنش یکنواخت می‌شود (شکل ۱) و کوپل خمشی M باعث توزیع تنش خطی می‌شود (شکل ۲).

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333 P \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.1028 P)(0.1028)}{868 \times 10^{-9}} = 12.1 P \quad (\text{کششی})$$

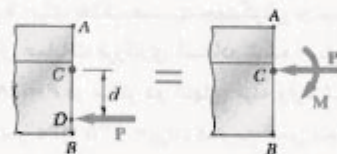
$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.1028 P)(0.1028)}{868 \times 10^{-9}} = 12.1 P \quad (\text{فشاری})$$



ترکیب. با ترکیب توزیع تنش‌های ناشی از بار مرکزی P و کوپل خمشی M ، توزیع تنش کل به‌دست می‌آید (شکل ۳). چون کشش مثبت است و فشار منفی است، می‌نویسیم:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333 P + 12.1 P = -321 P \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333 P - 12.1 P = -345 P \quad (\text{فشاری})$$



ماکزیم بار مجاز. برای تعیین مقدار P ، که به‌ازای آن تنش کششی در نقطه A مساوی 30 MPa است، می‌نویسیم:

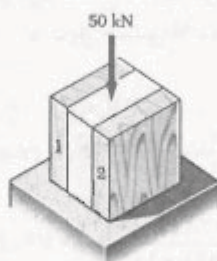
$$\sigma_A = 321 P = 30 \text{ MPa} \Rightarrow P = 93.6 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

برای تعیین مقدار P ، که به‌ازای آن تنش در B مساوی تنش مجاز فشاری 120 MPa است، می‌نویسیم:

$$\sigma_B = -345 P = -120 \text{ MPa} \Rightarrow P = 34.8 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

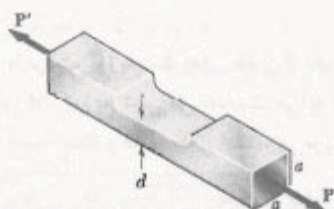


مطلوبست ماکزیم تنش فشازی در ستون پس از اعمال بار 50 kN در مرکز قسمت بالایی ستون در صورتی که: (الف) ستون به صورت گفته شده باشد، (ب) نطعه ۱ حذف شود، (ج) قطعات ۱ و ۲ حذف شوند.



شکل م-۴-۱۰۵

۴-۱۰۶ برای حذف قسمت چهارگوش از میله توپر نشان داده شده، از عملیات فرزکاری استفاده شده است. اگر $\sigma_{all} = 60 \text{ MPa}$ و $d = 20 \text{ mm}$ ، $a = 30 \text{ mm}$ مقدار P ماکزیم نیروهایی که می توان با اطمینان در مراکز دو انتهای میله وارد کرد.



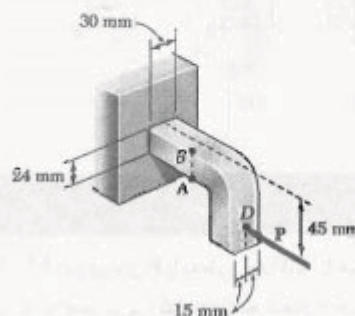
شکل م-۴-۱۰۶ و م-۴-۱۰۷

۴-۱۰۷ برای حذف قسمت چهارگوش از میله توپر نشان داده شده، از عملیات فرزکاری استفاده شده است. نیروها با مقدار $P = 18 \text{ kN}$ در مراکز دو انتهای میله وارد شده اند. اگر $\sigma_{all} = 135 \text{ MPa}$ و $a = 30 \text{ mm}$ کمترین عمق مجاز d قسمت فرز شده را بیابید.

۴-۱۰۸ چهار نیروی نشان داده شده بر صفحه صلبی که توسط تیر توپر فولادی با شعاع a نگه داشته شده است وارد می شود. مطلوبست تنش ماکزیم در تیر وقتی: (الف) تمام چهار نیرو وارد شوند. (ب) نیرو در D حذف شود، (ج) نیروها در C و D حذف شوند.

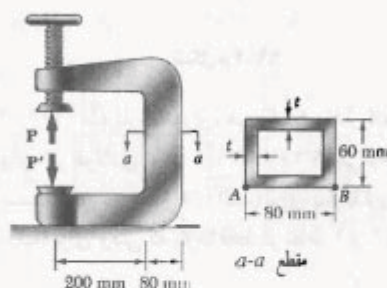
۴-۱۰۱ سه بار محوری، هر یک با مقدار $P = 50 \text{ kN}$ ، را بر انتهای تیر فولادی نورد $W 200 \times 31.1$ می توان وارد کرد. مطلوبست تنش در نقطه A : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای وقتی که بارها فقط در نقاط ۲ و ۳ وارد شوند.

۴-۱۰۲ اگر مقدار نیروی افقی P مساوی 8 kN باشد، مطلوبست تنش: (الف) در نقطه A ، (ب) در نقطه B .



شکل م-۴-۱۰۲

۴-۱۰۳ قسمت عمودی پرس نشان داده شده، از یک لوله مستطیلی با ضخامت دیواره $t = 10 \text{ mm}$ تشکیل شده است. اگر پرس را روی قطعات چوبی که چسب خورده اند تا نیروی $P = 20 \text{ kN}$ سفت کنیم، (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B را بیابید.



شکل م-۴-۱۰۳

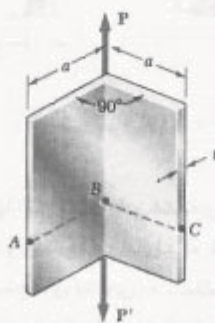
۴-۱۰۴ مسئله ۴-۱۰۳ را برای $t = 8 \text{ mm}$ حل کنید.

۴-۱۰۵ با میخ کردن دو قطعه چوبی $25 \times 100 \text{ mm}$ به قطعه چوبی $50 \times 100 \text{ mm}$ ، ستون کوتاهی ساخته شده است.

NUEB

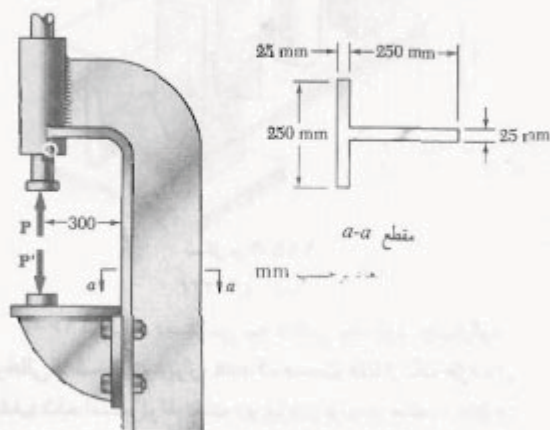
۱۱۱-۴ لوله فلزی با قطر خارجی ۱۸ mm و ضخامت دیواره ۲ mm باید دارای انحراف h باشد. اگر بدانیم که تنش ماکزیمم پس از ایجاد انحراف نباید از ۴ برابر تنش در لوله مستقیم بیشتر باشد، ماکزیمم انحراف مورد استفاده را بیابید.

۱۱۲-۴ عضو نشان داده شده از خم کردن یک ورق نازک فولادی به وجود آمده است. اگر ضخامت t در مقایسه با طول a این عضو کوچک باشد، مطلوبست: (الف) تنش در A ، (ب) تنش در B ، (ج) تنش در C .

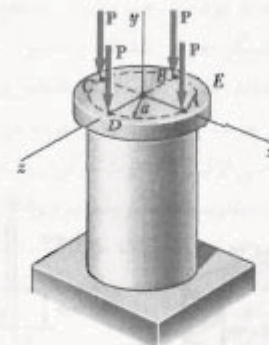


شکل م ۱۱۲-۴

۱۱۳-۴ اگر تنش مجاز در مقطع $a-a$ از پرس هیدرولیکی نشان داده شده در کشش و فشار، به ترتیب، ۴۰ MPa و ۸۰ MPa باشد، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان بر پرس وارد کرد بیابید.

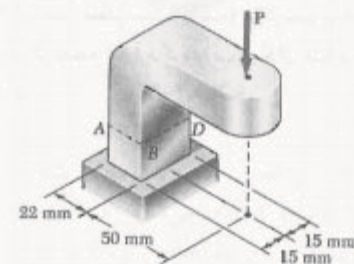


شکل م ۱۱۳-۴



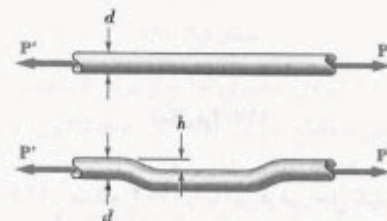
شکل م ۱۰۸-۴

۱۰۹-۴ اگر تنش مجاز در مقطع $ABCD$ برابر با ۷۰ MPa باشد، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان بر براکت نشان داده شده وارد کرد بیابید.



شکل م ۱۰۹-۴

۱۱۰-۴ میله توپر دایره‌ای به قطر d باید دارای انحراف h باشد. اگر بدانیم که تنش ماکزیمم پس از ایجاد انحراف نباید از ۴ برابر تنش در میله مستقیم بیشتر باشد، ماکزیمم انحراف مورد استفاده را بیابید.

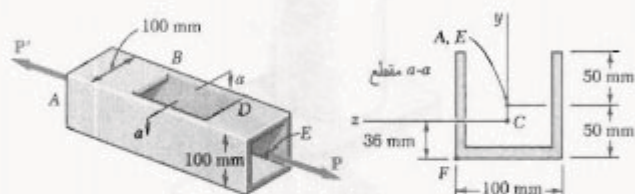


شکل م ۱۱۰-۴ و ۱۱۱-۴

REB

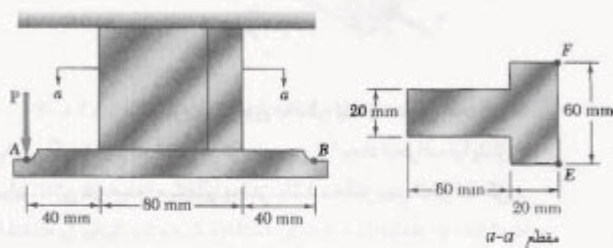


۱۱۴-۴ اگر گیره نشان داده شده روی قطعات چوبی چسب خورده تا نیروی $P = 400 \text{ N}$ سفت شود، در مقطع $a-a$ مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه D ، (ج) مکان محور خنثی.



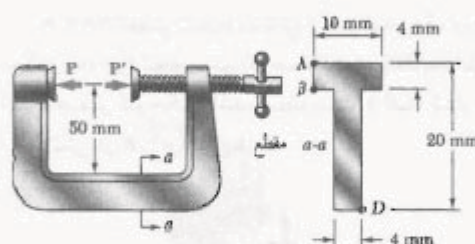
شکل م ۴-۱۱۶

۱۱۷-۴ اگر تنش مجاز در مقطع $a-a$ آویز نشان داده شده 150 MPa باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم نیروی عمودی P که می‌توان در نقطه A وارد کرد، (ب) مکان متناظر محور خنثی مقطع $a-a$.



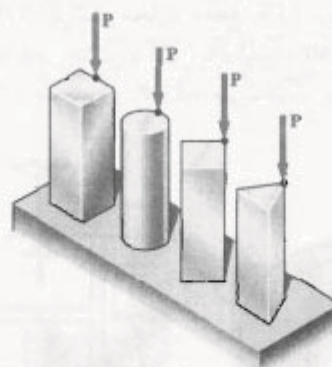
شکل م ۴-۱۱۷

۱۱۸-۴ مسئله ۱۷-۴ را با این فرض حل کنید که نیروی عمودی P در نقطه B وارد شود.



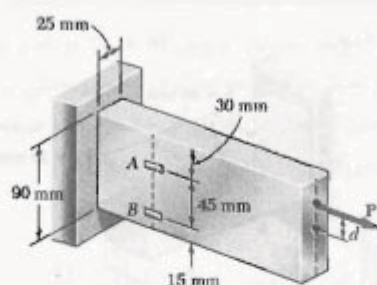
شکل م ۴-۱۱۴

۱۱۵-۴ چهار بار نشان داده شده دارای مساحت مقطع عرضی یکسانند. برای بارگذاری‌های داده شده، نشان دهید که: (الف) ماکزیمم تنش‌های فشاری به نسبت $4:5:7:9$ هستند. (ب) ماکزیمم تنش‌های کششی به نسبت $2:3:5:3$ هستند. (راهنمایی: مقطع عرضی میله به صورت مثلث متساوی‌الاضلاع است.)



شکل م ۴-۱۱۵

۱۱۶-۴ برای دسترسی به داخل یک لوله چهارگوش توخالی با ضخامت دیواره 6 mm ، قسمت CD از یک طرف آن حذف شده است. لوله تحت دو نیروی برابر و متضاد 60 kN قرار می‌گیرد. این نیروها در مراکز هندسی A و E دو انتهای لوله وارد می‌شوند. مطلوبست: (الف) تنش ماکزیمم در مقطع $a-a$ ، (ب) تنش در نقطه F . داده: مرکز سطح مقطع عرضی در نقطه C است و $I_x = 2 \times 10^6 \text{ mm}^4$.



شکل م ۴-۱۲۱

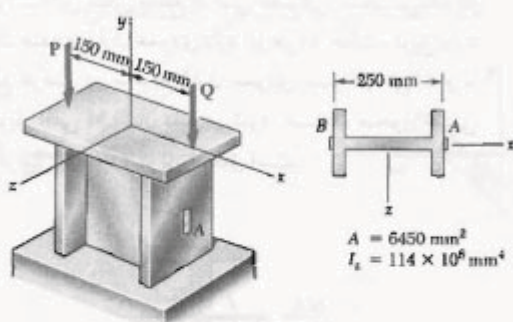
۱۲۲-۴ مسئله ۴-۱۲۱ را با فرض زیر حل کنید:

$$\epsilon_A = +600 \mu \quad \epsilon_B = +420 \mu$$

۱۲۳-۴ طول کوتاهی از ستون فولادی نورد شده یک صفحه صلب را نگه می‌دارد. بارهای P و Q، مطابق شکل، بر این صفحه وارد شده‌اند. کرنش‌ها در دو نقطه A و B روی خطوط مرکزی وجوه خارجی پال‌ها به صورت زیر هستند:

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

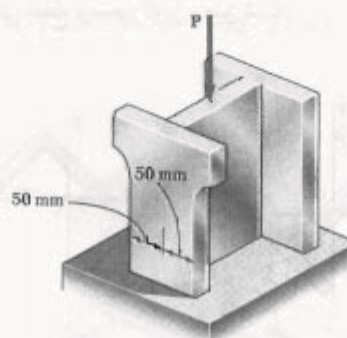
اگر $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ مقدار هر بار را بیابید.



شکل م ۴-۱۲۳

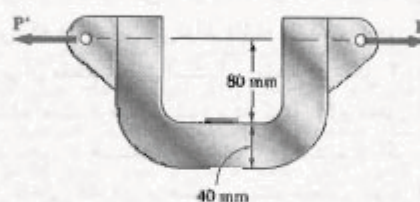
۱۲۴-۴ نیروی محوری، P ، خارج از مرکز P ، که در نقطه D وارد می‌شود، باید ۲۵ mm زیر سطح بالایی میله فولادی نشان داده شده باشد. برای $P = 60 \text{ kN}$ ، مطلوب است: (الف) عمق d میله که به ازای آن تنش‌های کششی در نقطه A ماکزیمم است، (ب) تنش متناظر در نقطه A.

۴-۱۱۹ سه صفحه فولادی، هر یک با مقطع عرضی $25 \times 150 \text{ mm}$ ، به یکدیگر جوش شده‌اند و ستون کوتاه به شکل H را تشکیل داده‌اند. سپس، به دلایل معماری، نواری به عرض ۲۵ mm از هر طرف یکی از بال‌ها درآورده می‌شود. اگر بار نسبت به مقطع عرضی اولیه به صورت مرکزی بماند، و تنش مجاز 100 MPa باشد، مطلوب است ماکزیمم نیروی P : (الف) که می‌توان بر ستون اولیه وارد کرد، (ب) که می‌توان بر ستون تغییر یافته وارد کرد.



شکل م ۴-۱۱۹

۴-۱۲۰ برای تعیین مقدار P نیروهای نشان داده شده، از میله فولادی C شکل استفاده می‌شود. اگر مقطع عرضی میله به صورت چهارگوش به ضلع ۴۰ mm، و کرنش در لبه داخلی $E = 70 \text{ GPa}$ باشد، مقدار P را بیابید. از $E = 200 \text{ GPa}$ استفاده کنید.



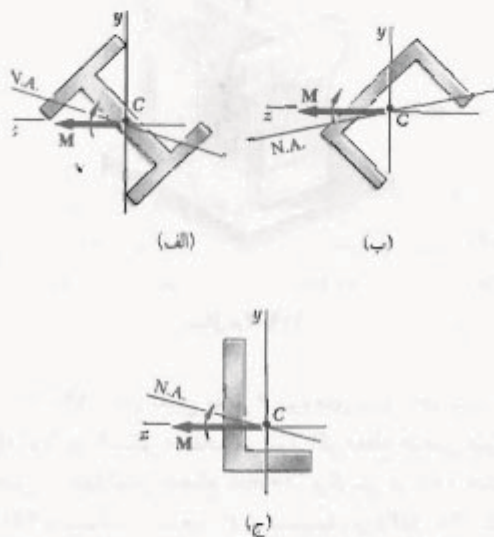
شکل م ۴-۱۲۰

۴-۱۲۱ نیروی محوری خارج از مرکز P ، مطابق شکل، بر میله فولادی با مقطع عرضی $25 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$ وارد شده است. کرنش‌ها در A و B به صورت زیر هستند

$$\epsilon_A = +350 \mu \quad \epsilon_B = -70 \mu$$

اگر $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) فاصله d ، (ب) مقدار نیروی P .

اکتون، حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آن کوپل‌های خمشی در صفحه تقارن عضو اثر نمی‌کنند، یا اینکه عضو صفحه تقارن ندارد. در این موارد، نمی‌توان فرض کرد که عضو در صفحه کوپل‌ها خم می‌شود. این موضوع در شکل ۵۶-۴ نشان داده شده است. در هر قسمت شکل، فرض شده است کوپل وارد بر مقطع در یک صفحه عمودی اثر می‌کند و یا بردار کوپل افقی M نشان داده شده است. البته، چون صفحه عمودی صفحه تقارن نیست، نمی‌توان گفت عضو در آن صفحه خم می‌شود، یا محور خشی مقطع بر محور کوپل منطبق است.



شکل ۵۶-۴

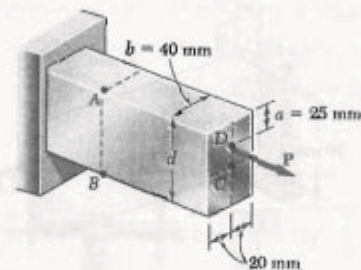
می‌خواهیم شرایطی را بیابیم که در آن محور خشی مقطع عرضی، که هر شکلی می‌تواند داشته باشد، بر محور کوپل M مؤثر بر آن مقطع منطبق است. این مقطع در شکل ۵۷-۴ نشان داده شده است. فرض می‌شود بردار کوپل M و محور خشی در امتداد محور z هستند. در قسمت ۲-۴ دیدیم که اگر نیروهای جزئی داخلی $\sigma_x dA$ را بر حسب سیستم معادل کوپل M بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (1-4) \quad \text{در امتداد } x:$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad (2-4) \quad \text{لنگر نسبت به محور } y:$$

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (3-4) \quad \text{لنگر نسبت به محور } z:$$

قبلاً دیدیم که وقتی تنش‌ها کمتر از حد تناسباند، طبق معادله (۱-۴) محور خشی یک محور گذرا از مرکز سطح است، و

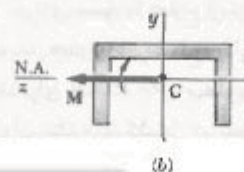
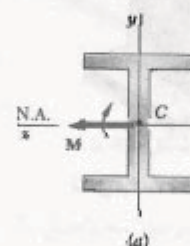


شکل م ۱۲۴-۴

۱۲۵-۴ در مسئله ۱۲۴-۴، مطلوب است: (الف) عمق d میله که به‌ازای آن تنش فشاری در نقطه B ماکزیمم است، (ب) تنش مناسظر در نقطه B .

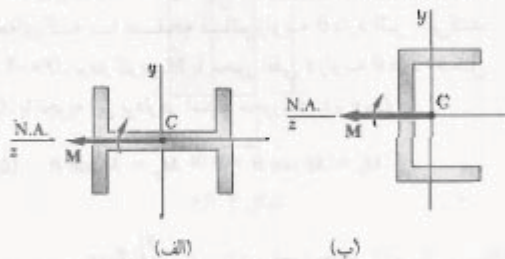
۱۳-۴ خمش نامتقارن

تا به حال، فقط خمش خالص عضوهایی را بررسی کرده‌ایم که حداقل یک صفحه تقارن دارند و تحت کوپل‌هایی که در آن صفحه اثر می‌کنند قرار می‌گیرند. در قسمت ۳-۴ دیدیم که این عضوها نسبت به صفحه کوپل‌ها متقارن می‌مانند و در آن صفحه خم می‌شوند. شکل ۵۵-۴ الف مقطع عرضی عضوی را نشان می‌دهد که دو صفحه تقارن دارد، یکی عمودی و دیگری افقی، و قسمت (ب) این شکل مقطع عرضی عضوی را نشان می‌دهد که فقط یک صفحه تقارن عمودی دارد. در هر دو حالت، کوپل وارد بر مقطع عرضی در صفحه تقارن عمودی عضو اثر می‌کند و با بردار کوپل افقی M نشان داده می‌شود؛ ضمناً، محور خشی مقطع عرضی بر محور کوپل منطبق است.



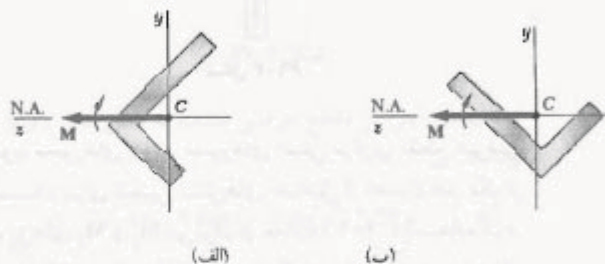
شکل (۴) ۵۵

(شکل ۴-۵۸)، بردار کویل M هنوز در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی خواهد بود، و محور خنثی نیز بر محور کویل منطبق است؛ ولی کویل در حالت b دو صفحه تقارن عضو اثر نمی‌کند.



شکل ۴-۵۸

از طرف دیگر، در شکل ۴-۵۶ هیچ یک از محوره‌های مختصات محور تقارن مقاطع نشان داده شده نیست و نیز محور اصلی نمی‌باشد. لذا، بردار کویل M در امتداد محور اصلی مرکزی نیست و محور خنثی بر محور کویل منطبق نیست. ولی، هر مقطعی دارای محوره‌های اصلی مرکزی است، حتی اگر نامتقارن باشد (شکل ۴-۵۶ ج). و این محورها را با استفاده از دایره مور می‌توان یافت^{**}. اگر بردار کویل M در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی مقطع عرضی باشد، محور خنثی بر محور کویل منطبق است (شکل ۴-۵۹) و از معادله‌هایی که در قسمت‌های ۴-۳ و ۴-۴ برای عضوهای متقارن داده شدند برای تعیین تنش در این حالت نیز می‌توان استفاده کرد.



شکل ۴-۵۹

* نگاه کنید به:

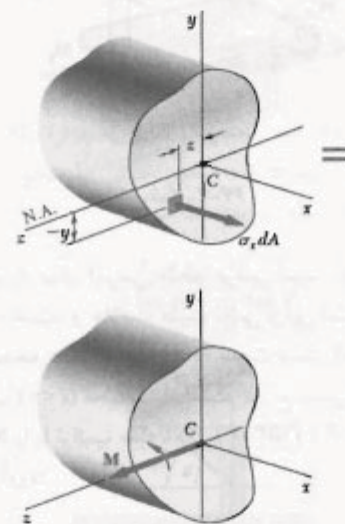
Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 9.8-9.10.

** نگاه کنید به:

Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 9.8-9.10.

معادله (۳-۴) رابطه اصلی $\sigma_x = -My/I$ را می‌دهد. در قسمت ۲-۴، با توجه به تقارن مقطع عرضی نسبت به محور y معادله (۲-۴) زاید بود و آن را در نظر نگرفتیم. ولی، اکنون که مقطع عرضی با یک شکل اختیاری را بررسی می‌کنیم، معادله (۲-۴) حائز اهمیت است. با فرض اینکه تنش‌ها کمتر از حد تناسب ساده‌اند، در معادله (۲-۴) قرار می‌دهیم $\sigma_x = -\sigma_m y/c$ می‌نویسیم:

$$\int z \left(-\frac{\sigma_m y}{c} \right) dA = 0 \Rightarrow \int yz dA = 0 \quad (۵۱-۴)$$



شکل ۴-۵۷

انتگرال $\int yz dA$ حاصلضرب اینرسی I_{yz} مقطع عرضی را نسبت به محوره‌های z و y می‌دهد، و اگر آنها محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشند، I_{yz} صفر خواهد بود^{*}. در نتیجه، محور خنثی مقطع عرضی بر محور کویل M مؤثر بر آن مقطع منطبق خواهد بود اگر، و فقط اگر، بردار کویل M در امتداد یکی از محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشد.

گفتنی است که مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل ۴-۵۵ حداقل نسبت به یکی از محوره‌های مختصات تقارن دارند. یعنی، در هر حالت، محوره‌های z و y محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی هستند. چون بردار کویل M در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی است، محور خنثی بر محور کویل منطبق است. با چرخش ۹۰° مقاطع عرضی

که در آن I_z ممان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور اصلی مرکزی z است. علامت منفی ناشی از این است که بالای صفحه $z > 0$ تحت فشار است و پایین آن $z < 0$ تحت کشش است. از طرف دیگر، کوپل M_y در یک صفحه افقی اثر می‌کند و عضو را در آن صفحه خم می‌کند (شکل ۴-۶۳). تنش‌های حاصل عبارتند از:

$$\sigma_x = + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۴-۵۴)$$

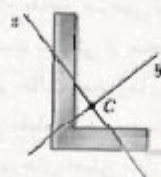


شکل ۴-۶۳

که در آن I_y ممان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور اصلی مرکزی y است، و علامت مثبت ناشی از این است که سمت چپ صفحه عمودی xy ($z > 0$) تحت کشش است و سمت راست آن ($z < 0$) تحت فشار است. توزیع تنش‌های ناشی از کوپل M را با ترکیب معادله‌های (۴-۵۳) و (۴-۵۴) می‌توان به‌دست آورد:

$$\sigma_x = - \frac{M_y y}{I_z} + \frac{M_z z}{I_y} \quad (۴-۵۵)$$

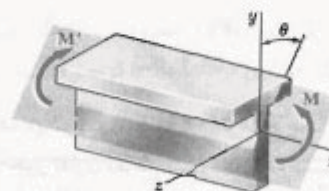
با تعیین محورهای مرکزی اصلی y و z ، از معادله (۴-۵۵) می‌توان برای محاسبه تنش‌ها در یک مقطع نامتقارن، مانند مقطع شکل ۴-۶۴، نیز استفاده کرد. از طرف دیگر، معادله (۴-۵۵) فقط وقتی به‌کار می‌رود که شرایط کاربرد اصل ترکیب برقرار باشند. به عبارت دیگر، اگر تنش‌های ترکیبی از حد تناسب ماده فراتر روند، یا اگر تغییر شکل‌های ناشی از یکی کوپل‌ها بر توزیع تنش‌های ناشی از کوپل دیگر خیلی تأثیر بگذارند، از معادله (۴-۵۵) نمی‌توان استفاده کرد.



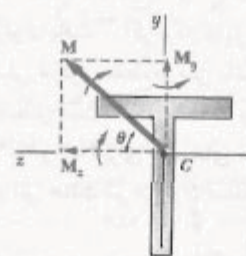
شکل ۴-۶۴

حال، نشان می‌دهیم که از اصل ترکیب برای تعیین تنش در کلی‌ترین حالت خمش نامتقارن می‌توان استفاده کرد. ابتدا، عضوی را با یک صفحه تقارن عمودی در نظر بگیرید. این عضو تحت کوپل‌های خمشی M و M' قرار دارد، و کوپل‌ها در صفحه‌ای که با صفحه قائم زاویه θ دارد اثر می‌کنند (شکل ۴-۶۵). بردار کوپل M با محور افقی z زاویه θ دارد (شکل ۴-۶۱). با تجزیه این بردار در امتداد محورهای z و y ، داریم:

$$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta \quad (۴-۵۲)$$



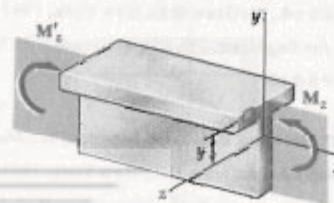
شکل ۴-۶۵



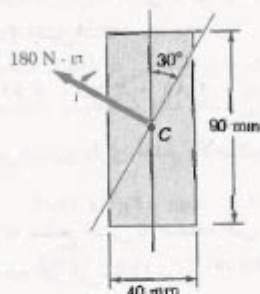
شکل ۴-۶۱

چون محورهای y و z محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند، برای تعیین تنش‌های حاصل از اعمال هر یک از کوپل‌های M_y و M_z می‌توان از معادله (۴-۱۶) استفاده کرد. کوپل M_z در یک صفحه عمودی اثر می‌کند و عضو را در آن صفحه خم می‌کند (شکل ۴-۶۲). تنش‌های حاصل عبارتند از:

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} \quad (۴-۵۳)$$



شکل ۴-۶۲

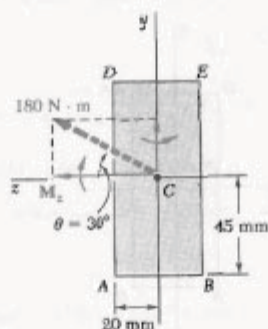


شکل ۶۶-۴

(الف) تنش ماکزیمم. ابتدا، مؤلفه‌های M_z و M_y بردار کوپل را می‌یابیم (شکل ۶۷-۴):

$$M_z = (180 \text{ N.m}) \cos 30^\circ = 155.9 \text{ N.m}$$

$$M_y = (180 \text{ N.m}) \sin 30^\circ = 90 \text{ N.m}$$



شکل ۶۷-۴

ممان‌های اینرسی مقطع عرضی نسبت به محورها y و z عبارتند از:

$$I_z = \frac{1}{12} (0.04 \text{ m})(0.09 \text{ m})^3 = 2.43 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0.09 \text{ m})(0.04 \text{ m})^3 = 0.48 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

ماکزیمم تنش کششی ناشی از M_z در امتداد AB روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(155.9 \text{ N.m})(0.045 \text{ m})}{2.43 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 2.89 \text{ MPa}$$

ماکزیمم تنش کششی ناشی از M_y در امتداد AD روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(90 \text{ N.m})(0.02 \text{ m})}{0.48 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3.75 \text{ MPa}$$

معادله (۵۵-۴) نشان می‌دهد که توزیع تنش‌های ناشی از خمش نامتقارن به صورت خطی است. ولی، همانطور که قبلاً در همین قسمت گفته شد، محور خمشی مقطع عرضی، به طور کلی، بر محور کوپل خمشی منطبق نیست. چون تنش قائم در تمام نقاط محور خمشی صفر است، با قرار دادن $\sigma_x = 0$ در معادله (۵۵-۴) می‌توان معادله‌ای که این محور خمشی را مشخص می‌کند به دست آورد. می‌نویسیم:

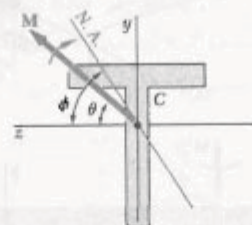
$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

با حل y و جایگذاری M_y و M_z از معادله‌های (۵۲-۴)،

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z \quad (56-4)$$

معادله حاصل، یک خط مستقیم با شیب $m = (I_z/I_y) \tan \theta$ را نشان می‌دهد. زاویه ϕ که محور خمشی با محور z دارد (شکل ۶۵-۴) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (57-4)$$



شکل ۶۵-۴

که در آن θ زاویه‌ای است که بردار کوپل M با محور z می‌سازد. چون I_z و I_y هر دو مثبت‌اند، ϕ و θ علامت یکسان دارند. وقتی $I_z > I_y$ ، $\phi > \theta$ و وقتی $I_z < I_y$ ، $\phi < \theta$. لذا، محور خمشی همواره بین بردار کوپل M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

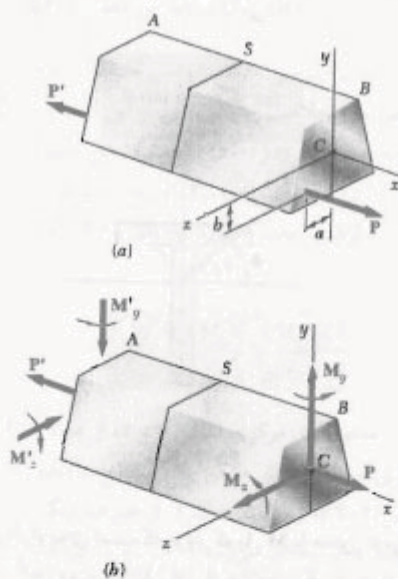
مثال ۸-۴

کوپل 180 N.m بر یک تیر چوبی، با مقطع عرضی مستطیلی $40 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$ ، در صفحه‌ای که با عمود زاویه 30° دارد وارد شده است (شکل ۶۶-۴). مطلوب است: (الف) تنش ماکزیمم در تیر، (ب) زاویه‌ای که سطح خمشی با صفحه افق دارد.

۴-۱۴ حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز

در قسمت ۴-۱۲، تنش‌های حاصل از بار محوری خارج از مرکز را، که در صفحه تقارن عضو بر آن اثر می‌کرد، تحلیل کردیم. اکنون، حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم که در آن بار محوری در صفحه تقارن اعمال نمی‌شود.

عضو مستقیم AB را که تحت نیروهای متضاد و محوری خارج از مرکز P و P' قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۴-۷۰ الف). فواصل خطوط اثر این نیروها را تا محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی عضو با a و b نشان می‌دهیم. نیروی خارج از مرکز P از نظر استاتیکی معادل است با سیستمی که از نیروی مرکزی P و دو کوپل M_y و M_z ، با لنگرهای $M_y = Pa$ و $M_z = Pb$ ، تشکیل شده است (شکل ۴-۷۰ ب). به‌طور مشابه، نیروی خارج از مرکز P' معادل است با سیستمی که از نیروی مرکزی P' و کوپل‌های M'_y و M'_z تشکیل شده است.



شکل ۴-۷۰

با استفاده از اصل سنت-وینانت (قسمت ۲-۱۷)، بارگذاری اولیه در شکل ۴-۷۰ الف را می‌توان با معادل استاتیکی آن، یعنی بارگذاری در شکل ۴-۷۰ ب، جایگزین کرد، و توزیع تنش در مقطع S عضو را، که خیلی نزدیک به انتهای عضو نباشد، به‌دست آورد. به‌علاوه، تا وقتی شرایط استفاده از اصل ترکیب برقرار باشند (قسمت ۲-۱۲)، با ترکیب تنش‌های ناشی از بار

بنابراین، ماکزیمم تنش کششی ناشی از بارگذاری ترکیبی در A روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2/89 + 3/75 = 6/64 \text{ MPa}$$

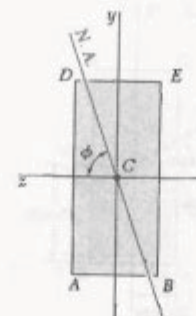
ماکزیمم تنش فشاری دارای مقدار بالاست و در E روی می‌دهد.

(ب) زاویه سطح خنثی با صفحه افقی. زاویه ϕ که سطح خنثی با صفحه افقی می‌سازد (شکل ۴-۶۸) از معادله (۴-۵۷) به‌دست می‌آید.

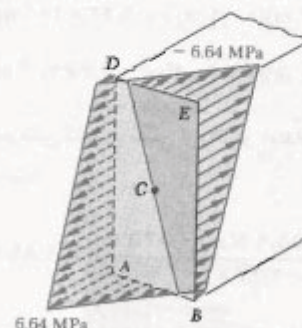
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{2/43 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0/48 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \tan 30^\circ = 2/9$$

$$\phi = 72/4^\circ$$

توزیع تنش در مقطع عرضی در شکل ۴-۶۹ نشان داده شده است.



شکل ۴-۶۸



شکل ۴-۶۹



(الف) تنش ها. بار خازج از مرکز داده شده را با سیستم معادل آن جایگزین می‌کنیم. این سیستم از بار مرکزی P و دو کوپل M_x و M_z ، که با بردارهایی در امتداد محورهای اصلی مرکزی مقطع غرضی نشان داده شده‌اند، تشکیل شده است (شکل ۷۲-۴). می‌نویسیم:

$$M_x = (4/80 \text{ kN})(40 \text{ mm}) = 192 \text{ N.m}$$

$$M_z = (4/80 \text{ kN})(60 \text{ mm} - 35 \text{ mm}) = 120 \text{ N.m}$$

مساحت و ممان‌های اینرسی مرکزی** مقطع عرضی عبارتند از:

$$A = (0/080 \text{ m})(0/120 \text{ m}) = 9/60 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0/120 \text{ m})(0/080 \text{ m})^3 = 5/12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0/080 \text{ m})(0/120 \text{ m})^3 = 11/52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش σ_o ناشی از بار مرکزی P منفی است و در مقطع عرضی به صورت یکنواخت است:

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{-4/80 \text{ kN}}{9/60 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -0/5 \text{ MPa}$$

تنش‌های ناشی از کوپل‌های خمشی M_x و M_z در مقطع عرضی دارای توزیع خطی هستند و ماکزیم مقدار آنها، به ترتیب، عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\max}}{I_x} = \frac{(192 \text{ N.m})(40 \text{ mm})}{5/12 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 1/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\max}}{I_z} = \frac{(120 \text{ N.m})(60 \text{ mm})}{11/52 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 0/625 \text{ MPa}$$

تنش در گوشه‌های مقطع عرضی عبارتند از:

$$\sigma_y = \sigma_o \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

علامت‌ها را از شکل ۷۲-۴ باید تعیین کرد. تنش‌های ناشی از M_x در C و D مثبت‌اند و در A و B منفی‌اند، و تنش‌های ناشی از M_z در C و B مثبت‌اند و در A و D منفی‌اند. در نتیجه،

$$\sigma_A = -0/5 - 1/5 - 0/625 = -2/625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -0/5 - 1/5 + 0/625 = -1/375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0/5 + 1/5 + 0/625 = +1/625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0/5 + 1/5 - 0/625 = +0/375 \text{ MPa}$$

* گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی - مترجم

** نسبت به محور گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی - مترجم

محوری مرکزی P و کوپل‌های خمشی M_x و M_z می‌توان تنش‌های ناشی از بارگذاری شکل ۷۰-۴ را به دست آورد. تنش ناشی از بار مرکزی P با معادله (۵-۵)، و تنش ناشی از کوپل‌های خمشی با معادله (۵۵-۴) داده می‌شوند، زیرا بردارهای کوپل متناظر در امتداد محورهای اصلی مرکزی* مقطع قرار دارند. بنابراین،

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_x z}{I_x} \quad (58-4)$$

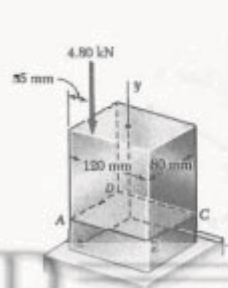
که در آن y و z از محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی اندازه‌گیری می‌شوند. رابطه حاصل نشان می‌دهد که توزیع تنش در عرض مقطع به صورت خطی است.

گفتنی است که در معادله (۵۸-۴)، بر حسب سوی بارهای P و M_x و مکان خط اثر آنها نسبت به محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی، هر یک از سه جمله این معادله ممکن است مثبت یا منفی باشد. بر حسب شکل هندسی مقطع عرضی و مکان خط اثر P و M_x ، تنش‌های σ_x حاصل از معادله (۵۸-۴) در نقاط مختلف مقطع ممکن است دارای علامت یکسان باشند، یا بعضی از آنها مثبت و بعضی منفی باشد. در حالت دوم، خطی در مقطع وجود دارد که تنش در امتداد آن صفر است. با قرار دادن $\sigma_x = 0$ در معادله (۵۸-۴)، معادله یک خط مستقیم که محور خشی مقطع را نشان می‌دهد به دست می‌آید:

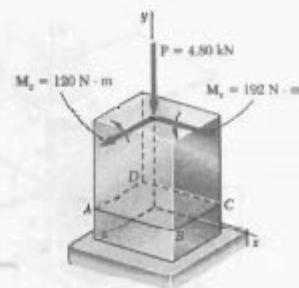
$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_x}{I_x} z = \frac{P}{A}$$

مثال ۹-۴

مطابق شکل بار عمودی $4/80 \text{ kN}$ بر تیر چوبی با مقطع عرضی مستطیلی $80 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$ وارد شده است (شکل ۷۱-۴). مطلوب است: (الف) تنش در نقاط A ، B ، C و D ، (ب) مکان محور خشی مقطع عرضی.



شکل ۷۱-۴



شکل ۷۲-۴

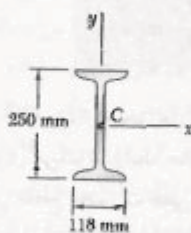
حل

خواص مقطع عرضی. داده‌های زیر از پیوست ج گرفته شده‌اند.

$$A = 4820 \text{ mm}^2$$

$$S_x = 402 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_y = 47.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$



نیرو و کوپل در C. نیروی P را با میسّم معادل نیرو و کوپل در مرکز سطح C مقطع عرضی جایگزین می‌کنیم.

$$M_x = (120 \text{ mm})P \quad M_y = (38 \text{ mm})P$$

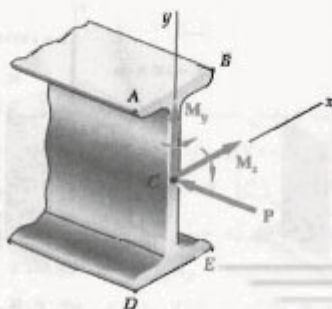
توجه کنید که بردارهای M_x و M_y در امتداد محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند.

تنش‌های قائم. قدر مطلق تنش‌های ناشی از بار مرکزی P و کوپل‌های M_x و M_y در نقاط A، B، C، D و E، عبارتند از:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{P}{4820 \text{ mm}^2} = 207 \times 10^{-6} P$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{S_x} = \frac{120 P}{402 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 298 \times 10^{-6} P$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{S_y} = \frac{38 P}{47.5 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 800 \times 10^{-6} P$$

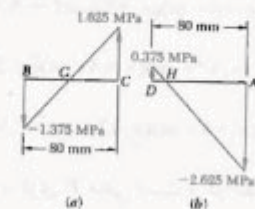


(ب) محور خشی. تنش در نقطه G بین B و C صفر است، و در نقطه H بین D و A نیز صفر است (شکل ۴-۷۳). چون توزیع تنش خطی است، می‌نویسیم:

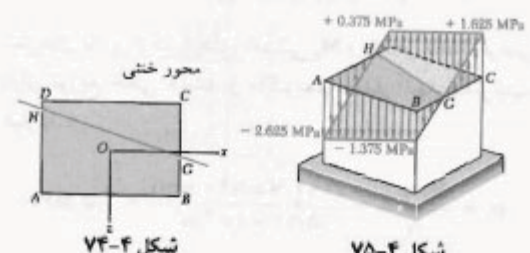
$$\frac{BG}{80 \text{ mm}} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \Rightarrow BG = 36.7 \text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80 \text{ mm}} = \frac{2.625}{2.625 + 0.375} \Rightarrow HA = 70 \text{ mm}$$

با اتصال نقاط G و H، محور خشی به دست می‌آید (شکل ۴-۷۴).



شکل ۴-۷۳

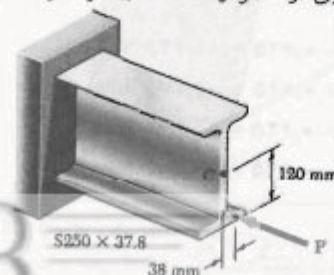


شکل ۴-۷۵

در شکل ۴-۷۵، توزیع تنش در مقطع عرضی نشان داده شده است.

مسئله نمونه ۴-۹

نیروی افقی P بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده $S250 \times 37.8$ وارد شده است. ماکزیمم بار مجاز P را بیابید، به طوری که تنش فشاری در عضو از 82 MPa بیشتر نشود.



حل

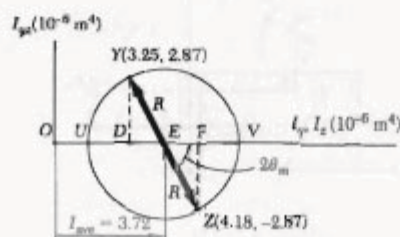
محورهای اصلی، دایره مور را رسم می‌کنیم، و از روی آن وضعیت محورهای اصلی و ممان‌های اینرسی اصلی متناظر را می‌یابیم:

$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2,187}{0,465} \Rightarrow 2\theta_m = 80,8^\circ \Rightarrow \theta_m = 40,4^\circ$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0,465)^2 + (2,187)^2 \Rightarrow R = 2,241 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_u = I_{\min} = OU = I_{avc} - R = 3,72 - 2,241 = 0,81 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

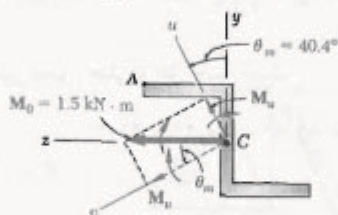
$$I_v = I_{\max} = OV = I_{avc} + R = 3,72 + 2,241 = 6,93 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



بارگذاری. کوپل M_0 را به مؤلفه‌های موازی با محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم:

$$M_u = M_0 \sin \theta_m = 1500 \sin 40,4^\circ = 972 \text{ N.m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1500 \cos 40,4^\circ = 1142 \text{ N.m}$$



الف. تنش در A. فواصل عمودی نقطه A از محورهای اصلی عبارتند از:

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \sin \theta_m = 50 \cos 40,4^\circ + 75 \sin 40,4^\circ = 86,0 \text{ mm}$$

$$v_A = -z_A \sin \theta_m + y_A \cos \theta_m = -50 \sin 40,4^\circ + 75 \cos 40,4^\circ = 23,9 \text{ mm}$$

ترکیب. از ترکیب تنش‌های ناشی از M_y و M_x ، تنش کل به‌دست می‌آید. علامت هر تنش را با بررسی دقیق سیستم نیرو-کوپل تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\sigma_i + \sigma_r + \sigma_r \\ &= -207 \times 10^6 P + 298 \times 10^6 P + 800 \times 10^6 P \\ &= +891 \times 10^6 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\sigma_i + \sigma_r - \sigma_r \\ &= -207 \times 10^6 P + 298 \times 10^6 P - 800 \times 10^6 P \\ &= -709 \times 10^6 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\sigma_i - \sigma_r + \sigma_r \\ &= -207 \times 10^6 P - 298 \times 10^6 P + 800 \times 10^6 P \\ &= +295 \times 10^6 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_E &= -\sigma_i - \sigma_r - \sigma_r \\ &= -207 \times 10^6 P - 298 \times 10^6 P - 800 \times 10^6 P \\ &= -1305 \times 10^6 P \end{aligned}$$

ماکزیمم بار مجاز. ماکزیمم تنش فشاری در نقطه E روی می‌دهد. با توجه به $\sigma_{all} = 82 \text{ MPa}$ داریم:

$$\sigma_{all} = \sigma_E \Rightarrow -82 \text{ MPa} = -1305 \times 10^6 P \Rightarrow P = 62,8 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

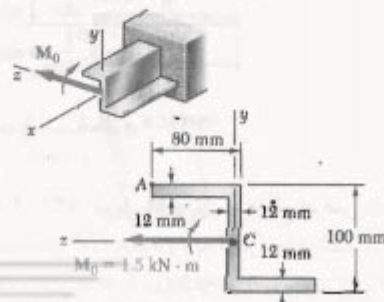
مسئله نمونه ۴-۱۰

کوپل $M_0 = 1,5 \text{ kN.m}$ در صفحه قائم بر تیری با مقطع عرضی Z وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A، (ب) زاویه‌ای که محور خنثی با صفحه افق می‌سازد. ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع نسبت و محورهای z و y عبارتند از:

$$I_y = 3,25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

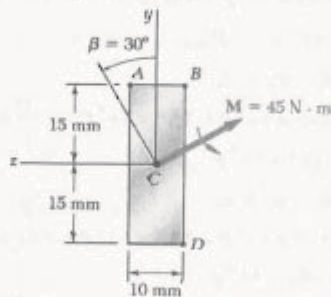
$$I_z = 4,18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = 2,187 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

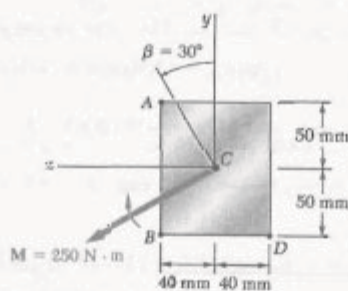


مسائل

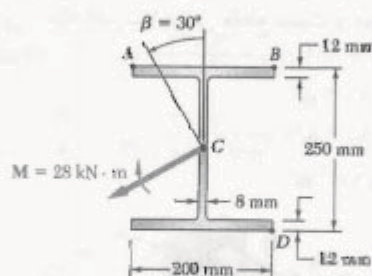
۱۲۶-۴ تا ۱۲۸-۴ کوپل M بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه β دارد وارد شده است. مطلوب است: (الف) تنش در A ، (ب) تنش در B ، (ج) تنش در D .



شکل م ۱۲۶-۴



شکل م ۱۲۷-۴



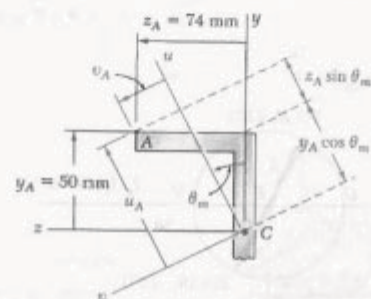
شکل م ۱۲۸-۴

۱۲۹-۴ تا ۱۳۱-۴ کوپل M بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه β دارد وارد شده است. مطلوب است: (الف) تنش در A ، (ب) تنش در B ، (ج) تنش در D .

با در نظر گرفتن خمش حول هر محور اصلی به طور جداگانه، دیده می‌شود که M_y در نقطه A ایجاد کشش، و M_z در همان نقطه ایجاد فشار می‌کند.

$$\begin{aligned}\sigma_A &= + \frac{M_y y_A}{I_y} - \frac{M_z z_A}{I_z} \\ &= + \frac{(972 \text{ N}\cdot\text{m})(0.0239 \text{ m})}{0.810 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &\quad - \frac{(1142 \text{ N}\cdot\text{m})(0.0860 \text{ m})}{8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &= +(28.68 \text{ MPa}) - (13.11 \text{ MPa})\end{aligned}$$

$$\sigma_A = +15.57 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



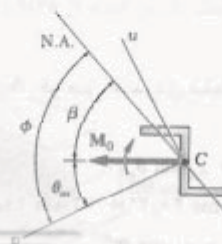
ب. محور خشی. با استفاده از معادله (۵۷-۴)، زاویه ϕ بین محور خشی و محور z را می‌یابیم.

$$\tan \phi = \frac{I_y}{I_z} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.810} \tan 40.4^\circ \Rightarrow \phi = 81.8^\circ$$

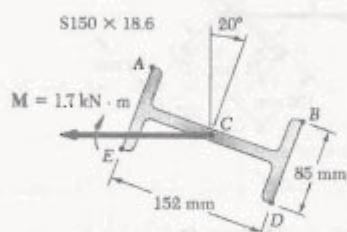
زاویه β بین محور خشی و افق چنین است:

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8^\circ - 40.4^\circ = 41.4^\circ$$

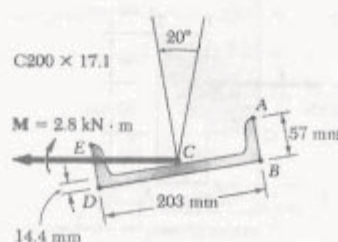
$$\beta = 41.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$



۱۳۳-۴ و ۱۳۴-۴ کوپل M در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوب است: (الف) زاویه محور خنثی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

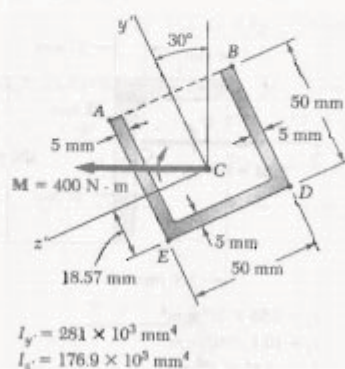


شکل م ۱۳۳-۴

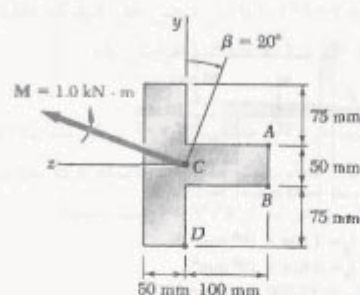


شکل م ۱۳۴-۴

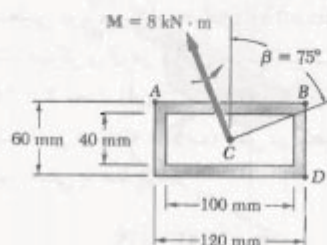
۱۳۵-۴ تا ۱۳۷-۴ کوپل M در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوب است: (الف) زاویه محور خنثی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.



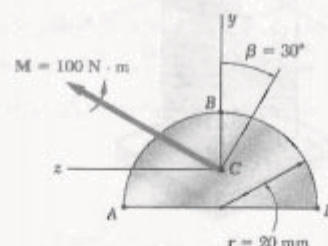
شکل م ۱۳۵-۴



شکل م ۱۲۹-۴

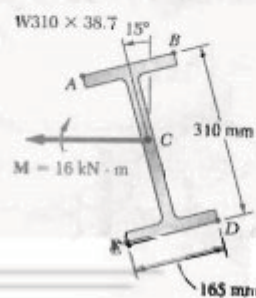


شکل م ۱۳۰-۴

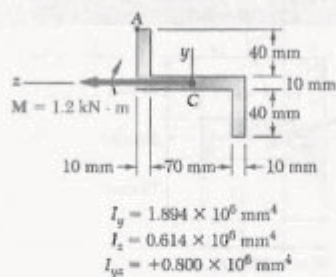


شکل م ۱۳۱-۴

۱۳۲-۴ کوپل M در یک صفحه قائم بر تیر در وضعیت نشان داده شده وارد شده است. مطلوب است: (الف) زاویه ای که محور خنثی با صفحه افق می سازد، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

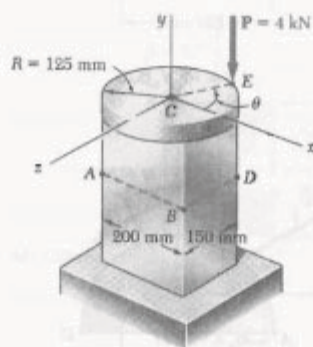


شکل م ۱۳۲-۴



شکل م-۱۳۹

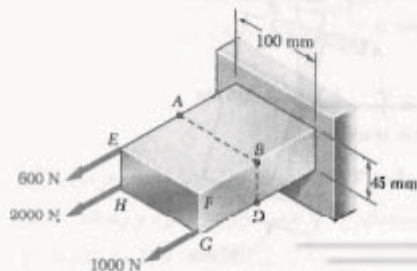
۴-۱۴۰ یک ورق صلب دایره‌ای با شعاع ۱۲۵ mm به تیر مستطیلی توپری با ابعاد ۱۵۰ mm × ۲۰۰ mm متصل شده است. مرکز ورق در بالای مرکز تیر قرار دارد. اگر نیروی $P = 4 \text{ kN}$ تحت زاویه $\theta = 30^\circ$ وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A، (ب) تنش در نقطه B، (ج) نقطه تلاقی محور خنثی با خط ABD.



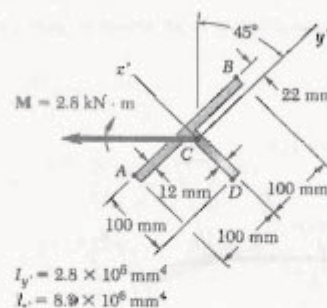
شکل م-۱۴۰

۴-۱۴۱ در مسئله ۴-۱۴۰، مطلوبست: (الف) مقدار θ که به ازای آن تنش در D به بیشترین مقدار می‌رسد، (ب) مقادیر متناظر تنش در A، B، C و D.

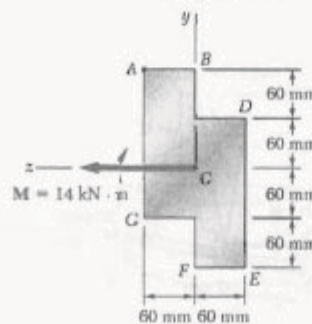
۴-۱۴۲ برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقاط A و B، (ب) نقطه تقاطع محور خنثی با خط ABC.



شکل م-۱۴۲

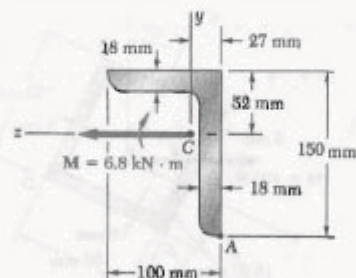


شکل م-۱۳۶



شکل م-۱۳۷

۴-۱۳۸ و ۴-۱۳۹ کوپل M در یک صفحه عمودی بر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده اعمال شده است. تنش را در نقطه A بیابید.

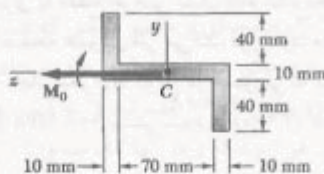


$$I_y = 3.65 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 10.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 3.45 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

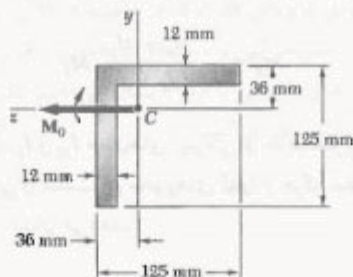
شکل م-۱۳۸



شکل م ۱۴۶-۴

۱۴۷-۴ مسئله ۱۴۶-۴ را با این فرض حل کنید که کوپل M_0 در یک صفحه افقی وارد شود.

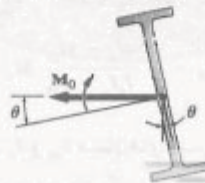
۱۴۸-۴ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل M_0 که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیمم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیمم تنش در تیر از 84 MPa بیشتر نشود. داده: $k_{\min} = 25 \text{ mm}$, $A = 3064 \text{ mm}^2$, $I_y = I_z = 4.7 \times 10^8 \text{ mm}^4$ (راهنمایی: با توجه به تقارن، محاورهای اصلی با محاورهای مختصات زاویه 45° دارند. از روابط $I_{\min} = Ak_{\min}^2$ و $I_{\min} + I_{\max} = I_y + I_z$ استفاده کنید).



شکل م ۱۴۸-۴

۱۴۹-۴ مسئله ۱۴۸-۴ را با این فرض حل کنید که کوپل M_0 در صفحه افق وارد شود.

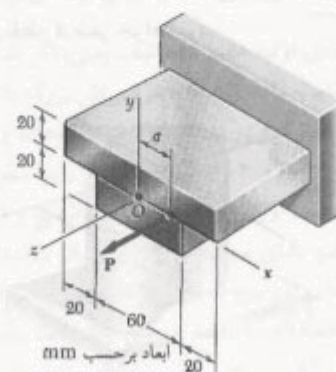
۱۵۰-۴ کوپل M_0 در یک صفحه عمودی بر تیر فولادی نورد شده $W 310 \times 23.8$ وارد شده است. جان تیر با عمود زاویه θ دارد. اگر تنش ماکزیمم در تیر را برای $\theta = 0^\circ$ یا $\theta = 90^\circ$ نشان دهیم، زاویه میل θ تیر را که به ازای آن تنش ماکزیمم $2\sigma_0$ است بیابید.



شکل م ۱۵۰-۴

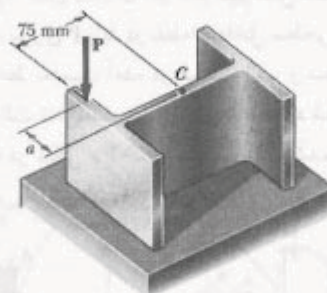
۱۴۳-۴ مسئله ۱۴۲-۴ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی وارده در G از 170 kN به 176 kN افزایش یابد.

۱۴۴-۴ نیروی افقی P با مقدار 100 kN بر تیر نشان داده شده اعمال شده است. مطلوب است ماکزیمم فاصله a که به ازای آن ماکزیمم تنش کششی در تیر از 75 MPa بیشتر نشود.



شکل م ۱۴۴-۴

۱۴۵-۴ بار محوری P با مقدار 50 kN مطابق شکل، بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده $W 150 \times 24$ وارد شده است. مطلوب است ماکزیمم فاصله a که به ازای آن ماکزیمم تنش فشاری از 90 MPa بیشتر نشود.



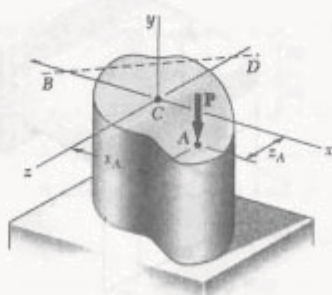
شکل م ۱۴۵-۴

۱۴۶-۴ مقطع Z نشان داده شده تحت کوپل M_0 که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیمم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیمم تنش از 80 MPa بیشتر نشود. داده: $I_{\max} = 2.28 \times 10^8 \text{ mm}^4$ و $I_{\min} = 0.23 \times 10^8 \text{ mm}^4$ محاورهای اصلی 25.7° و 64.3° می‌باشد.

۱۵۴-۴ (الف) نشان دهید که، اگر نیروی عمودی P در نقطه A مقطع نشان داده شده وارد شود، معادله محور خشی BD عبارت است از:

$$\left(\frac{x_A}{k_x^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_z^2}\right)z = -1$$

که در آن k_x و k_z شعاع ژیراسیون مقطع عرضی را، به ترتیب، نسبت به محورهای x و z نشان می‌دهند. (ب) به علاوه، نشان دهید که اگر نیروی عمودی Q در نقطه‌ای روی خط BD اعمال شود، تنش در نقطه A صفر خواهد بود.

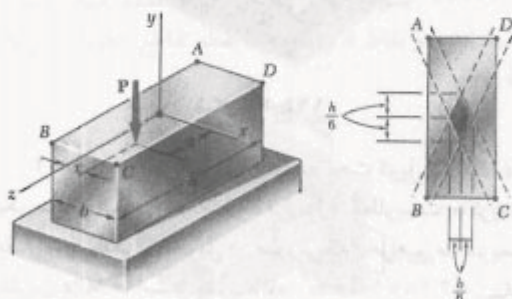


شکل م-۱۵۴

۱۵۵-۴ (الف) نشان دهید که تنش در گوشه A عضو منشوری نشان داده شده در شکل م-۱۵۵ الف صفر خواهد بود هرگاه نیروی عمودی P در نقطه‌ای روی خط زیر اعمال شود:

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

(ب) به علاوه، نشان دهید که اگر بخواهیم تنش کششی در عضو ایجاد نشود، نیروی P باید در نقطه‌ای داخل سطحی اعمال شود که توسط خط به دست آمده در قسمت الف و سه خط مشابه متناظر با حالت تنش صفر در C ، B و D محدود شده است. این سطح را، که در شکل م-۱۵۵ ب نشان داده شده است، هسته مقطع عرضی می‌گویند.

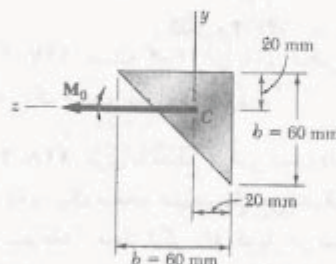


(الف)

(ب)

شکل م-۱۵۵

۱۵۱-۴ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل M_0 ، که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیم مقدار مجاز لنگر M_0 کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیم تنش از 100 MPa بیشتر نشود. داده: $I_y = I_z = b^4/36$ و $I_{yz} = b^4/72$

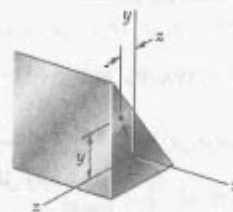


شکل م-۱۵۱

۱۵۲-۴ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل M_0 ، که در صفحه عمودی xy اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه A ، با مختصات y و z ، چنین است:

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_0$$

که در آن I_y ، I_z و I_{yz} ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع عرضی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و M_0 لنگر کوپل را نشان می‌دهد.



شکل م-۱۵۲ و م-۱۵۳

۱۵۳-۴ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل M_0 ، که در صفحه افقی xz اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه A چنین است:

$$\sigma_A = -\frac{zI_z - yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_0$$

که در آن I_y ، I_z و I_{yz} ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و M_0 لنگر کوپل را نشان می‌دهد.

قسمت ۳-۴، صفحه‌ای از مقطع عرضی که شامل نقطه C است به صورت صفحه‌ای می‌ماند، و قوس‌های مختلف دایره‌ای نشان داده شده در شکل ۴-۷۶ الف تبدیل به قوس‌های دایره‌ای و هم مرکزی می‌شوند که مرکز آنها C' ، متفاوت با C ، خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر، اگر کوپل‌های M و M' در جهت‌های نشان داده شده باشند، انحناي قوس‌های دایره‌ای مختلف افزایش خواهد یافت؛ یعنی $A'C' < AC$ ، همچنین، توجه کنید که کوپل‌های M و M' باعث می‌شوند طول سطح بالایی عضو کاهش یابد ($A'B' < AB$) و طول سطح پایینی افزایش یابد ($F'G' > FG$). نتیجه می‌شود که عضو دارای سطح خستایی است که طول آن ثابت می‌ماند. فصل مشترک سطح خنثی با صفحه xy در شکل ۴-۷۶ الف با قوس DE به شعاع R ، و در شکل ۴-۷۶ ج با قوس $D'E'$ به شعاع R' نشان داده شده است. زوایای مرکزی متناظر با DE و $D'E'$ را، به ترتیب، با θ و θ' نشان دهیم. چون طول سطح خنثی ثابت است، می‌نویسیم:

$$R\theta = R'\theta' \quad (۴-۵۹)$$

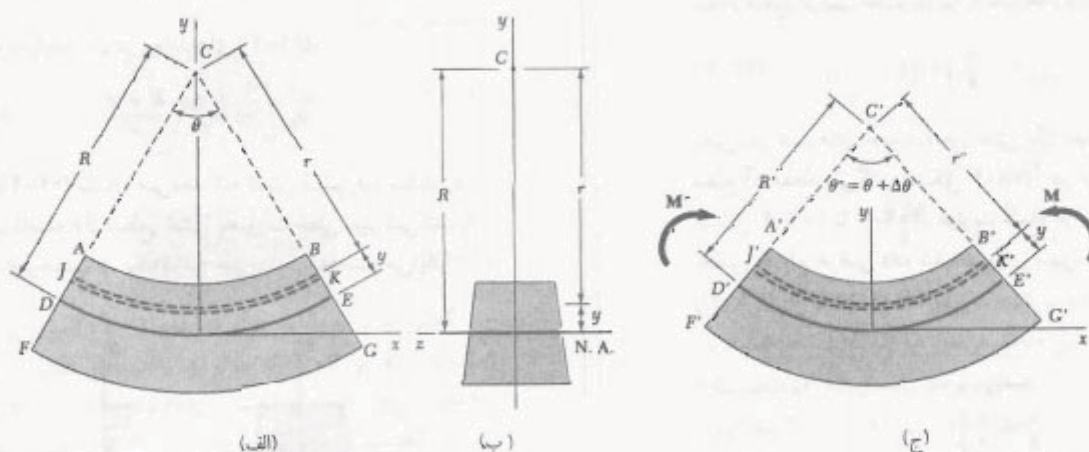
حال قوس دایره‌ای JK را، که در فاصله y بالایی سطح خنثی قرار دارد، در نظر می‌گیریم و شعاع این قوس را قبل و بعد از اعمال کوپل‌های خمشی با r و r' نشان می‌دهیم. تغییر شکل JK را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\delta = r'\theta' - r\theta \quad (۴-۶۰)$$

۴-۱۵ خمش عضوهای خمیده

تابه‌حال، فقط تنش‌های ناشی از خمش عضوهای مستقیم را تحلیل کرده‌ایم. اکنون، تنش‌های ناشی از کوپل‌های مساوی و متضادی را که بر عضو خمیده‌ای وارد می‌شوند بررسی می‌کنیم. در این بحث، فقط عضو خمیده با مقطع عرضی یکنواختی را در نظر می‌گیریم که یک صفحه تقارن دارد و کوپل‌های خمشی در آن صفحه اثر می‌کنند. فرض می‌شود که تنش‌ها کمتر از حد تناسب هستند.

اگر انحناي اولیه عضو کم باشد، یعنی، اگر شعاع انحناي عضو در مقایسه با عمق مقطع عرضی‌اش بزرگ باشد، می‌توان عضو را مستقیم گرفت. به این ترتیب، با استفاده از فرمول‌های قسمت‌های ۳-۴ و ۴-۴، توزیع تنش را با تقریب خوب می‌توان به دست آورد*. ولی، اگر شعاع انحنا و ابعاد مقطع عرضی عضو دارای مرتبه بزرگی یکسان باشند، از تحلیل مهندس آلمانی ای. وینکلر (۱۸۳۵ تا ۱۸۸۸) باید استفاده کرد. عضو خمیده‌ای با مقطع عرضی یکنواخت نشان داده شده در شکل ۴-۷۶ را در نظر بگیرید. مقطع عرضی آن نسبت به محور y تقارن دارد (شکل ۴-۷۶ ب). در حالت بی‌تنش، سطوح بالایی و پایینی مقطع عرضی صفحه عمودی xy را در امتداد قوس‌های دایره‌ای AB و FG ، با مرکز C ، قطع می‌کنند (شکل ۴-۷۶ الف). حال، دو کوپل مساوی و متضاد M و M' را در صفحه تقارن عضو وارد می‌کنیم (شکل ۴-۷۶ ج). طبق



شکل ۴-۷۶

* به مسئله ۴-۱۸۵ نگاه کنید.

برای تعیین مکان سطح خنثی عضو و مقدار ضریب $E \Delta\theta/\theta$ ، که در معادله‌های (۶۴-۴) و (۶۵-۴) به کار می‌رود، مانند قسمت ۴-۲ برای عضو مستقیم عمل می‌کنیم؛ یعنی، مجموع نیروهای جزئی وارد بر یک مقطع عرضی را مساوی صفر، و مجموع لنگر آنها را نسبت به محور عرضی z مساوی با لنگر خمشی M قرار می‌دهیم و معادله‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (۱-۴)$$

و

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (۳-۴)$$

با جایگذاری σ_x از (۶۵-۴) در معادله (۱-۴)،

$$-\int \frac{E \Delta\theta}{\theta} \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

در نتیجه، فاصله از مرکز انحنا C تا سطح خنثی چنین است:

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (۶۶-۴)$$

گفتنی است که $R \neq F$ (فاصله از مرکز انحنا C تا مرکز سطح مقطع عرضی است)، زیرا $\bar{r}$ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r dA \quad (۶۷-۴)$$

یعنی، در عضوهای خمیده، محور خنثی یک مقطع عرضی از مرکز سطح آن مقطع نمی‌گذرد (شکل ۷۸-۴)*. در مثال ۴-۱۰ و مسائل ۴-۲۰۷ تا ۴-۲۰۹، عبارت شعاع R سطح خنثی برای بعضی مقاطع عرضی داده شده‌اند. برای سهولت، این عبارت‌ها را در شکل ۷۹-۴ نشان داده‌ایم.

* اگر معادله (۶۶-۴) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} dA \quad (۶۶-۴)$$

به خاصیت جالبی برای سطح خنثی می‌رسیم. معادله بالا نشان می‌دهد که اگر عضو را به تعداد زیادی مقطع عرضی با مساحت dA تقسیم کنیم، انحنا $\frac{1}{R}$ سطح خنثی با مقدار متوسط انحنا $\frac{1}{\bar{r}}$ مقاطع مختلف برابر است.

با توجه به شکل ۷۶-۴،

$$r = R - y \quad r' = R' - y \quad (۶۱-۴)$$

با جایگذاری این عبارت‌ها در معادله (۶۰-۴)، داریم

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

با توجه به معادله (۵۹-۴) و با قرار دادن $\delta = \theta' - \theta$ ،

$$\delta = -y \Delta\theta \quad (۶۲-۴)$$

از تقسیم تغییر شکل δ اجزای قوس JK بر طول اولیه $r\theta$ این قوس، کرنش قائم ϵ_x این اجزا به دست می‌آید:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y \Delta\theta}{r\theta}$$

با توجه به اولین رابطه در معادله (۶۱-۴)،

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (۶۳-۴)$$

طبق این رابطه، در حالی که تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، کرنش قائم ϵ_x برحسب y از سطح خنثی به صورت خطی تغییر نمی‌کند.

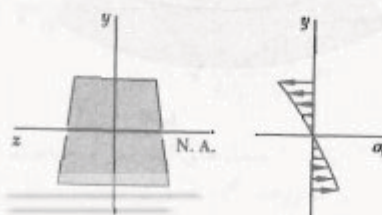
حال، تنش قائم σ_x را از قانون هوک، $\sigma_x = E \epsilon_x$ ، می‌یابیم. برای این منظور، ϵ_x را از معادله (۶۳-۴) جایگذاری می‌کنیم:

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta\theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (۶۴-۴)$$

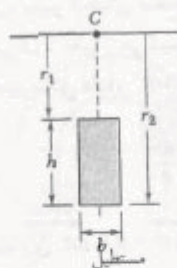
با توجه به رابطه اول در معادله‌های (۶۱-۴)،

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta\theta}{\theta} \frac{R - r}{r} \quad (۶۵-۴)$$

معادله (۶۴-۴) نشان می‌دهد که تنش قائم σ_x ، مانند ϵ_x ، برحسب فاصله y از سطح خنثی به صورت خطی تغییر نمی‌کند. با ترسیم σ_x برحسب y ، یک قوس هیپربولیک به دست می‌آید.



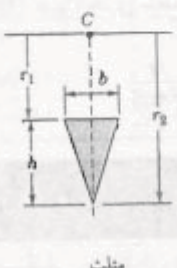
شکل ۷۷-۴



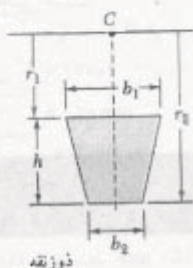
$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



$$R = \frac{1}{2} (\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})$$



$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1}$$



$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1r_2 - b_2r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

شکل ۷۹-۴ شعاع سطح خشی مقاطع عرضی با شکل های مختلف.

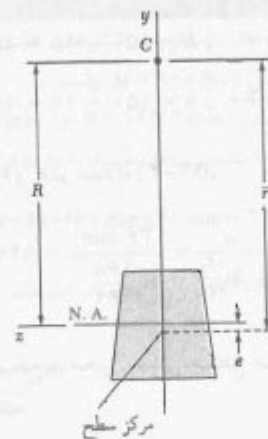
با جایگذاری $E \Delta \theta / \theta$ از معادله (۶۹-۴) در معادله های (۶۴-۴) و (۶۵-۴)، عبارت های زیر برای تنش قائم σ_x در یک تیر خمیده به دست می آیند:

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R-y)} \quad (۷۰-۴)$$

و

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{Aer} \quad (۷۱-۴)$$

گفتنی است که پارامتر e در معادله های بالا، کمیت کوچکی است که از تفریق R و $\bar{r}$ ، که طول آنها با هم قابل مقایسه است، به دست می آید. لذا، برای تعیین σ_x با دقت منطقی، باید R و $\bar{r}$ را با دقت محاسبه کرد، به خصوص اگر R و $\bar{r}$ بزرگ باشند؛ یعنی، وقتی انحنای عضو کوچک باشد. البته، همانطور که قبلاً دیدیم، در این حالت می توان با استفاده از فرمول $I = My / \sigma_x$ ، که برای عضوهای مستقیم است، σ_x را با تقریب خوب محاسبه کرد.



شکل ۷۸-۴

با جایگذاری σ_x از (۶۵-۴) در معادله (۴-۴)، می نویسیم:

$$\int \frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{R-r}{r} y dA = M$$

چون $y = R - r$

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \int \frac{(R-r)^2}{r} dA = M$$

با بسط عبارت معذور در انتگرال بالا و پس از ساده کردن، داریم:

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \left[R^2 \int \frac{dA}{r} - 2RA + \int r dA \right] = M$$

با توجه به معادله های (۶۶-۴) و (۶۷-۴)، جمله اول داخل کروشه مساوی RA و جمله آخر مساوی $\bar{r}A$ است. بنابراین،

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} (RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

با حل $E \Delta \theta / \theta$

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \quad (۶۸-۴)$$

از شکل ۷۶-۴ دیده می شود که برای $M > 0$ ، بزرگتر از صفر است. در نتیجه، شکل مقطع عرضی هر چه باشد، $\bar{r} - R > 0$ یا $\bar{r} > R$. لذا، محور خشی مقطع عرضی همواره بین مرکز سطح مقطع عرضی و مرکز انحنای عضو قرار دارد (شکل ۷۸-۴). با جایگذاری $\bar{r} - R = e$ در معادله (۶۸-۴)،

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \quad (۶۹-۴)$$

با توجه به داده‌ها،

$$r_1 = \bar{r} - \frac{1}{3}h = 150 - 18 = 132 \text{ mm}$$

$$r_2 = \bar{r} + \frac{1}{3}h = 150 + 18 = 168 \text{ mm}$$

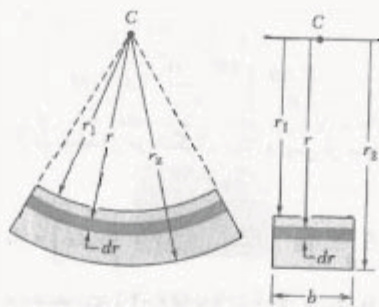
با جایگذاری h ، r_2 و r_1 در معادله (۷۳-۴)،

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{36 \text{ mm}}{\ln \frac{168}{132}} = 149.3 \text{ mm}$$

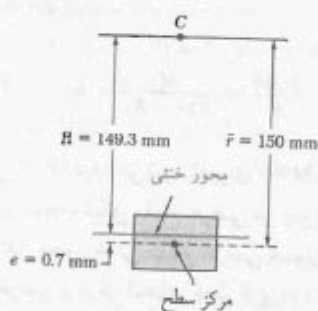
فاصله بین مرکز سطح و محور خنثی مقطع عرضی (شکل ۸۲-۴) چنین است:

$$e = \bar{r} - R = 150 - 149.3 = 0.7 \text{ mm}$$

برای تعیین e با دقت معمولی، R را باید تا پنج رقم با معنی محاسبه کرد:



شکل ۸۱-۴



شکل ۸۲-۴

حال، تغییر انحنای سطح خنثی را که از لنگر خمشی M ناشی می‌شود تعیین می‌کنیم. با حل انحنای سطح خنثی در عضو تغییر شکل داده، $1/R'$ ، از معادله ۵۹-۴ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \frac{\theta'}{\theta}$$

با جایگذاری $\theta' = \theta + \Delta\theta$ در این رابطه، و با توجه به معادله (۶۹-۴)،

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{M}{EAe} \right)$$

در نتیجه، تغییر انحنای سطح خنثی چنین است:

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \quad (۷۲-۴)$$

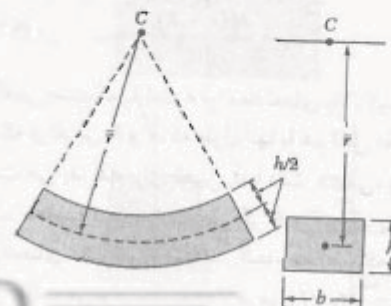
مثال ۱۰-۴

میله مستطیلی خمیده‌ای دارای شعاع متوسط $\bar{r} = 150 \text{ mm}$ است. مقطع عرضی میله به عرض $b = 60 \text{ mm}$ و عمق $h = 36 \text{ mm}$ است (شکل ۸۰-۴). فاصله e بین مرکز سطح و محور خنثی مقطع عرضی را بیابید.

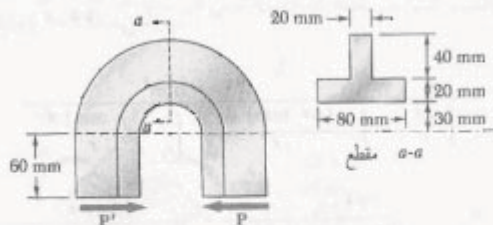
ابتدا، عبارت شعاع R سطح خنثی را می‌یابیم. شعاع‌های داخلی و خارجی میله را، به ترتیب، با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم. از معادله (۶۶-۴)،

$$R = \frac{A}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b dr}{r}} = \frac{h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (۷۳-۴)$$



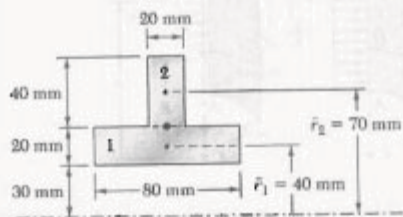
شکل ۸۰-۴



حل

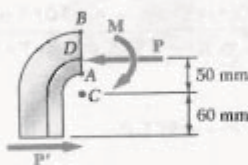
مرکز سطح مقطع عرضی. مرکز سطح D مقطع عرضی را می‌یابیم

A_i, mm^2	$\bar{r}_i, \text{mm}$	$\bar{r}_i A_i, \text{mm}^3$
۱ $(20)(80) = 1600$	۴۰	64×10^3
۲ $(40)(20) = 800$	۷۰	28×10^3
$\sum A_i = 2400$		$\sum \bar{r}_i A_i = 92 \times 10^3$
	$\bar{r} = 50 \text{ mm}$	



نیرو و کویل در D . نیروهای داخلی در مقطع $a-a$ معادلاند با نیروی P که در D وارد می‌شود و کویل M با لنگر زیر:

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0.110 \text{ m})P$$



اصل ترکیب. نیروی مرکزی P باعث ایجاد تنش فشاری یکنواخت در مقطع $a-a$ می‌شود و کویل خمشی M باعث ایجاد تنش با توزیع متغیر می‌شود [معادله (۷۱-۴)]. توجه داریم که کویل M می‌خواهد شعاع انحنای عضو را افزایش دهد و لذا مثبت است (به شکل ۷۶-۴ نگاه کنید). تنش کل در یک نقطه از مقطع $a-a$ در فاصله r از مرکز انحنای C برابر است با:

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r-R)}{Aer} \quad (۱)$$

مثال ۱۱-۴

در مثال ۱۰-۴، ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری را برای لنگر خمشی $M = 900 \text{ N.m}$ بیابید.

مقادیر $R = 149.3 \text{ mm}$ و $e = 0.7 \text{ mm}$ را، که در مثال ۱۰-۴ به دست آمد، همراه با داده‌های زیر،

$$M = 900 \text{ N.m} \quad A = bh = (60 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 2160 \text{ mm}^2$$

در معادله (۷۱-۴) قرار می‌دهیم. با استفاده از $r = r_1 = 168 \text{ mm}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1} \\ &= \frac{(900 \text{ N.m})(0.168 \text{ m} - 0.1493 \text{ m})}{(2160 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0.7 \times 10^{-3} \text{ m})(0.168 \text{ m})} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 64.3 \text{ MPa}$$

اکنون، با جایگذاری $r = r_1 = 132 \text{ mm}$ در معادله (۷۱-۴)، داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1} \\ &= \frac{(900 \text{ N.m})(0.132 \text{ m} - 0.1493 \text{ m})}{(2160 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0.7 \times 10^{-3} \text{ m})(0.132 \text{ m})} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = -75.4 \text{ MPa}$$

توجه. مقادیر به دست آمده برای $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ را با نتایج مربوط به یک میله مستقیم مقایسه می‌کنیم. با استفاده از معادله (۱۵-۴) در قسمت ۴-۴،

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= \pm \frac{Mc}{I} \\ &= \pm \frac{(900 \text{ N.m})(0.018 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0.06 \text{ m})(0.036)^3} = \pm 64.44 \text{ MPa} \end{aligned}$$

مسئله نمونه ۱۱-۴

یک قطعه مکانیکی با مقطع عرضی T ، مطابق شکل بارگذاری شده است. اگر تنش مجاز فشاری 50 MPa باشد، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان بر قطعه وارد کرد بیابید.

مسائل

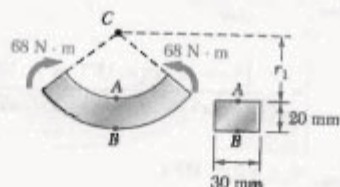
۱۵۶-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،
مطلوبست تنش در نقطه A وقتی: (الف) $h = 50 \text{ mm}$ ،
(ب) $h = 60 \text{ mm}$



شکل م-۱۵۶ و م-۱۵۷

۱۵۷-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،
تنش در نقاط A و B را برای $h = 55 \text{ mm}$ بیابید.

۱۵۸-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،
تنش در نقاط A و B را برای $r_1 = 40 \text{ mm}$ بیابید.



شکل م-۱۵۸ و م-۱۵۹

۱۵۹-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،
مطلوبست تنش در نقطه A وقتی: (الف) $r_1 = 30 \text{ mm}$ ،
(ب) $r_1 = 50 \text{ mm}$

۱۶۰-۴ قسمت خمیده میله نشان داده شده دارای شعاع
داخلی 20 mm است. اگر خط اثر نیروی 3 kN در فاصله
 $a = 60 \text{ mm}$ از صفحه قائمی که شامل مرکز انحنا میله است
قرار داشته باشد، ماکزیمم تنش فشاری در میله را بیابید.

۱۶۱-۴ اگر تنش مجاز در میله 150 MPa باشد،
مطلوبست ماکزیمم فاصله مجاز a خط اثر نیروی 3 kN تا
صفحه قائمی که شامل مرکز انحنا میله است.

شعاع سطح خشی. حال شعاع R سطح خشی را با استفاده از
معادله (۲-۶۶) می‌یابیم:

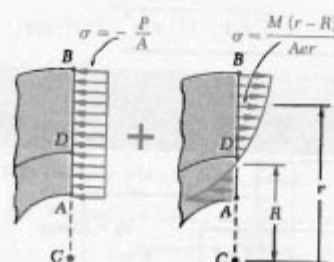
$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{2400 \text{ mm}^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm}) dr}{r} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{(20 \text{ mm}) dr}{r}}$$

$$= \frac{2400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2400}{40.866 + 11.756}$$

$$= 45.61 \text{ mm} = 0.04561 \text{ m}$$

همچنین:

$$e = \bar{r} - R = 0.05000 \text{ m} - 0.04561 \text{ m} = 0.00439 \text{ m}$$



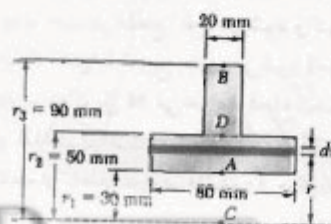
بار مجاز. ماکزیمم تنش فشاری در نقطه A ، یعنی در
 $r = 0.030 \text{ m}$ روی می‌دهد. $\sigma_{all} = 50 \text{ MPa}$ ، با استفاده از
معادله (۱):

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = - \frac{P}{2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

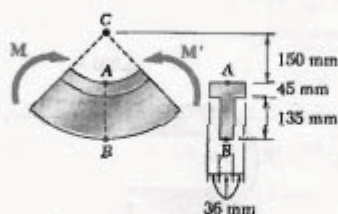
$$+ \frac{(0.110 \text{ P})(0.030 \text{ m} - 0.04561 \text{ m})}{(2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0.00439 \text{ m})(0.030 \text{ m})}$$

$$\Rightarrow -50 \times 10^6 = -417 P - 5432 P$$

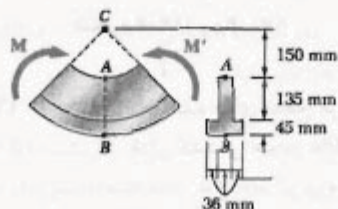
$$\Rightarrow P = 1.55 \text{ kN} \quad \leftarrow$$



۱۶۵-۴ و ۱۶۶-۴ اگر $M = 2 \text{ kN.m}$ ، مطلوبست:
(الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B .

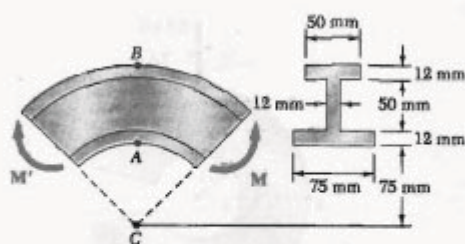


شکل م-۱۶۵



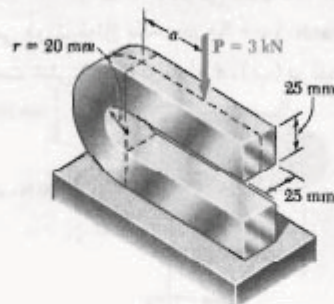
شکل م-۱۶۶

۱۶۷-۴ سه ورق به هم جوش شده‌اند و تیر خمیده نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. برای بارگذاری داده شده، فاصله e بین محور خنثی و مرکز سطح مقطع عرضی را بیابید.



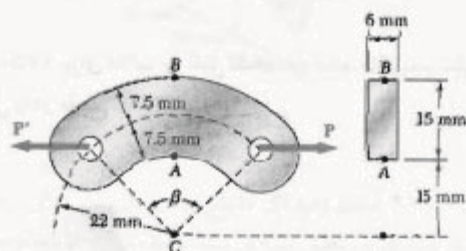
شکل م-۱۶۷ و م-۱۶۸

۱۶۸-۴ سه ورق به هم جوش شده‌اند و تیر خمیده نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. برای $M = 900 \text{ N.m}$ ، مطلوبست:
(الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B ، (ج) تنش در مرکز سطح مقطع عرضی.



شکل م-۱۶۰ و م-۱۶۱

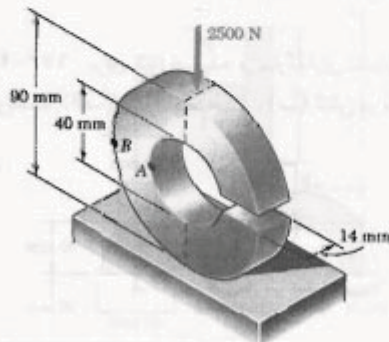
۱۶۲-۳ میله‌های فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده و زوایای مرکزی مختلف β در دسترس‌اند. اگر تنش ماکزیمم 100 MPa باشد، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان در حالت $\beta = 90^\circ$ بر میله وارد کرد بیابید.



شکل م-۱۶۲

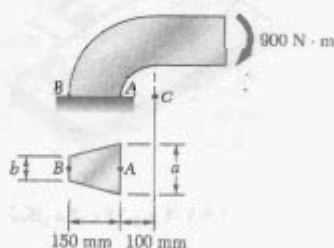
۱۶۳-۴ مسئله ۱۶۲-۴ را با فرض $\beta = 60^\circ$ حل کنید.

۱۶۴-۴ برای حلقه شیاردار نشان داده شده، مطلوبست تنش: (الف) در نقطه A ، (ب) در نقطه B .



شکل م-۱۶۴

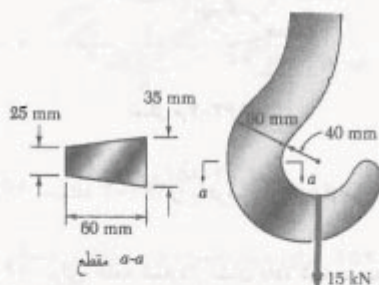
۱۷۳-۴ اگر قطعه مکانیکی نشان داده شده دارای مقطع عرضی ذوزنقه‌ای با $a = 90 \text{ mm}$ و $b = 62 \text{ mm}$ باشد، مطلوبست: تنش (الف) در نقطه A ، (ب) در نقطه B .



شکل م ۱۷۳-۴ و م ۱۷۴-۴

۱۷۴-۴ اگر قطعه مکانیکی نشان داده شده دارای مقطع عرضی ذوزنقه‌ای با $a = 62 \text{ mm}$ و $b = 90 \text{ mm}$ باشد، مطلوبست: تنش (الف) در نقطه A ، (ب) در نقطه B .

۱۷۵-۴ برای قلاب جرثقیل نشان داده شده، ماکزیمم تنش کششی را در مقطع $a-a$ بیابید.



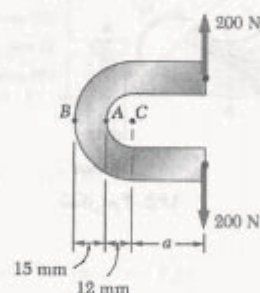
شکل م ۱۷۵-۴

۱۷۶-۴ برای تیر خمیده و یارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: تنش (الف) در نقطه A ، (ب) در نقطه B .



شکل م ۱۷۶-۴

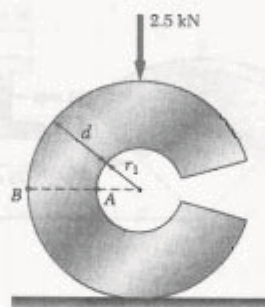
۱۶۹-۴ میله نشان داده شده دارای مقطع عرضی دایره‌ای به قطر ۱۵ mm است. اگر $a = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B .



شکل م ۱۶۹-۴ و م ۱۷۰-۴

۱۷۰-۴ میله نشان داده شده دارای مقطع عرضی دایره‌ای به قطر ۱۵ mm است. اگر تنش کششی مجاز 55 MPa باشد، مطلوبست ماکزیمم فاصله مجاز a از خط اثر نیروی 200 N تا صفحه‌ای که شامل مرکز انحنا میله است.

۱۷۱-۴ حلقه شکاف‌دار نشان داده شده دارای شعاع داخلی $r_1 = 20 \text{ mm}$ و مقطع عرضی دایره‌ای به قطر $d = 32 \text{ mm}$ است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B .



شکل م ۱۷۱-۴ و ۱۷۲-۴

۱۷۲-۴ حلقه شکاف‌دار نشان داده شده دارای شعاع داخلی $r_1 = 16 \text{ mm}$ و مقطع عرضی دایره‌ای به قطر $d = 32 \text{ mm}$ است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B .

۴-۱۸۰ تا ۴-۱۸۲ با استفاده از معادله (۴-۶۶)، عبارت R داده شده در مسئله ۴-۷۹ را در حالت‌های زیر بیابید:

۴-۱۸۰ مقطع عرضی دایره‌ای

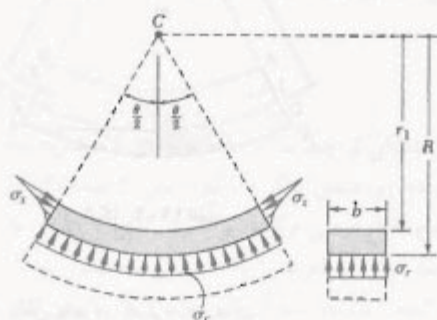
۴-۱۸۱ مقطع دوزنقه‌ای

۴-۱۸۲ مقطع مثلثی

۴-۱۸۳ برای تیر خمیده با مقطع عرضی مستطیلی که تحت کوپل خمشی M قرار دارد، نشان دهید که تنش شعاعی در سطح خنثی عبارت است از

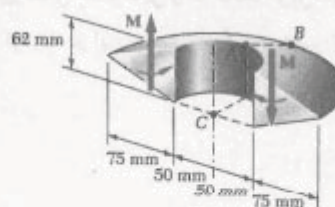
$$\sigma_r = \frac{M}{Ae} \left(1 - \frac{r_1}{R} - \ln \frac{R}{r_1} \right)$$

و مقدار σ_r را برای تیر خمیده مثال‌های ۴-۱۰ و ۴-۱۱ محاسبه کنید. (راهنمایی: نمودار آزاد قسمتی از تیر را که بالای سطح خنثی است در نظر بگیرید).

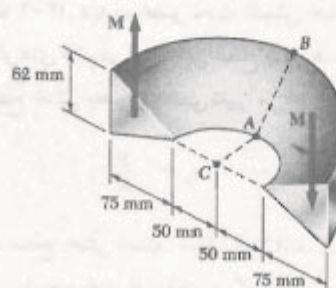


شکل م-۱۸۳

۴-۱۷۷ و ۴-۱۷۸ اگر $M = 560 \text{ N.m}$ ، مطلوب است: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B .



شکل م-۱۷۷

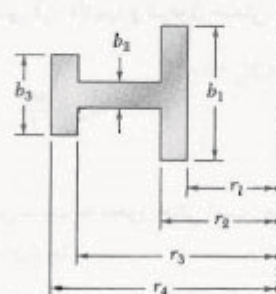


شکل م-۱۷۸

۴-۱۷۹ نشان دهید اگر مقطع عرضی تیر خمیده‌ای از دو یا تعداد بیشتری مستطیل تشکیل شده باشد، شعاع R سطح خنثی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$R = \frac{A}{\ln \left[\left(\frac{r_1}{r_i} \right)^{b_1} \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^{b_j} \left(\frac{r_j}{r_o} \right)^{b_o} \right]}$$

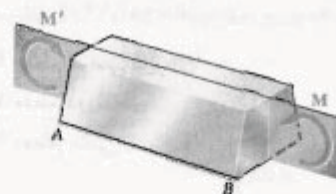
که در آن A مساحت کل مقطع عرضی است.



شکل م-۱۷۹

مرور و خلاصه فصل ۴

در این فصل، تنش و تغییر شکل عضوهایی را که تحت کویپل‌های مساوی و متضاد M و M' قرار دارند، بررسی کردیم؛ در این حالت، می‌گویند عضو تحت خمش خالص است (شکل ۴-۱).

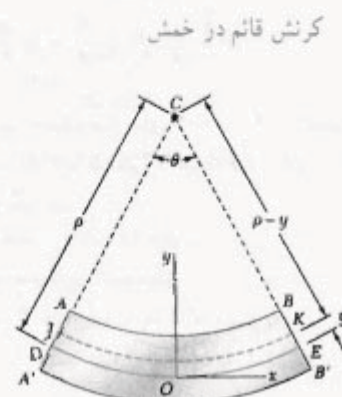


شکل ۴-۱

ابتدا، عضوهایی را مطالعه کردیم که دارای صفحه تقارن بودند و کویپل‌ها در آن صفحه وارد می‌شدند. نشان دادیم که، با تغییر شکل عضو، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند (قسمت ۴-۳). دیدیم عضو تحت خمش خالص دارای یک سطح خنثی است. تنش‌ها و کرنش‌های قائم در امتداد این سطح صفر هستند و کرنش قائم طولی ϵ_x برحسب فاصله از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (۸-۴)$$

که در آن، ρ شعاع انحناي سطح خنثی است (شکل ۴-۱۲ الف). فصل مشترک سطح خنثی با یک مقطع عرضی را محور خنثی آن مقطع می‌گویند.



شکل ۴-۱۲ الف

برای عضوهای متشکل از چند ماده که از قانون هوک پیروی می‌کنند (قسمت ۴-۴)، تنش قائم σ_x برحسب فاصله از محور خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۴-۱۳). اگر تنش ماکزیمم را با σ_m نشان دهیم،

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (۱۲-۴)$$

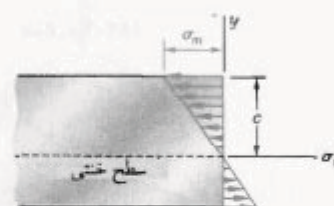
که در آن، c ماکزیمم فاصله یک نقطه از مقطع تا محور خنثی است. با مساوی صفر قرار دادن مجموع نیروهای جزئی $\sigma_x dA$ ، نشان دادیم که محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی عضوی که تحت خمش خالص است می‌گذرد. سپس، مجموع لنگر نیروهای جزئی را مساوی لنگر خمشی قرار دادیم، و فرمول خمش الاستیک را برای ماکزیمم تنش قائم به دست آوردیم:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۱۵-۴)$$

که در آن، I ممان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور خنثی است. همچنین، تنش قائم را در فاصله y از محور خنثی به دست آوردیم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (۱۶-۴)$$

تنش قائم در گستره الاستیک



شکل ۴-۱۳

فرمول خمش الاستیک

با توجه به اینکه I و c به شکل هندسی مقطع عرضی بستگی دارند، مدول الاستیک را با تعریف زیر در نظر گرفتیم:

$$S = \frac{I}{c} \quad (۱۷-۴)$$

سپس، عبارت زیر را برای ماکزیمم تنش قائم نوشتیم:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (۱۸-۴)$$

با توجه به اینکه انحناى عضو معکوس شعاع انحناى آن است، انحناى عضو را به صورت زیر نوشتیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (۲۱-۴)$$

در قسمت ۴-۵، در بررسی خمش عضوهای همگن دارای صفحه تقارن دیدیم که تغییر شکل ها در صفحه مقطع عرضی روی می دهند و انحناى غیرالاستیک عضو را ایجاد می کنند.

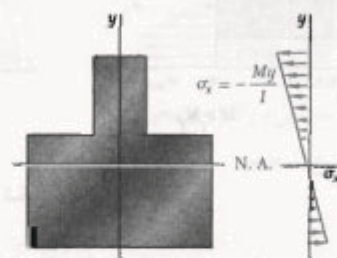
سپس، خمش عضوهای متشکل از چند ماده با مدولهای الاستیته مختلف را بررسی کردیم (قسمت ۴-۶). دیدیم، ضمن اینکه مقاطع به صورت صفحه ای می مانند، محور خنثی معمولاً از مرکز سطح مقطع عرضی مرکب نمی گذرد (شکل ۴-۲۴). با استفاده از نسبت مدولهای الاستیته مواد، مقطع تبدیل یافته متناظر با عضو معادلی را که تماماً از یک نوع ماده ساخته شده است به دست آوردیم. سپس، برای تعیین تنش در این عضو همگن (شکل ۴-۲۶)، از روش های قبل و برای تعیین تنش در تیر مرکب از نسبت مدولهای الاستیته استفاده کردیم (مسائل نمونه ۴-۳ و ۴-۴).

مدول الاستیک

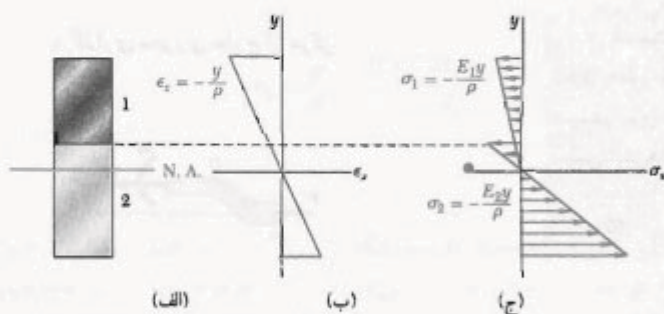
انحناى عضو

انحناى غیرالاستیک

عضوهای چند ماده ای



شکل ۴-۲۶



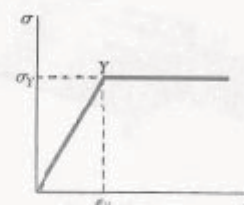
شکل ۴-۲۴

NUEB

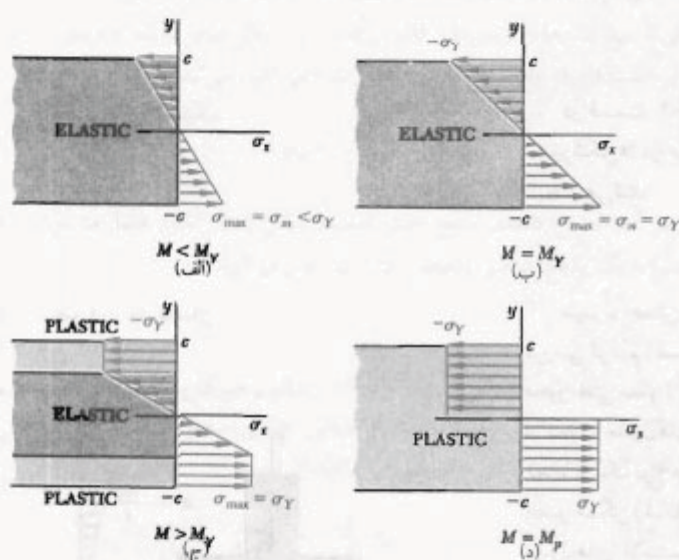
تمرکز تنش

در قسمت ۴-۷، تمرکز تنش را در عضوهای تحت خمش خالص بررسی کردیم و نمودار ضریب تمرکز تنش را برای میله‌های مستقیم و گرد و دایره و شیاردار را در شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲ نشان دادیم.

سپس، دیدیم که عضوهای چند ماده‌ای از قانون هوک پیروی نمی‌کنند (قسمت ۴-۸). در بررسی تیر مستطیلی الاستوپلاستیک (شکل ۴-۳۹) هنگام افزایش لنگر خمشی دیدیم که ماکزیمم لنگر الاستیک M_y هنگام شروع تسلیم در تیر به وجود می‌آید (شکل ۴-۴۰). با افزایش بیشتر لنگر خمشی، مناطق پلاستیک به وجود می‌آیند و اندازه هسته الاستیک عضو کاهش می‌یافت (قسمت ۴-۹). سرانجام، تیر کاملاً پلاستیک می‌شود در این حالت، لنگر پلاستیک M_p (لنگر ماکزیمم) را داشتیم. در قسمت ۴-۱۱، تغییر شکل‌های دائمی و تنش‌های باقیمانده در یک عضو را پس از حذف بارهایی که باعث تسلیم شده‌اند بررسی کردیم.



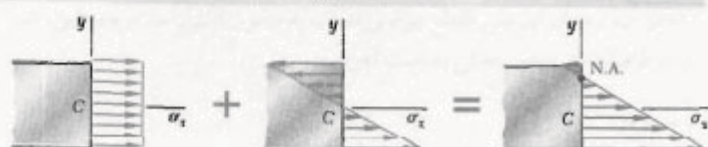
شکل ۴-۳۹



شکل ۴-۴۰

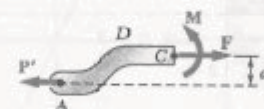
در قسمت ۴-۱۲، با استفاده از روش‌های قبل، تنش در عضوهایی را که در صفحه تقارن به طور خارج از مرکز بارگذاری شده‌اند مطالعه کردیم. بار خارج از مرکز را با یک سیستم نیرو کوپل واقع در مرکز سطح مقطع عرضی جایگزین (شکل ۴-۴۸ ب) و سپس تنش‌های ناشی از بار مرکزی و کوپل خمشی را ترکیب کردیم (شکل ۴-۵۱):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (4-50)$$



شکل ۴-۵۱

بارگذاری محوری خارج از مرکز



شکل ۴-۴۸ ب

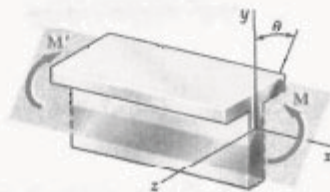


سپس، خمش عضوها با مقطع عرضی نامتقارن را بررسی کردیم [قسمت ۴-۱۳]. دیدیم که اگر بردار M در امتداد یکی از محاورهای اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشد، فرمول خمش را می‌توان به کار برد. در هنگام لزوم، M را به مؤلفه‌هایش در امتداد محاورهای اصلی تجزیه می‌کردیم و تنش‌های ناشی از کوپل‌های مؤلفه‌ای را با هم ترکیب می‌کردیم (شکل‌های ۴-۶۰ و ۴-۶۱).

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۵۵-۴)$$

برای کوپل M نشان داده شده در شکل ۴-۶۵، وضعیت محور خشی را از معادله زیر به دست آوردیم:

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (۵۷-۴)$$



شکل ۴-۶۰

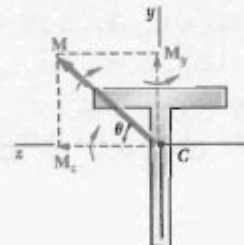
این حالت در قسمت ۴-۱۴ بررسی شد. در این قسمت بود که مجدداً بار را با یک سیستم نیرو-کوپل واقع در مرکز سطح جایگزین می‌کردیم. سپس، تنش‌های ناشی از بار مرکزی و دو مؤلفه کوپل واقع در امتداد محاورهای اصلی را با هم ترکیب می‌کردیم:

$$\sigma_x = \frac{p}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۵۸-۴)$$

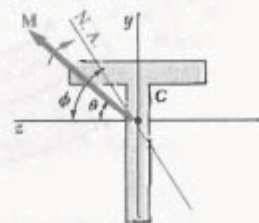
با تحلیل تنش در عضوهای خمیده (شکل ۴-۱۷۶ الف)، این فصل را به پایان بردیم. دیدیم که اگر عضو خمیده‌ای تحت خمش قرار گیرد، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، و تنش به صورت خطی تغییر نمی‌کند و سطح خشی از مرکز سطح مقطع عرضی نمی‌گذرد. فاصله مرکز انحنای عضو تا سطح خشی چنین بود:

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (۶۴-۴)$$

خمش نامتقارن



شکل ۴-۶۱



شکل ۴-۶۵

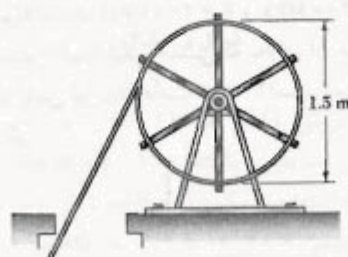
حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز

عضوهای خمیده

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R - y)} \quad (V \circ - F)$$

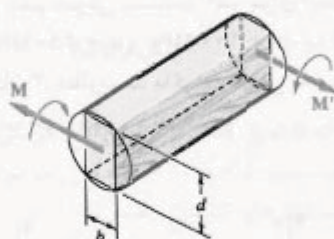
شكل ٧٦-٤ الف

۱۸۷-۴ گاهی، برای تمیز کردن مجراهای زیرزمینی که مسدود شده‌اند از میله‌های مستقیم به قطر ۸ mm و به طول ۶۰ m استفاده می‌شود. میله‌ها از فولاد پر استقامت ساخته شده‌اند و پیرامون قرقه‌هایی به قطر ۱٫۵ m پیچیده شده‌اند. اگر بخواهیم تنش در میله‌ها از استقامت تسلیم بیشتر نشود، مطلوبست: (الف) تنش در میله وقتی میله، که در ابتدا مستقیم است، پیرامون قرقه پیچیده شود، (ب) لنگر خمشی متناظر در میله. از $E = ۲۰۰ \text{ GPa}$ استفاده کنید.



شکل م-۱۸۷

۱۸۸-۴ کوپل M بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، وارد شده است. می‌خواهیم این تیر را با ااره کردن الواری با مقطع عرضی دایره‌ای به دست آوریم. مطلوبست نسبت d/b که به‌ازای آن: (الف) تنش ماکزیم σ_m تا حد امکان کوچک باشد، (ب) شعاع انحنای تیر به ماکزیمم برسد.

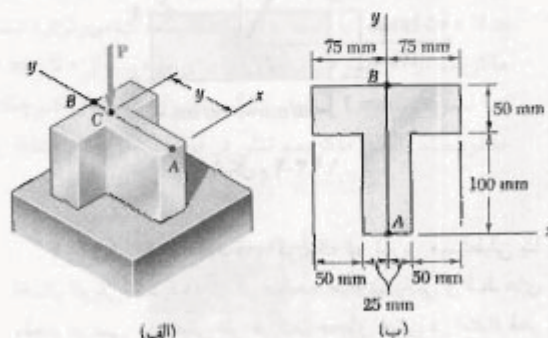


شکل م-۱۸۸

۱۸۹-۴ یک تسمه مسی ($E_s = ۱۰۵ \text{ GPa}$) و یک تسمه آلومینیومی ($E_a = ۷۵ \text{ GPa}$) به یکدیگر متصل شده‌اند و میله مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. اگر میله با اعمال کوپل ۳۵ N.m حول یک محور افقی خم شود، مطلوبست ماکزیمم تنش: (الف) در تسمه آلومینیومی، (ب) در تسمه مسی.

مسائل تکمیلی

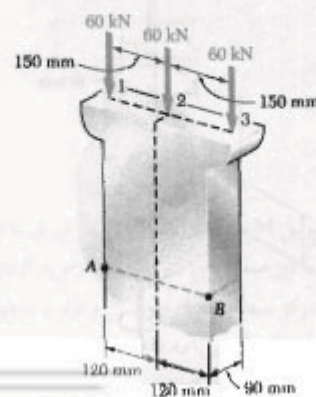
۱۸۴-۴ نیروی عمودی P با مقدار ۸۰ kN در نقطه C روی محور تقارن مقطع عرضی یک ستون کوتاه وارد شده است. اگر $r = ۱۲۵ \text{ mm}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A ، (ب) تنش در نقطه B ، (ج) مکان محور خمشی.



شکل م-۱۸۴ و م-۱۸۵

۱۸۵-۴ نیروی عمودی P با مقدار ۸۰ kN در نقطه C روی محور تقارن مقطع عرضی ستون نشان داده شده وارد شده است. مطلوبست گستره مقدار y به‌طوری که تنش کششی در ستون روی ندهد.

۱۸۶-۴ مطلوبست تنش در نقاط A و B : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای بارهای ۶۰ kN که فقط در نقاط ۱ و ۲ وارد می‌شوند.



شکل م-۱۸۶