



معادله خط: معادله‌ی خط به یکی از صورت‌های زیر بیان می‌شود:

الف) گسترده (ضمنی): معادله گسترده خط به صورت $ax + by + c = 0$ است. در این حالت شیب

خط از رابطه‌ی $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا خط از رابطه‌ی $-\frac{c}{b}$ به دست می‌آید.

الف) استاندارد: معادله استاندارد خط به صورت $y = mx + b$ است که در آن m شیب خط و b عرض

از مبدا آن را نشان می‌دهد.

نکته: خط‌های $x = a$ خط‌های عمودی با شیب تعریف نشده و خط‌های $y = a$ افقی با شیب صفر هستند.



مثال: شیب و عرض از مبدا خط‌های زیر را بیابید و سپس آن‌ها را رسم کنید.

$$4x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 4x - 2$$

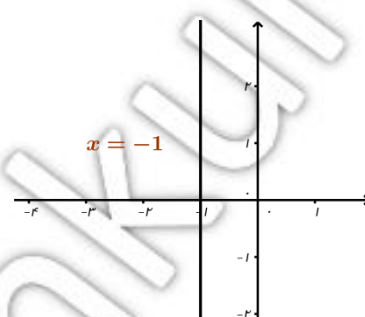
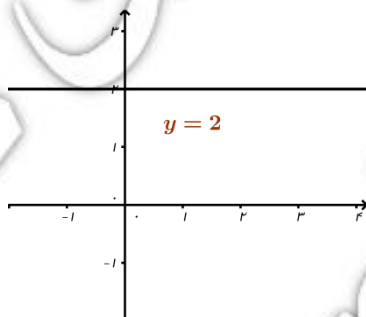
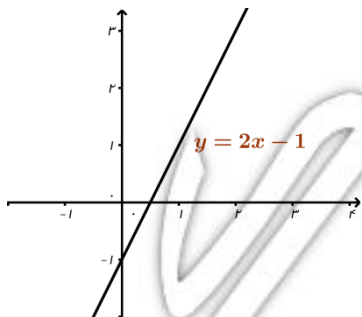
$$y = 2$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \times \\ b = \times \end{cases}$$



نکته: اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه از خط باشند، شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بدست

می‌آید.

نکته: معادله خطی که از دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ می‌گذرد به صورت

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ است که در آن } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته: هر دو خط موازی، شیب برابری دارند و هر دو خط عمود، شیب‌شان عکس و قرینه یکدیگر است. اگر

این دو حالت اتفاق نیافتد، دو خط متقاطع خواهند بود.

((حضرت علی(ع): عادت بد، دشمنی است که با قدرت بر صاحبش حکومت می‌کند.))



مثال: معادله خطی را بیابید که از $A(2,0)$ بگذرد و بر خط $2y = 3x - 1$ عمود باشد.

$$2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow m' = -\frac{2}{3} \xrightarrow{A(2,0)} y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$



تست: به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(6, 4a + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

خارج ۸۵

$(1) -2, \frac{9}{4}$ $(2) -2, \frac{3}{4}$ $(3) 2, -\frac{3}{4}$ $(4) 2, -\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} m_1 = \frac{3-0}{a-0} \\ m_2 = \frac{4a+1-0}{6-0} \end{cases} \xrightarrow{m_1=m_2} \frac{3}{a} = \frac{4a+1}{6} \Rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (4a+9)(4a-18) = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}, a = \frac{9}{2}$$



تست: اگر خط گذرنده از دو نقطه $A(m-1, 2)$ و $B(1, 4)$ بر خط $2y + 3x = 1$ عمود باشد، m کدام است؟

خارج ۸۵

$(1) 1$ $(2) 2$ $(3) -1$ $(4) -2$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} (m-1, 2), (1, 4) \Rightarrow m_1 = \frac{2-4}{m-1-1} = \frac{-2}{m-2} \Rightarrow m_1 = \frac{-1}{m-2} \\ 2y + 3x = 1 \Rightarrow m_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{m-2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow m-2 = \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$$

تست: اگر دو خط $2y - 3x = 1$ و $y = mx + 5$ با هم موازی باشند، مقدار m کدام است؟

خارج ۸۵

$(1) \frac{2}{3}$ $(2) \frac{3}{2}$ $(3) 3$ $(4) -3$



تست ۲: - از نقطه $A(3, 2)$ خطی موازی خط $3x + 2y = 1$ رسم کرده‌ایم. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۷/۵ (۴)

۸ (۳)

۶/۵ (۲)

۱۱ (۱)



تست ۳: - اگر سه نقطه متمایز $A(4, 1)$ ، $B(a+1, 2a-2)$ و $C(a+3, 2a-5)$ در یک امتداد باشند، مقدار a کدام است؟

$\frac{17}{7}$ (۴)

$\frac{16}{7}$ (۳)

$\frac{15}{7}$ (۲)

۲ (۱)



تست ۴: - اگر خط $y = nx + 4$ بر دو خط $y = (m-5)x + 7$ و $y = (7-m)x - 1$ عمود باشد، حاصل $m - n$ کدام است؟

صفر (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)



تست ۵: - عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه $(5, -1)$ و عمود بر خط $y = 2x + 1$ ، کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

۱ (۱)

(انسانی ۹۵)

تست ۶: - خط گذرنده از دو نقطه $(2, 5)$ و $(-1, 3)$ ، خط به معادله $y + x + 3 = 0$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(انسانی ۹۲)

تعریف



طول پاره‌خط و نقطه‌ی وسط آن:

الف) فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ ، $A(x_2, y_2)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ب) نقطه وسط دو نقطه $A(x_1, y_1)$ ، $A(x_2, y_2)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



تست: نقاط $A(7,5)$ و $C(3,9)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

۲۴ (۴)

$4\sqrt{10}$ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ صحیح است. در مربع اگر طول ضلع x باشد، طول قطر $x\sqrt{2}$ است. داریم:

$$AC = \sqrt{(7-3)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow P = 4(4) = 16$$



تست: در مثلثی با رئوس $A(2,5)$ ، $B(3,7)$ و $C(-1,5)$ معادله میانه وارد بر ضلع BC کدام است؟

$x+2y=12$ (۴)

$y-x=3$ (۳)

$x+y=7$ (۲)

$2x+y=9$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.

$$B(3,7), C(-1,5) \Rightarrow M_{BC} \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{7+5}{2} \right) = (1,6)$$

$$\xrightarrow{(1,6), (2,5)} y-5 = \frac{6-5}{1-2}(x-2) \Rightarrow y = -x+7$$

مشق: فاصله دو نقطه $A(1,0)$ ، $B(-2,4)$ و همچنین نقطه وسط آن‌ها را بیابید.



تست ۷: قرینه نقطه $A(a-1, b-5)$ نسبت به نقطه $M(-1,4)$ ، نقطه $B(2b+5, 2a+1)$ می‌باشد. ab کدام است؟

-۸۰ (۴)

۸۰ (۳)

-۴۰ (۲)

۴۰ (۱)



تست ۸: اگر نقاط $A(2,1)$ ، $B(4,-2)$ ، $C(6,5)$ و $D(a,b)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل ab کدام است؟

صفر (۴)

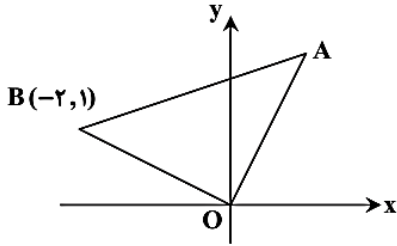
۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۰۸ (۱)



نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات و روی خط $y = 2x$ قرار دارد. اگر مثلث OAB در رأس O متساوی الساقین باشد، عرض نقطه A - چقدر است؟



- چقدر است؟
- ۶ (۱)
 - ۲ (۲)
 - ۳ (۳)
 - $\frac{3}{2}$ (۴)

مثلث ABC با رئوسهای $A = (0, 2)$, $B = (2, -2)$, $C = (-3, 1)$ را در نظر بگیرید. طول و معادله میانه‌ی وارد بر ضلع BC و محیط مثلث را بیابید.

چهارضلعی ABCD یک لوزی است که در آن مختصات رأس A به شکل $A(3, -3)$ است و قطر BC روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد. مختصات نقطه D کدام است؟

- (۱) $(-5, 1)$
- (۲) $(-4, 3)$
- (۳) $(-3, 5)$
- (۴) $(-3, 3)$



نکته: اگر دو نقطه هم عرض باشند، فاصله آنها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

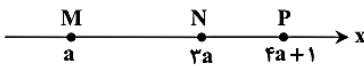
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

نکته: اگر دو نقطه هم طول باشند، فاصله آنها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$



تست: در شکل مقابل داریم: $2MN + MP = 22$. اندازه پاره خط NP کدام است؟



- ۶ (۱)
- ۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

$$2MN + MP = 22 \Rightarrow 2(2a) + (3a + 1) = 22 \Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{NP = a + 1} NP = 4$$

تست ۱۱: اگر دو نقطه $A = (m - 4n, m - n)$ و $B = (2m + n - 3, m + n + 2)$ به ترتیب روی قسمت مثبت محور X ها و Y ها

۴ (ع)

۵ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

باشند، طول پاره خط AB کدام است؟



فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A = (x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

نکته: فاصله خط $ax + by + c = 0$ از مبدا مختصات، از رابطه $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست

می‌آید.



مثال: فاصله خط $3x - 2y = 1$ را از نقطه $A = (1, -2)$ و از مبدا مختصات بیابید.

پاسخ: ابتدا معادله خط داده شده را به صورت ضمیمی نوشته و سپس فاصله نقاط را از این خط به دست می‌آوریم:

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{|3(1) - 2(-2) - 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \\ OH = \frac{|-1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \end{cases}$$



تست: دو ضلع یک مربع بر دو خط موازی $x + 2y = 4$ و $mx - 4y = 8$ منطبق هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱۲/۸ (۴)

۶/۴ (۳)

۱۴/۴ (۲)

۷/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. ابتدا چون دو خط موازی یکدیگر هستند پس باید شیب‌های برابری داشته باشند. پس داریم:

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ mx - 4y - 8 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div (-2)} \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{m}{2} + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

برای یافتن طول ضلع مربع کافی است فاصله دو ضلع موازی داده شده را از یکدیگر بیابیم:

$$x = \frac{|4 - (-4)|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = x^2 = \frac{64}{5} = 12.8$$



تست: دو نقطه‌ی A و B واقع بر خط به معادله‌ی $2x - y = 0$ از خط به معادله‌ی $3x = 4y + 5$ به فاصله‌ی 2 قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $4\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. ابتدا چون دو خط موازی یکدیگر هستند پس باید شیب‌های برابری داشته باشند. پس داریم:

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ mx - 4y - 8 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div(-2)} \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -\frac{m}{2} + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

برای یافتن طول ضلع مربع کافی است فاصله دو ضلع موازی داده شده را از یکدیگر بیابیم:

$$x = \frac{|4 - (-4)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = x^2 = \frac{64}{5} = 12.8$$

سوال ۲: مثلث ABC با رئوس‌های $A = (0, 4)$, $B = (-3, 7)$, $C = (2, 5)$ را در نظر بگیرید. فاصله پای ارتفاع و میانه وارد بر ضلع AC را از یکدیگر بیابید.

سوال ۴: مثلث ABC با رئوس‌های $A = (0, 3)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, -1)$ را در نظر بگیرید. معادله ارتفاع وارد بر ضلع AB و طول آن را بیابید.

تست ۱۲: فاصله دو خط $y = 2x + 11$ و $y = 2x - 4$ از یکدیگر چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۳: - مجموع طول و عرض نقطه‌ای واقع بر خط $y - x = 2$ که از خط $3x - 4y = 5$ به فاصله ۳ است، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -54 (۲) -6 (۳) -2 (۴) 54



تست ۱۴: - یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴



تست ۱۵: - فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

خارج ۸۸



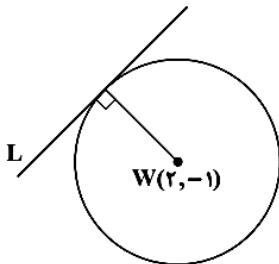
تست ۱۶: - معادله‌ی چهار ضلع یک مستطیل به صورت $2x + y = 5$ ، $2x + y = 3$ ، $x - 2y = 14$ و $x + ay = 6$ می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $12\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $8\sqrt{5}$



تست ۱۷: - خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$



تست ۱۸: - دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

تجربی ۹۲



تست ۱۹: - نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

خارج ۹۳



((اهاام هادی(ع): نارضایتی پدر و مادر، کمرتوانی را به دنبال دارد و آدمی را به ذلت می‌کشاند.))

تست ۲۰: نقاط $M(4, 2)$ ، $N(7, 6)$ و $P(0, 5)$ رؤس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

- ۱۱/۵ (۱) ۱۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۳ (۴)



تست ۲۱: نقطه $O'(3, 2)$ مرکز لوزی ABCD است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $6x + y = 8$ معادله یکی از اضلاع این لوزی باشد، محیط لوزی چقدر است؟

- ۸√۳۷ (۱) ۴۸ (۲) ۱۰√۳۴ (۳) ۴√۶۸ (۴)



تست ۲۲: از نقطه $A(3, 2)$ خط $y = 2x - 4$ را مماس بر دایره‌ای به مرکز $W(-1, 2)$ رسم کرده‌ایم. فاصله A تا نقطه تماس چند برابر $\frac{1}{\sqrt{5}}$ است؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



تست ۲۳: اگر داشته باشیم $A(6, 5)$ ، $B(4, 1)$ و $C(-2, -1)$ ، فاصله نقطه A از عمود منصف پاره خط BC چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)



- ۹/۱۰ (۳) ۹/۵ (۴)

تست ۲۴: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x + 1$ واقع است. اگر $A(-1, 2)$ یکی از رؤس این مربع باشد، اندازه قطر مربع کدام است؟

- ۳√۱۰/۵ (۱) ۹/۵ (۲) ۵√۱۰/۳ (۳) ۵/۹ (۴)

