BWC ROUND #1

در آغاز، امیدوارم از سوالات مسابقه خوشتان آمده باشد، خوب بریم سراغ پاسخ پرسش‌ها

توضیحات

این سند، پاسخ‌نامه‌ی سوالات آزمون یکم ماست، لطفا قبل از اینکه شروع به خواندن این پاسخ‌ها کنید، حتما به اندازه‌ی کافی روی سوالات وقت گذاشته باشید، همچنین در این پاسخ‌نامه، به مواردی مثل باقی مانده‌گیری که جز موارد پر اهمیتی است، اشاره‌ای نشده ولی درکدتان بهتراست بعد از هر جمع،ضرب،منها عملیات باقی مانده‌گیری را انجام دهید.

راه‌حل پرسش یکم

راه حل این سوال به وسیله‌ی غربال اراتستن با O(n lgn) بود، بدین صورت که اگه $f(i)$ رو برابر مقداری که عدد i در ضرب ما تاثیر داره بدونیم، پاسخ مسئله برابر با $f(1) \times f(2) \times \ldots \times f(n)$ بود،

مثلا:

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2, f(5) = 5, f(6) = 1, \ldots.$$

خوب حالا اگه عنصر i ام به مقدار $f(i)$ در ک.م.م تاثیر بذاره، تاثیر گذاری عدد $i \times k\ (k \in Z, k \geq 2)$ تقسیم بر $f(i)$ میشه، اثباتش هم بدیهی هست دیگه، حالا از همین استفاده می‌کنیم، در ابتدا مقدار $f(i) = i$ در نظر بگیرید، بعد به ازای هر $i\ (1 \leq i \leq n)$ مقدار A رو در $f(i)$ ضرب کنید و $f(i \times k)$ رو تقسیم بر $f(i)$ کنید، قسمت الف و ب و ج با استفاده از این ایده حل میشه، برای قسمت د، مقدار $Ans = 0$ رو در ابتدای کدتون تعریف کنید و در هر مرحله مقدار Ans رو به اضافه‌ی A کنید.

کد A2:

http://paste.white-crow.ir/view/306/2y10mQiuaN19LOX

کد A3:

http://paste.white-crow.ir/view/307/2y10gNCXsKUggDp

کد A4:

http://paste.white-crow.ir/view/305/2y10fmM76Wezs09

راه‌حل سوال دوم:

میدانیم مقدار انتخاب r از n برابر با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!}$$

است و چون $(\Delta, r!) = 1$ می‌توانیم از قضیه‌ی کوچک فرما استفاده کنیم که چنین چیزی را نتیجه میدهد:

$$(b,m) = 1 \rightarrow \frac{a}{b} mod\ m = \big((a\ mod\ m) \times (b^{m-2}\ mod\ m)\big) mod\ m$$

و مقدار بالا رو میشه راحت حساب کرد، پایین هم از این قضیه استفاده می‌کنیم و حل میکنیم، پس قسمت الف، ج و د حل شد.

برای قسمت ب، میدانیم

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

پس بر این اساس باید مقدار

$$\sum_{i=0}^{10^9} 2^i = 2^{10^9+1} - 1$$

را حساب کنیم، برای محاسبه‌ی این هم می‌تونیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$a^{2k} = (a^k)^2\ , a^{2k+1} = (a^k)^2 \times a$$

کد B4:

http://paste.white-crow.ir/view/308/2y10VchfJdbfaTm

راه حل پرسش سوم

ایده‌ی نخست

می‌توان ثابت کرد، به ازای هر $a, b, c\ , (a, b) = 1, (a, c) = 1, (b, c) = 1, a^2 + b^2 = c^2$

دقیقا یک n, m وجود دارند به طوری که: (فرمول ۳,۱)

$$a = m^2 - n^2, b = 2nm, c = m^2 + n^2$$

همچنین اگر a,b,c نسبت به هم اول نباشند، به طور مثال $(a, b) = k \rightarrow (a, c) = (b, c) = k$:

$$a^2 + b^2 = c^2 = (a'k)^2 + (b'k)^2 = (c'k)^2 \leftrightarrow a'^2 + b'^2 = c'^2$$

که k عددی بین ۱ تا $\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor$ هست پس اگر یک a,b,c که a<b<c و a,b نسبت به هم اول بودند و شرایط مسئله را داشتند پیدا کردیم کل هزینه برای این a,b,c و مضاربشان برابر با (فرمول ۳,۲)

$$\frac{\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor\right) \times \left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor}{2} \times (a + 2b + 3c)$$

می‌شود، برای پیدا کردن a,b,c ها از فرمولی که در ابتدا گفتم استفاده می‌کنیم و با توجه به اینکه $n, m \leq \sqrt{N}$ می‌توانیم روی همه‌ی n,m ها فور بزنیم، اگر a,b,c با شرایط مسئله را ساخت مقدار جواب را به اضافه‌ی فرمول ۳,۲ کنیم. خوب دیگه، میشه $O(n)$

کد:

http://paste.white-crow.ir/view/309/2y10swvGxB2VIos

ایده‌ی دوم

با تشکر از آرش محمودیان و حمیدرضا هدایتی که این راه‌حل را به من گفتند، این راه حل نسبت به راه حل اول به ذهن نزدیک‌تره و ممکنه سر امتحان به ذهن فرد بیاد! (من انتظار نداشتم ایده‌ی نخست به ذهن کسی بیاد سر مسابقه☺)

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = (b - c)(b + c) = a^2$$

خوب، می‌دونیم a عددی بین یک تا n است، (b-c) هم حتما مقسوم علیه‌ای از a^2 است، پس روی همه‌ی مقسوم علیه های a^2 فور میزنیم و چک می‌کنیم شرایط مطلوب مسئله رو داره یا نه ، با بهینه‌سازی این راه حل می‌توان $O(n \lg^2 n)$ پیاده سازیش کرد.