

به نام خدا
روز چهارم
نظریه‌ی گراف
<http://YazdCS.blog.ir>

۱ جهت‌دار بدون دور

ثابت کنید راس‌های هر گراف n راسی جهت‌دار بدون دور را می‌توان جوری با اعداد 1 تا n شماره گذاری کرد که از هیچ راس به راس‌های با شماره‌ی کمتر یالی وجود نداشته باشد.

۲ خاطره‌ی جهت‌دار

برای هر گراف جهت‌دار G که درجه‌ی خروجی و ورودی هر راس آن برابر با 2 است. ثابت کنید می‌توان راس‌های G را به سه دسته افزایش کرد به طوری که هیچ راس v با راس‌هایی که به آن‌ها یال دارد در یک مجموعه نباشد.

۳ مهمانی کمال

$1 + 2n$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر n نفری که انتخاب کنیم، دست کم یک نفر در بین $1 + n$ نفر دیگر وجود دارد که با همه‌ی این n نفر دوست است. ثابت کنید یک نفر وجود دارد که با همه دوست است.

۴ تناظر همبند

تعداد گراف‌های ناهمبند بیشتر است یا گراف‌های همبند؟

۵ د مثل درخت

ثابت کنید تعاریف زیر هم ارز هستند و کلاس‌های یکسانی از گراف‌ها را معرفی می‌کنند:

الف) گراف همبند بدون دور

ب) گراف $n - 1$ یالی بدون دور

پ) گراف $n - 1$ یالی همبند

ج) گرافی که در آن بین هر دو راس u و v دقیقا یک مسیر یکتا وجود دارد.

۶ از ویژگی‌های بارز درخت

الف) ثابت کنید هر درخت با دست کم دو راس، حداقل دو راس درجه یک (برگ) دارد.

ب) ثابت کنید هر درخت با درجه‌ی بیشینه‌ی Δ دست کم Δ تا برگ دارد.

پ) هر گراف همبند یک زیرگراف شامل همه‌ی رئوسش دارد که درخت است (زیردرخت فراگیر).

۷ کاهش قطر

برای هر گراف ساده‌ی G با قطر بزرگتر مساوی ۳ ثابت کنید قطر مکمل G کمتر مساوی ۳ است.

۸ آگه فاصله افتاده ...

فاصله‌ی هر دو راس u و v در درخت را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم و برابر است با طول مسیر یکتای بین u و v در درخت. بین همه‌ی درخت‌های n راسی، درخت‌هایی را پیدا کنید مجموع فاصله‌ی دو به دوی راس‌ها در آن‌ها کمینه و بیشینه است.

۹ ابر مکعب

گراف Q_n را به این صورت می‌سازیم: متناظر با هر رشته‌ی باینری به طول n یک راس در گراف داریم. بین دو راس یال است اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن‌ها دقیقا در یک حرف فرق داشته باشند.

الف) ثابت کنید Q_n دوبخشی است.

ب) ثابت کنید Q_n همیلتونی است.

پ) آیا Q_n اویلری هم هست؟

۱۰ گراف چگال

ثابت کنید هر گراف n راسی که در آن درجه‌ی هر راس دست کم $1 + \frac{n}{4}$ است همیلتنی است.
[از استقرای غلط بترسید!]

۱۱ از همون اولشم همیلتنی بود!

گراف G را در نظر بگیرید که در آن دو راس نامجاور u و v وجود دارند به طوری که $d(u) + d(v) \geq n$ است. ثابت کنید اگر گراف $G' = G + uv$ (گراف حاصل از اضافه کردن یال بین u و v) همیلتنی باشد، G هم همیلتنی است.

۱۲ گراف تقویت شده

برای هر گراف G گراف تقویت شده‌ی G گرافی است مثل H با همان مجموعه‌ی راس‌ها که بین هر دو راس u و v که فاصله‌ی آن‌ها در G کمتر مساوی ۳ بوده در H یال است. شرط لازم و کافی روی G پیدا کنید که H همیلتنی باشد.