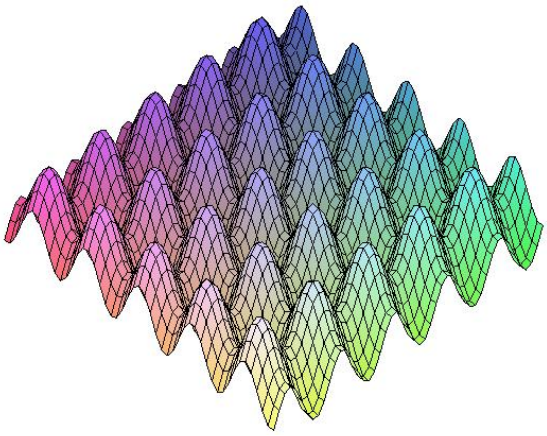
درس نهم توابع حقیقی



به هر تابع مانند $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع حقیقی گویند. این توابع یک نقطه را می‌گیرند و به عدد طبیعی تبدیل می‌کنند. در این درس ما فقط با توابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ کار می‌کنیم این توابع به این دلیل اهمیت دارند که شکل‌های سه‌بعدی در فضا هستند. به عنوان مثال شکل تابع $f(x, y) = \sin x + \cos y$ در روبه‌رو کشیده شده است که معادله‌ی شانه تخم‌مرغ نام دارد امروزه برای تهیه بسیاری از تجهیزات صنعتی و غیره ابتدا با استفاده از این توابع این شکل‌ها را ترسیم می‌کنند.

مشتق توابع حقیقی: مشتق تابع حقیقی $f(x, y)$ یک بردار است. این بردار را گرادیان تابع f گویند و با نماد $\triangledown f$ نمایش دهند و می‌نویسیم $\triangledown f = (f_x, f_y)$ که در آن به f_x مشتق نسبت به متغیر x گویند و برای به دست آوردن آن y را عدد ثابت در نظر می‌گیریم سپس نسبت به x همانند توابع یک متغیره که در درس ریاضی (۱) داشتیم مشتق می‌گیریم. به طور مشابه برای به دست آوردن f_y متغیر x را ثابت در نظر می‌گیریم و نسبت به y مشتق می‌گیریم. بردار گرادیان را با نماد $\triangledown f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ نیز نشان داده می‌شود.(عبارت $\frac{\partial f}{\partial x}$ رند f به رند x یا تغییرات f نسبت به x خوانده می‌شود.) در جدول زیر گرادیان چند تابع به عنوان مثال محاسبه شده است.

تابع	f_x	f_y
$f(x, y) = x + y + ۶$	۱	۱
$f(x, y) = x^۲ + y + ۶$	$۲x$	۱
$f(x, y) = xy$	y	x
$f(x, y) = x^۲y^۴$	$۲xy^۴$	$۴x^۲y^۳$
$f(x, y) = \frac{x}{y}$	$\frac{۱}{y}$	$\frac{-x}{y^۲}$
$f(x, y) = \frac{x^۲}{y^۳}$	$\frac{۲x}{y^۳}$	$\frac{-۲x^۲}{y^۴}$
$f(x, y) = x \sin y$	$\sin y$	$x \cos y$
$f(x, y) = \sin(xy)$	$y \cos(xy)$	$x \cos(xy)$
$f(x, y) = x \sin(xy)$	$\sin(xy) + xy \cos(xy)$	$x^۲ \cos(xy)$

تابع	f_x	f_y
$f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{۱}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{-x}{y^۲}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$
$f(x,y)=\sqrt{xy}$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{y}{x}}$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{x}{y}}$
$f(x,y)=x\sqrt{y}$	$\sqrt{y}$	$\frac{x}{۲\sqrt{y}}$
$f(x,y)=x\arctan y$	$\arctan y$	$\frac{x}{۱+y^۲}$
$f(x,y)=x\arctan(xy)$	$\arctan(xy)+\frac{xy}{۱+x^۲y^۲}$	$\frac{x^۲}{۱+x^۲y^۲}$
$f(x,y)=xe^y$	e^y	xe^y
$f(x,y)=e^{xy}$	ye^{xy}	xe^{xy}
$f(x,y)=xe^{xy}$	$e^{xy}+xye^{xy}$	$x^۲e^{xy}$
$f(x,y)=x\ln y$	$\ln y$	$\frac{x}{y}$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل‌های سه‌بعدی: یکی از کاربردهای مشتق به دست آوردن معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل‌های سه‌بعدی است برای این منظور باید تمامی فرمول را یک طرف تساوی بیاوریم سپس بردار مشتق همان بردار عمود بر شکل است.

مثال ۱۴۸. معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل $xy+xz=y^۲-۱$ را در نقطه‌ی $q=(۱,۲,۳)$ بیابید.

حل: ابتدا باید تمامی فرمول را یک طرف تساوی بیاوریم که می‌شود. $xy+xz-y^۲+۱=۰$ بردار مشتق برابر $(y+z,x-۲y,x)$ نقطه‌ی $q=(۱,۲,۳)$ را در مشتق جای‌گزین می‌کنیم بردار عمود بر شکل برابر $\overrightarrow{v}=(۲+۳,۱-۲\times۲,۱)=(۵,-۳,۱)$ می‌شود و در آخر:

$$\text{معادله‌ی خط عمود}\qquad \frac{x-۱}{۵}=\frac{y-۲}{-۳}=z-۳$$

$$\text{معادله‌ی صفحه‌ی مماس}\qquad ۵(x-۱)-۳(y-۲)+(z-۳)=۰$$

مثال ۱۴۹. معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر تابع $f(x,y)=x^۲y$ را در نقطه‌ی $q=(۲,۳)$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم $z=x^۲y$ تمامی فرمول را یک طرف تساوی می‌آوریم که می‌شود. $z-x^۲y=۰$ بردار مشتق برابر $(-۲xy,-x^۲,۱)$ نقطه‌ی $q=(۲,۳)$ را در مشتق جای‌گزین می‌کنیم بردار عمود بر شکل برابر $\overrightarrow{v}=(-۲\times۲\times۳,-۲^۲,۱)=(-۱۲,-۴,۱)$ می‌شود. چون $f(۲,۳)=۲^۲\times۳=۱۲$ نقطه‌ی تماس $(۲,۳,۱۲)$ است و در آخر.

$$\text{معادله‌ی خط عمود}\qquad \frac{x-۲}{-۱۲}=\frac{y-۳}{-۴}=z-۱۲$$

$$\text{معادله‌ی صفحه‌ی مماس}\qquad -۱۲(x-۲)-۴(y-۳)+(z-۱۲)=۰$$

مشتق دوم و نقاط ماکزیمم، مینیمم و زینی:

تعریف ۱۵۰. اگر از مشتق اول تابع دوباره مشتق بگیریم مشتق دوم حاصل می‌شود در حقیقت مشتق دوم تابع $f(x,y)$ ماتریس زیر است که در آن همیشه داریم $f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۵۱. مشتقات اول و دوم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۳ + ۵x + ۶y + xy$ را بیابید.

حل:

$$f_x = ۲x + ۵ + y \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = ۲ \\ f_{xy} = ۱ \end{cases} \qquad f_y = ۳y^۲ + ۶ + x \Rightarrow \begin{cases} f_{yx} = ۱ \\ f_{yy} = ۶y \end{cases}$$

مثال ۱۵۲. مشتقات اول و دوم تابع $g(x,y) = x \arctan y$ را بیابید.

حل:

$$g_x = \arctan y \Rightarrow \begin{cases} g_{xx} = ۰ \\ g_{xy} = \dfrac{۱}{x^۲ + ۱} \end{cases} \qquad g_y = \dfrac{x}{۱ + y^۲} \Rightarrow \begin{cases} g_{yx} = \dfrac{۱}{x^۲ + ۱} \\ g_{yy} = -\dfrac{۲xy}{(۱ + y^۲)^۲} \end{cases}$$

مثال ۱۵۳. مشتقات اول و دوم تابع $h(x,y) = x^۲ \ln y$ را بیابید.

حل:

$$h_x = ۲x \ln y \Rightarrow \begin{cases} h_{xx} = ۲ \ln y \\ h_{xy} = \dfrac{۲x}{y} \end{cases} \qquad h_y = \dfrac{x^۲}{y} \Rightarrow \begin{cases} h_{yx} = \dfrac{۲x}{y} \\ h_{yy} = -\dfrac{x^۲}{y^۲} \end{cases}$$

تعریف ۱۵۴. نقطه‌ای از تابع که مشتق وجود ندارد یا مشتق برابر صفر باشد نقطه‌ی بحرانی نام دارد.

آزمون مشتق دوم: فرض کنیم مشتق دوم تابع $f(x,y)$ ماتریس $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ باشد در این صورت برای یک نقطه‌ی بحرانی چهار حالت اتفاق می‌افتد.

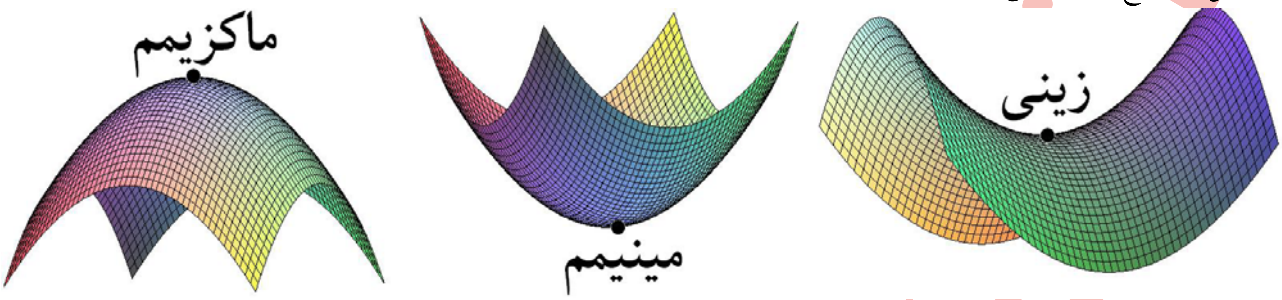
حالت اول: اگر دترمینان ماتریس عددی منفی باشد آنگاه نقطه‌ی بحرانی یک نقطه زینی (شبیه زین اسب) است.

حالت دوم: اگر دترمینان ماتریس عددی مثبت باشد و قطر اصلی ماتریس نیز اعدادی مثبت باشند یعنی $f_{xx} > ۰$ و $f_{yy} > ۰$ آنگاه نقطه‌ی بحرانی مینیمم (چاله) است.

حالت سوم: اگر دترمینان ماتریس عددی مثبت باشد و قطر اصلی ماتریس نیز اعدادی منفی باشند یعنی $f_{xx} < ۰$ و $f_{yy} < ۰$ آنگاه نقطه‌ی بحرانی ماکزیمم (قله) است.

حالت چهارم: اگر دترمینان ماتریس صفر باشد آزمون بی‌نتیجه است.

در شکل زیر انواع نقاط بحرانی کشیده شده است.



مثال ۱۵۵. می‌دانیم نقطه‌ی $(0,0)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی $(0,0)$ برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x=-\sin x \\ f_y=-\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x=-\sin 0=0 \\ f_y=-\sin 0=0 \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos 0 & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱ است و قطر اصلی عددی منفی است پس این نقطه ماکزیمم است.

مثال ۱۵۶. می‌دانیم نقطه‌ی (π,π) یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی (π,π) برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x=-\sin x \\ f_y=-\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x=-\sin \pi=0 \\ f_y=-\sin \pi=0 \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos \pi & 0 \\ 0 & -\cos \pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس این نقطه مینیمم است.

مثال ۱۵۷. می‌دانیم نقطه‌ی $(\pi,0)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی $(\pi,0)$ برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x = -\sin x \\ f_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = -\sin \pi = 0 \\ f_y = -\sin 0 = 0 \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \pi & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر -1 است نقطه‌ی $(\pi, 0)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۵۸. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y) = xy$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقطه‌ی بحرانی به دست بیاید

$$\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

نقطه‌ی $(0,0)$ بحرانی است. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر -1 است نقطه‌ی $(0,0)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۵۹. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقطه‌ی بحرانی به دست بیاید

$$\begin{cases} f_x = 2x + y + 1 \\ f_y = 2y + x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x + 1 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بالا با روش ماتریس به سادگی حل می‌شود.

$$\text{مخرج} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad \text{صورت}_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \text{صورت}_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

نقطه‌ی $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ بحرانی است. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۳ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس این نقطه مینیمم است.

مثال ۱۶۰. نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = x^{3} - 3x + y^{2} + 2x$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقاط بحرانی به دست بیایند

$$\begin{cases} f_x = 3x^{2} - 3 \\ f_y = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^{2} - 3 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^{2} = 3 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

نقاط $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ بحرانی هستند. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

این ماتریس برای نقطه‌ی $(1,-1)$ برابر $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ می‌شود. چون دترمینان ماتریس برابر ۱۲ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس نقطه‌ی $(1,-1)$ مینیمم است.

برای نقطه‌ی $(-1,-1)$ ماتریس مشتق دوم برابر $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ چون دترمینان ماتریس برابر ۱۲− است نقطه‌ی $(-1,-1)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۶۱. نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = x^{2}y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقاط بحرانی به دست بیایند

$$\begin{cases} f_x = 2xy \\ f_y = x^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^{2} = 0 \end{cases}$$

همه‌ی نقاط به صورت $(0,y)$ بحرانی هستند. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر صفر است آزمون مشتق دوم بی‌نتیجه است.

تمرینات

۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید و در جدول بنویسید.

تابع	f_x	f_y
$f(x,y)=x^۲+y^۲+۶xy$		
$f(x,y)=\dfrac{\sin y}{x}$		
$f(x,y)=\cos(x^۲y)$		
$f(x,y)=x^۲\arcsin y$		
$f(x,y)=\dfrac{x^۴}{y}$		
$f(x,y)=\dfrac{(\sin x)^۲}{y^۳}$		
$f(x,y)=x^۲\cos y$		
$f(x,y)=\tan(xy)$		
$f(x,y)=x\tan(xy)$		
$f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$		
$f(x,y)=\sqrt[۵]{xy}$		
$f(x,y)=x\sqrt[۵]{y}$		
$f(x,y)=x^۲\arctan\sqrt{y}$		
$f(x,y)=x\arctan\sqrt{xy}$		
$f(x,y)=x^۲e^y$		
$f(x,y)=x^۲e^{xy}$		
$f(x,y)=xe^{xy^۲}$		
$f(x,y)=\dfrac{x}{\ln y}$		

۲. معادله‌ی خط عمود و صفحه مماس بر شکل $-۳=xyz+z^۲y-۶xy^۲$ را در نقطه‌ی $(۵,۳,۲)$ بیابید.

۳. معادله‌ی خط عمود و صفحه مماس بر تابع $f(x,y)=۲x^۳y$ را در نقطه‌ی $(۲,۳)$ بیابید.

۴. می‌دانیم نقطه‌ی $\left(\frac{\pi}{۲},۰\right)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\sin x+\cos y$ است. نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

۵. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=۶x^۲-y^۲+۴xy+۶x+y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

۶. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^۳-۶x-y^۲+۲x$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.