"ریاضیات"

معادله درجه 2

در هر معادله درجه 2 که $\Delta \geq ۰$ باشد داریم:

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} \ , \quad x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} \quad , \quad |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال) اگر $x_۲, x_۱$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $x_۱^۳ + x_۲^۳$ را بدست آورید.

پاسخ: خواننده دقت نماید که ریشه‌ها در معادله صدق می‌کنند: یعنی:

$$x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \quad x^۲ = ۳x + ۱ \xrightarrow{\text{ضرب در } x} x^۳ = ۳x^۲ + x \xrightarrow{\text{استفاده از } x^۲ = ۳x + ۱}$$

$$x^۳ = ۳(۳x + ۱) + x = ۱۰x + ۳$$

بنابراین:

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ = ۱۰x_۱ + ۳ + ۱۰x_۲ + ۳ = ۱۰\overbrace{(x_۱ + x_۲)}^{-\frac{b}{a}} + ۶ = ۱۰(۳) + ۶$$

قضیه: اگر معادله‌ی $f(x) = ۰$ دارای ریشه‌های $x_۱, x_۲$ باشد آن‌گاه معادله‌ی $f(g^{-۱}(x)) = ۰$ دارای ریشه‌های $g(x_۲), g(x_۱)$ است.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$، یک واحد بیشتر باشند.

پاسخ: منظور این است که ریشه‌های معادله جدید $\frac{x_۲}{۲} + ۱$ و $\frac{x_۱}{۲} + ۱$ باشند. یعنی $g(x) = \frac{x}{۲} + ۱$

بنابراین $g^{-۱}(x) = ۲x - ۲$ بنابراین معادله موردنظر:

$$fog^{-۱}(x)) = f(۲x - ۲) = (۲x - ۲)^۲ - ۳(۲x - ۲) + ۱ = ۰$$

$$\to ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۱ = ۰$$

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ یک واحد کمتر باشد. (تجربی 94)

پاسخ: در اینجا $g(x) = \frac{۱}{x} - ۱$. بنابراین $g^{-۱}_{(x)} = \frac{۱}{x+۱}$ است. لذا

$$f(g^{-۱}_{(x)}) = \frac{۲}{(x+۱)^۲} - \frac{۳}{(x+۱)} - ۱ = ۰ \xrightarrow{\times (x+۱)^۲} ۲ - ۳(x+۱) - (x+۱)^۲ = ۰$$

$$\rightarrow ۲ - ۳x - ۳ - x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ساده کردن}} x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

این روش وقتی کاربرد دارد که x_i ها تواندار نباشند. در حالتی که توان داشته باشند بهتر است با استفاده از خواص معادله درجه دوم توان‌ها را کوچک کنیم.

مثال: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های $x^۲ - x - ۳ = ۰$ باشند، معادله بنویسید که ریشه‌هایش $x_۱^۳$ و $x_۲^۳$ باشند.

پاسخ: در اینجا داریم:

$$x^۲ = x + ۳ \rightarrow x^۳ = x^۲ + ۳x = (x+۳) + ۳x$$
$$\rightarrow x^۳ = ۴x + ۳$$

یعنی $g(x) = x^۳ ۴x + ۳$ در نتیجه $g^{-۱}_{(x)} = \frac{x-۳}{۴}$ و بنابراین

$$f(g^{-۱}(x)) = f(\frac{x-۳}{۴}) = (\frac{x-۳}{۴})^۲ - (\frac{x-۳}{۴}) - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۱۶} (x-۳)^۲ - ۴(x-۳) - ۴۸ = ۰$$

$$\rightarrow x^۲ - ۱۰x - ۲۷ = ۰$$

چند جمله‌ای *p(x)* در تقسیم بر عبارت خطی *ax+b* باقیمانده‌ای برابر با $p(-\frac{b}{a})$ دارد.

معمولاً حالتی که $p(-\frac{b}{a}) = ۰$ باشد، می‌گویند *p(x)* بر *ax+b* بخشپذیر است.

مثال) m را به نحوی بیابید تا $x^۳ - ۲mx + ۴$ بر $x + ۲$ بخشپذیر باشد.

پاسخ:

$$p(-۲)=-۸+۴m+۴=۰ \to m=۱$$

مثال) به ازاء مقداری از a چند جمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخشپذیر است.کوچکترین ریشه‌ی $f(x)=۰$ را بیابید. (ریاضی 94- داخل)

پاسخ:

$$f(-۲)=۰ \to ۱۶-۸a+۱۶=۰ \to a=۴$$

بنابراین:

$$f(x)=x^۴+۴x^۳-۸x=x(x^۳+۴x^۲-۸)$$

ولی چون می‌دانیم *f(x)* بر *x*+2 بخشپذیر است، بنابراین $x^۳+۴x^۲-۸$ را بر *x*+2 تقسیم می‌کنیم:

$$x^۳+۴x^۲-۸=(x+۲)(x^۲+۲x-۴)$$

پس:

$$f(x)=x(x+۲)(x^۲+۲x-۴)$$

ریشه‌های *f*:

$$x_۱=۰\ ,\ x_۲=-۲\ ,\ x_۳=\frac{-۲+\sqrt{۲۰}}{۲}=-۱+\sqrt{۵}\ ,\ x_۴=-۱-\sqrt{۵}$$

که کوچکترین ریشه $x_۴$ است.

نکته: برای اینکه *p(x)* بر $(ax+b)^۲$ بخشپذیر باشد، لازم و کافی است که:

$$p(-\frac{b}{a})=p'(-\frac{b}{a})=۰$$

خواننده‌ی تیزهوش می‌تواند این قضیه را تعمیم دهد.

مثال) چند جمله‌ای $p(x)=x^۶+۲x^۳+۱$ بر $(x+۱)^۲$ بخشپذیر است.

زیرا:

$$p(-۱)=۰\ ,\ \ p'(x)=(۶x^{۵}+۶x^{۲})_{x=-۱}=۰$$

مثال) اگر باقیمانده تقسیم $p(x)=x^{۴}+ax+b$ بر $x^{۲}-x-۲$ برابر $۲x+۵$ باشد، a و b را بیابید.

پاسخ: در اینجا نیز:

$$x^{۲}-x-۲=۰\ \rightarrow\ x^{۲}=x+۲\rightarrow x^{۴}=x^{۲}+۴x+۴$$
$$x^{۲=x+۲}\rightarrow x^{۴}=x+۲+۴x+۴=۵x+۶$$

بنابراین:

$p(x)=x^{۴}+ax+b=۵x+۶+ax+b=(a+۵)x+b+۶$ باقیمانده که برابر $۲x+۵$ شده

است. یعنی $a=-۳$ و $b=-۱$ است.

مثال) اگر عبارت $x^{۴}+ax^{۲}-bx+۴$ بر $(x-۱)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد، b را بیابید. (94 ریاضی – خارج)

پاسخ: در اینجا داریم:

$$p(۱)=۱-a-b+۴=a-b+۵=۰$$
$$p'(۱)=(۴x^{۳}+۲ax-b)_{x=۱}=۴+۲a-b=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-۵\\ ۲a-b=-۴\end{cases}\rightarrow a=۱\ ,\ b=۶$$

مثال) باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)=x^{۳}-۵x+۱$ بر $x^{۲}-x+۱$ را بدست آورید.

پاسخ: به طور کلی وقتی $p(x)$ بر مثلاً $x^{۲}-x+۱$ بخشپذیر باشد، می‌توان مقادیر $x^{۳},x^{۲}$ و ... غیره را از $x^{۲}-x+۱=۰$ بدست آ ورد:

$$x^{۲}-x+۱=۰\ \rightarrow x^{۲}=x-۱\rightarrow x^{۳}=x^{۲}-x\xrightarrow{x^{۲}=x-۱}$$
$$x^{۳}=x-۱-x=-۱$$

بنابراین:

$$P(x)\ \text{باقیمانده}\ =x^{۳}-۵x+۱=-۱-۵x+۱=-۵x$$

باقیمانده تقسیم $-5x$ است.

دنباله حسابی:

هر دنباله به شکل معادله خط، دنباله‌ی حسابی است و بلعکس. یعنی $a_n = dn + b$ شیب این خط همان قدر نسبت دنباله است. استانداردترین فرم نمایش جمله‌ی n ام یک دنباله حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ است که a جمله اول است.

مثال) دنباله $a_n = 3n + 7$ دنباله حسابی با قدر نسبت 3 و جمله اول $a_1 = a = 10$ است.

اما $a_n = n^2 - n + 3$ یک دنباله حسابی نیست.

مثال) m را به نحوی بیابید تا $a_n = (m^2 + m)n^2 + 3n + m$ دنباله حسابی باشد.

پاسخ: باید ضریب n^2 صفر باشد. یعنی

$$m^2 + m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 0, -1$$

حاصل جمع n جمله متوالی از یک دنباله حسابی با فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$S_n = n(\frac{a_1 + a_n}{2})$$

مثال) مجموع $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$ را بدست آورید. (مشابه یکی از مسائل مسابقه ریاضی کانگورو)

پاسخ: به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$100^2 - 99^2 + 98^2 + 97^2 + ... + 2^2 - 1^2 = (100-99)(100+99) + (98-97)(98+97)$$
$$+ .... + (2-1)(2+1) = 1\times(100+99) + 1\times(98+97) + ...$$
$$+1\times(2+1) = 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 2 + 1$$

$$\text{دنباله حسابی} = 100(\frac{100+1}{2}) = 5050$$

مثال) در یک دنباله حسابی، مجموع 20 جمله اول سه برابر مجموع 12 جمله اول است. اگر جمله سوم برابر 6 باشد، جمله دهم را بیابید. (سراسری ریاضی 90)

پاسخ: داریم:

$$\begin{cases} ۲۰(\frac{a_۱ + a_{۲۰}}{۲}) = ۳\times ۱۲(\frac{a_۱ + a_{۱۲}}{۲}) \\ a_۳ = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵(a + a + ۱۹d) = ۹(a + a + ۱۱d) \\ a + ۲d = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰a + ۹۵d = ۱۸a + ۹۹d \\ a + ۲d = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸a + ۴d = ۰ \\ a + ۲d = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -۲, d = ۴ \Rightarrow a_{۱۰} = a + ۹d = -۲ + ۳۶ = ۳۴$$

مثال) بین $Sin^۲ ۵°$ و $Cos^۲ ۵°$، 10 جمله به نحوی قرار داده‌ایم که دوازده جمله بدست آمده تشکیل یک دنباله حسابی داده‌اند. مجموع جمله‌های درج شده چند است؟

پاسخ: مجموع جملات درج شده برابر با مجموع همه‌ی جمله‌ی منهای حاصل جمع $Sin^۲ ۵°$ + $Cos^۲ ۵°$ است (چرا؟) لذا جواب مسئله می‌شود:

$$۱۲\left(\frac{Sin^۲ ۵° + Cos^۲ ۵°}{۲}\right) - (Sin^۲ ۵° + Cos^۲ ۵°) = ۶ - ۱ = ۵$$

برای محاسبه d یک راهبرد مناسب فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$ است. بخصوص $d = a_{n+۱} - a_n$

مثال) اگر جمله ششم یک دنباله حسابی 14 و جمله‌ی 20 م آن 70 باشد، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$d = \frac{a_{۲۰} - a_۶}{۲۰ - ۶} = \frac{۷۰ - ۱۴}{۱۴} = ۴$$

که مثلاً با قرار دادن در $a_۶ = a + ۵d = ۱۴$ می‌توان a (جمله اول) را نیز محاسبه کرد.

دو عدد دلخواه x و y را وارون یا معکوس می‌گوئیم هرگاه حاصل‌ضرب آن‌ها یک باشد. در این شرایط داریم:

$$xy=۱ \quad \to \quad y=\frac{۱}{x}=x^{-۱}$$

و بدین ترتیب دو عدد معکوس را، به کمک قرینه کردن توان، می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد.

معمولاً اعداد معکوس وقتی مهم‌ترند که با عبارت‌های مزدوج سروکار داریم.

مثال) حاصل $(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)=۱$ است. بنابراین این دو عدد معکوس هستند و به عنوان مثال داریم:

$$(\sqrt{۲}-۱)^{۳}=(\sqrt{۲}+۱)^{-۳} \text{ یا } (\sqrt{۲}-۱)^{۵-\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱)^{\sqrt{۲}-۵}$$

مثال) حاصل عبارت $(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}$ را بدست آورید (مشابه 93 ریاضی خارج)

پاسخ: دقت کنید که $(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۱$. پس این دو عدد وارون هستند:

$$(\sqrt{۲}-۱)^{\frac{۳}{۲}}(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-\frac{۳}{۲}}(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-\frac{۱}{۶}}$$
$$=(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۶}}$$

مثال) حاصل عبارت $(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)^{۵}(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)^{۴}$ را بدست آورید.

پاسخ: مجدداً $(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)=۱$ است. بنابراین دو عدد پایه وارون هستند. لذا

$$(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)^{۵}(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)^{۴}=(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)^{۵}(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)^{-۴}=$$
$$(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)$$

یکی از کاربردهای این اعداد معکوس، در مبحث لگاریتم است.

$$xy=۱ \to \log_{y}^{x}=-۱$$

مثال) حاصل $\log_{(\sqrt{۵}-۲)}(\sqrt{۵}+۲)$ برابر 1- است. زیرا $(\sqrt{۵}-۲)(\sqrt{۵}+۲)=۱$ است.

مهم‌ترین ویژگی محاسباتی $\log_a^x$:

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a^x$$

به کمک همین یک اتحاد مسائل مهمی را می‌توان حل کرد.

مثال) حاصل $\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[5]{x}}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\log_{x\sqrt[3]{x}}^{\sqrt[5]{x}} = \log_{x^{\frac{4}{3}}}^{x^{\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}}\log_x^x = \frac{3}{20} = 0/15$$

مثال) حاصل $\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})$ را بدست آورید.

پاسخ: ابتدا باید دقت کنید که $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ بنابراین

$$\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+1)^2 = 2\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1) = -2$$

مثال) حاصل عبارت $\log_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}$ را بدست آورید.

پاسخ: دقت فرمائید که: $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$ بنابراین:

$$\log_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\sqrt[5]{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}\log_{(2-\sqrt{3})}(2+\sqrt{3}) = -\frac{4}{5}$$

خواننده بهتر است بعضی از خواص لگاریتم را عملاً آزموده باشد. مثال بعد نوعی درسنامه‌ی بدون شرح است.

مثال) به تساوی‌های زیر دقت کنید:

$$1)\ \log\frac{x^3y^5}{Z^{10}} = 3\log x + 5\log y - 10\log Z$$

$۲)\ \log x+۵\log y-\log Z=\log \frac{xy^{۵}}{Z}$

علاوه بر این‌ها خاصیت بسیار مهم $c^{b\log_m^a}=a^{b\log_m^c}$ در اکثر مسائل محاسباتی به ما کمک می‌کند.

مثال) حاصل $۹^{\frac{۱}{\log_۵^۳}}$ را بدست بیاورید.

پاسخ:

$$۹^{\frac{۱}{\log_۵^۳}}=۹^{\log_۳^۵}=۵^{\log_۳^۹}=۵^۲=۲۵$$

از $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$ استفاده کردیم.

مثال) حاصل $\frac{۱۰۰۰}{\log_{۱۰۰۰}^{۱۰۰۰!}}+...+\frac{۱۰۰۰}{\log_۳ ۱۰۰۰!}+\frac{۱۰۰۰}{\log_۲ ۱۰۰۰!}$ را بدست آورید؟ (دشوار- دشوارتر)

پاسخ: داریم:

$$۱۰۰۰\times\log_{۱۰۰۰!}^۲+۱۰۰۰\times\log_{۱۰۰۰!}^۳+....+۱۰۰۰\times\log_{۱۰۰۰!}^{۱۰۰۰}$$

$$=۱۰۰۰(\log_{۱۰۰۰!}^۲+....+\log_{۱۰۰۰!}^{۱۰۰۰})=۱۰۰۰(\log_{۱۰۰۰!}۲\times۳\times...\times۱۰۰۰)=۱۰۰۰\times۱=۱۰۰۰$$

درباره‌ی دامنه‌ی توابع لگاریتمی باید:

$$\log_{B(x)}^{A(x)}\rightarrow\begin{array}{l}A(x)>۰\\B(x)>۰\\B(x)\neq۱\end{array}$$

مثال) دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_{\frac{x+۱}{۲x-۱}}^{x-۳}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$۱)\quad x-۳>۰\rightarrow x>۳$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & \frac{1}{2} \\ \hline + & - & + \end{array}$$

۲) $\frac{x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow$

۳) $\frac{x+1}{2x-1} \neq 1 \rightarrow x+1 \neq 2x-1 \rightarrow x \neq 2$

بنابراین:

$$D_f = ① \cap ② \cap ③ = (3, \infty)$$

مثال) دامنه‌ی $f(x) = \log_3 \log_2 (\log_2 (x^2 + x))$ را بدست آورید.

پاسخ:

۱) $x^2 + x > 0$

۲) $\log_2 (x^2 + x) > 0 \rightarrow x^2 + x > 2^0 = 1 \rightarrow x^2 + x > 1$

۳) $\log_2 (\log_2 (x^2 + x)) > 0 \ \log_2 (x^2 + x) > 1 \rightarrow x^2 + x > 2^1 = 2$

در مسئله‌ای مانند این مثال، که با عبارتهای تکراری مواجه هستیم، بهتر است ابتدا اشتراک بگیریم و سپس نامعادله‌ها را حل کنیم:

$$① \cap ② \cap ③ = (x^2 + x) > 2 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-1) > 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} & -2 & 1 \\ \hline + & - & + \end{array}$$

دامنه‌ی توابع رادیکالی نیز به این صورت است که باید عبارت درون $\sqrt[\text{زوج}]{\ \ }$ نامنفی باشد. یعنی:

$$\sqrt[2n]{A(x)} \rightarrow A(x) \geq 0$$

مثال) اگر $f(x+2) = \sqrt{9 - x^2}$ باشد، دامنه‌ی $f(x-1)$ را بیابید.

پاسخ: دانش آموز به یاد بیاورد که در نمودارها وقتی x را 3 واحد کم کنیم، نمودار 3 واحد به طرف xهای مثبت جابجا می‌شود. بنابراین در این مسئله $f(x-۱)$ همان $f(x+۲)$ است که 3 واحد به سمت راست منتقل شده است: بنابراین:

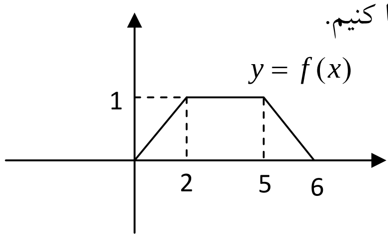
$$D_{f(x+۲)}: ۹-x^{۲}\geq ۰ \rightarrow (۳-x)(۳+x)\geq ۰ \rightarrow \begin{array}{c|c|c} & -۳ \quad 3 & \\ - & + & - \end{array}$$

$$\Rightarrow D_{f(x+۲)}=[-۳,۳] \xrightarrow{\text{3واحد به راست}} D_{f(x-۱)}=[۰,۶]$$

یکی دیگر از محدودیت‌های جدی دامنه، مخرج است، به طور کلی در دامنه‌ها مخرج نباید صفر باشد.

مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنه‌ی $y=\dfrac{x}{f(x+۱)-۱}$ را بدست آورید.

پاسخ: در این مورد باید ریشه‌های مخرج را محاسبه کرده از دامنه منها کنیم.



ابتدا دقت کنید که $f(x+۱)$ همان $f(x)$ است که یک واحد به سمت xهای منفی انتقال یابد:

$$D_{f(x)}=[۰,۶] \rightarrow D_{f(x+۱)}=[-۱,۵]$$

ریشه‌های مخرج:

$$f(x+۱)-۱=۰ \rightarrow f(x+۱)=۱ \rightarrow ۲\leq x+۱\leq ۵$$
$$\rightarrow ۱\leq x\leq ۴ \rightarrow x\in[۱,۴]$$

بنابراین:

$$D_y=[-۱,۵]-[۱,۴] \rightarrow [-۱,۱)\cup(۴,۵]$$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{x+۳}{[x]-۲}$ را بدست آورید.

پاسخ: ریشه مخرج:

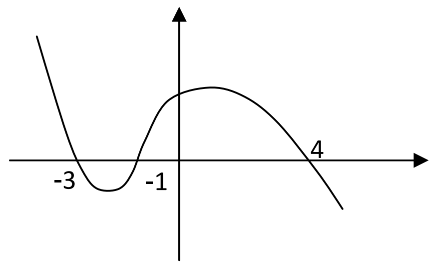
$$[x]-۲=۰ \rightarrow [x]=۲ \rightarrow x\in[۲,۳)$$

بنابراین:

$$D_{f(x)} = R-[۲,۳)$$

مثال) شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است، دامنه‌ی تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(تجربی خارج 94)



پاسخ: اولاً نمودار $y=f(x)$ از انتقال این نمودار به اندازه‌ی 2 واحد در جهت xهای منفی بدست می‌آید.

پس نمودار حاصل همین نمودار است با ریشه‌های 2، 3-، 5- .

بنابراین:

$$D_{\sqrt{xf(x)}} = xf(x) \geq ۰ \rightarrow$$

	–5		–3		0		2	
−		+		−		+		−

$$\rightarrow [-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

در محاسبه دامنه توابع مرکب باید حواستان باشد که احتمال دارد بعضی از ریشه‌های مخرج را به علت ساده کردن از دست بدهیم. لذا بعد از محاسبه دامنه یک بار همه‌ی مخرج‌ها را بررسی کنید. مثال آموزشی زیر موضوع را روشن می‌کند.

مثال) توابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+۱}{x^۲-۱}}$ و $g(x)=x^۲+x-۱$ را در نظر بگیرید.

دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

پاسخ: ابتدا $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

بنابراین

$$fog=f(g(x))=\sqrt{\frac{1}{x^2+x-2}}\rightarrow\frac{1}{x^2+x-2}\geq 0\ \rightarrow\ \begin{array}{c|c|c} & -2 \quad 1 & \\ + & - & + \end{array}$$

و اما مخرج قبل از ساده کردن:

$$fog\ \text{مخرج}=g^2(x)-1=0\ \rightarrow\ g(x)=\pm 1\rightarrow x^2+x-1=1\ \ \text{یا}\ \ -1$$

$$\rightarrow x=0,-1,1,-2$$

لذا جواب نهایی مسئله این است:

$$D_{fog}=(-\infty,-2)\cup(1,\infty)-\{0,-1,1,-2\}=(-\infty,-2)\cup(1,\infty)-\{0,-1\}$$

این تنها روشی است که به شما اجازه ساده کردن می‌دهد.

گاهی محاسبه دامنه به ویژگی‌های نامعادله‌های نمایی مربوط است.

مثال) فرض کنید $f(x)=(\sqrt{2}-1)^x$ باشد. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-\frac{1}{f(x)}}$ را بدست آورید.

(مشابه ریاضی خارج – 93)

پاسخ:

$$f(\frac{1}{x})-\frac{1}{f(x)}\geq 0\rightarrow f(\frac{1}{x})\geq\frac{1}{f(x)}\rightarrow(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{x}}\geq\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^x}$$

$$\rightarrow\ (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{x}}\geq(\sqrt{2}-1)^{-x}\ \xrightarrow[\text{جهت نامساوی می‌شود}]{0<\text{پایه}<1}\ \frac{1}{x}\leq -x$$

$$\frac{1}{x}+x\leq 0\rightarrow\frac{x^2+1}{x}\leq 0\ \rightarrow\ x<0$$

بنابراین: $D_y=R^-$

برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی توابع مرکب می‌توان ابتدا ساده کرد، سپس ترکیب را انجام داد.

مثال) فرض کنید $f(x)=\frac{x^{2}+x-2}{x^{2}-1}-1$ باشد و $g(x)=\tan^{2}x$. حاصل $fog(x)$ را بیابید.

پاسخ: در اینجا

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}-1=\frac{x+2}{x+1}-1=-\frac{1}{x+1}$$

بنابراین خودبخود داریم:

$$fog(x)=\frac{1}{\tan^{2}+1}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^{2}x}}=\cos^{2}x$$

از اتحاد مثلثاتی $1+\tan^{2}x=\frac{1}{\cos^{2}x}$ استفاده کردیم.

مثال) اگر $f(2x+1)=\frac{x+5}{3}$ باشد، حاصل $f(1-x)$ را بیابید.

پاسخ: یک راه زیرکانه این است که:

$$2x+1=1-y\rightarrow x=\frac{-y}{2}$$

بنابراین جواب مسئله این است:

$$f(1-y)=\frac{-\frac{y}{2}+5}{3}=\frac{10-y}{6}\rightarrow f(1-x)=\frac{10-x}{6}$$

خواننده صرفاً دقت کند که باید متغیرها را غیرهمنام بگیرد. این روش وقتی بیشترین کاربرد خود را دارد که عبارتهای (داخل) f هر دو خطی باشند.

مثال) اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^{2}-4x+5)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ را بیابید (سراسری ریاضی 93).

پاسخ: در اینجا $f(g(x)) = f(2x-3)$ را داریم و $f(x)$ را می‌خواهیم.

پس باید:

$$2x-3 = y \to x = \frac{y+3}{2}$$

اما از درسنامه‌ی عددگذاری توابع یادآوری می‌کنیم که قبل از جایگذاری در توابع درجه 2 بهتر است مربع کامل کنیم:

$$fog(x) = 4((x-1)^2+1) \to f(y) = 4((\frac{y+3}{2}-1)^2+1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 4((\frac{x+3}{2}-1)^2+1) = 4(\frac{x^2+2x+1}{4}+1)$$

$$= (x^2+2x+5)$$

مثال) اگر $f(2x-1) = 3-x^2-2x$ باشد دامنه‌ی $\sqrt{f(1-x)}$ را بدست آورید.

پاسخ: در اینجا نیز: $2x-1 = 1-y \to x = \frac{2-y}{2}$

$$\Rightarrow f(1-y) = -(x^2+2x-3) = -((x+1)^2-4)$$

$$\Rightarrow f(1-y) = -((\frac{2-y}{2}+1)^2-4) = -(\frac{2-y}{2}+1-2)(\frac{2-y}{2}+1+2)$$

$$= -(\frac{-y}{2})(4-\frac{y}{2})$$

$$\Rightarrow f(1-x) = -(\frac{-x}{2})(4-\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}(4-\frac{x}{2})$$

دامنه $\sqrt{f(1-x)}$ همان نامعادله‌ی $f(1-x) \geq 0$ است:

$$\frac{x}{2}(4-\frac{x}{2}) \geq 0 \to$$

	0		8	
-		+		-

بازه‌ی $[0,8]$ جواب است.

مثال) اگر $xf(x+۱)+f(۳)=۲x-۱$ باشد، حاصل $f(۲)$ را بیابید.

پاسخ: در اینگونه مسائل که ضابطه را به ما نمی‌دهند، بهترین راه این است که با عددگذاری مستقیم مقدار خواسته شده را بدست آوریم. معمولاً باید مهندسی شده، دو یا سه بار عددگذاری کنید تا به جواب برسید:

چون $f(۲)$ را می‌خواهیم، عددگذاری $x=1$ را انجام می‌دهیم و می‌شود:

$$۱\times f(۲)+f(۳)=۲-۱=۱ \rightarrow f(۲)+f(۳)=۱ \qquad (*)$$

اما $f(۳)$ را نیز نداریم. مجدداً در رابطه اصلی $x=2$ عددگذاری می‌کنیم تا $f(۳)$ بدست آید:

$$۲f(۳)+f(۳)=۲\times۲-۱ \longrightarrow ۳f(۳)=۳ \rightarrow f(۳)=۱$$

با قرار دادن $f(۳)=۱$ در * به جواب $f(۲)=۰$ می‌رسیم.

مثال) اگر $xf(x)+۳f(\frac{۱}{x})=x+۱$ باشد، مقدار $f(۲)$ را بیابید.

پاسخ: قرار دهید $x=2$:

$$۲f(۲)+۳f(\frac{۱}{۲})=۳$$

مجدداً قرار دهید $x=\frac{۱}{۲}$:

$$\frac{۱}{۲}f(\frac{۱}{۲})+۳f(۲)=\frac{۳}{۲}$$

حال دستگاه را حل کنید:

$$f(۲)=a,\ f(\frac{۱}{۲})=b \rightarrow \begin{cases} ۲a+۳b=۳ \\ \frac{۱}{۲}b+۳a=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{۳}{۸} \\ b=\frac{۳}{۴} \end{matrix}$$

بنابراین $f(۲)=\frac{۳}{۸}$

مثال) فرض کنید $f(۲x)=\frac{۲f(x)}{۱-f^{۲}(x)}$ باشد. مقدار $f(۰)$ را بیابید.

پاسخ: قرار می‌دهیم x=0. خواهیم داشت:

$$\frac{2f(0)}{1-f^2(0)} = f(0) \xrightarrow{f(0)=t} \frac{2t}{1-t^2} = t \rightarrow$$
$$2t = t - t^3 \rightarrow t^3 + t = t(t^2+1) = 0 \rightarrow t = 0$$

بنابراین $f(0)=0$ است.

راه دوم: می‌توان ثابت کرد (و از حوصله درسنامه‌ها و تمام کنکور خارج است) که تنها تابع غیرثابت پیوسته‌ای که در تساوی $f(2x) = \frac{2f(x)}{1-f^2(x)}$ صدق می‌کند تابع $f(x)=\tan x$ است. و بدیهی است که $\tan 0 = 0$ است.

تساوی $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حالت خاصی از مهمترین ویژگی محاسباتی تابع $\tan x$ است:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

خواننده دقت کند که معمولاً این اتحاد از راست به چپ مفیدتر است. به مثال 24 خیلی دقت کنید.

مثال) حاصل $\frac{\tan 3x + \tan 2x}{1-\tan 3x \tan 2x}$ برابر با $\tan(3x+2x)$ یا همان $\tan 5x$ است. به نحو مشابه $\frac{\tan 4x - \tan x}{1+\tan 4x \tan x}$ برابر با $\tan(4x-x)$ یا $\tan 3x$ است.

مثال 25) حاصل $\dfrac{\dfrac{\tan 3x + \tan y}{1-\tan 3x \tan y} - \tan y}{1+\tan(3x+y)\tan y}$ را بدست آورید.

پاسخ: دقت فرمایید که:

$$\frac{\tan 3x + \tan y}{1-\tan 3x \tan y} = \tan(3x+y)$$

بنابراین مسئله ساده‌تر این است:

$$\frac{\tan(۳x+y)-\tan y}{۱+\tan(۳x+y)\tan y}$$

که دوباره اتحاد مربوط به tan است و می‌شود:

$$\tan(۳x+y-y)=\tan ۳x$$

مثال) اگر $۱۰=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\tan y}$ و $۱۵=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}$ باشد، حاصل $\tan ۲x$ را بیابید.

پاسخ: داریم:

$$\tan(x-y)=۱۰ \;,\; \tan(x+y)=۱۵ \Rightarrow \begin{cases} x-y=A \\ x+y=B \end{cases} \Rightarrow ۲x=A+B$$

بنابراین:

$$\tan ۲x=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{۱-\tan A\tan B}=\frac{۱۰+۱۵}{۱-۱۵۰}=\frac{۲۵}{-۱۴۹}$$

در مسائلی که طراح مقدار tanx یا Sinx را می‌دهد، یکی از راهبردهای موفق رسم مثلث است.

تبصره: حالتی که $y=\frac{\pi}{۴}$ است از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است:

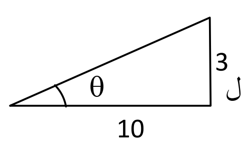
$$\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}=\tan(\frac{\pi}{۴}+x)$$

مثال تبصره: حاصل $\frac{۱+\tan(۴۵-x)}{۱-\tan(۴۵-x)}$ برابر است با:

$$\tan(۴۵+۴۵-x)=\tan(۹۰-x)=\cot x$$

مثال) در صورتی که $\tan\theta=۰/۳$ باشد مقدار $Sin\theta+\cos\theta$ را بدست آورید. (θ زاویه‌ای حاده است).

پاسخ: اطلاعات $\tan\theta=۰/۳$ به زبان هندسی معادل



است.

بنابراین وتر این مثلث $\sqrt{۱۰۰+۹}=\sqrt{۱۰۹}$ است. پس

$$Sin\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰۹}} \ , \ \cos\theta = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰۹}}$$

تذکر: این مثلث علامت Sin و Cos را نمی‌دهد. علامت را باید از روی اطلاعات مسئله تشخیص دهید.

مناسب است خواننده در اینجا توانایی خود را در حل هر دو مسئله مثلثات کنکور 94 رشته علوم تجربی محک بزنند.

دو تا از اتحادهای خیلی مهم مثلثات:

$$Sin۲x = ۲\sin x \cos x$$

$$\cos۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x$$

که کارشان این است تا کمان Sin و یا Cos را نصف کنند.

دو اتحاد مهم دیگر:

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{۱+\cos۲x}{۲}}$$

$$Sin x = \pm\sqrt{\frac{۱-\cos۲x}{۲}}$$

که مجدداً علامت را باید از شرایط مسئله تشخیص دهید. کار این دوتا، دو برابر کردن کمان است.

مثال) مقدار $Sin(۲۲/۵°)$ را حساب کنید.

در اینجا نیاز داریم کمان را دوبرابر کنیم. زاویه‌مان در ربع اول است و لذا مقدار Sin مثبت است.

$$Sin\ ۲۲/۵° = +\sqrt{\frac{۱-\cos۴۵°}{۲}} = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

مثال) حاصل $Sinx \ \cos x \ \cos۲x$ را بدست آورید.

پاسخ: معمولاً اکثر مسائل ضربی به کمک اتحاد $Sin۲x = ۲\sin x \cos x$ ، وقتی از راست به چپ از آن استفاده کنیم، حل می‌شوند. ضریب 2 را ایجاد می‌کنیم:

$$\frac{\overbrace{۲\,Sinx\cos x}^{Sin۲x}\cos ۲x}{۲}=\frac{Sin۲x\cos ۲x}{۲}=\frac{۲Sin۲x\cos ۲x}{۴}$$

$$=\frac{Sin۴x}{۴}$$

مثال) ساده شده‌ی عبارت $A=\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-Sin^۲\theta-\cos^۴\theta}$ را بنویسید. (ریاضی خارج 91)

پاسخ: در ابتدا داریم:

$$(۱+\tan^۲\theta)=\frac{۱}{\cos^۲\theta},(۱+\cot^۲\theta)=\frac{۱}{Sin^۲\theta}$$

لذا:

$$A=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta}\times\frac{۱}{Sin^۲\theta}}{(۱-\sin^۲\theta)-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}$$

$$=\frac{\frac{۱}{Sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}=\frac{۱}{\sin^۴\theta\cos^۴\theta}=\left(\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}\right)^۴=$$

$$\left(\frac{۲}{۲\sin\theta\cos\theta}\right)^۴=\left(\frac{۲}{\sin ۲\theta}\right)^۴=\frac{۱۶}{\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴}۲\theta$$

نکته: اگر $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$ آن‌گاه

$$\tan\hat{A}-\tan\hat{B}-\tan\hat{C}=\tan\hat{A}\ \tan\hat{B}\ \tan\hat{C}$$

مثال) حاصل $\frac{\tan ۵x-\tan ۳x-\tan ۲x}{\tan ۳x}$ را بدست آورید.

پاسخ: دقت بفرمائید که: $۵x=۳x+۲x$ بنابراین:

$$\frac{\tan ۵x-\tan ۳x-\tan ۲x}{\tan ۳x}=\tan ۵x\ \ \tan ۲x$$

مثال) اگر $\hat{C},\hat{B},\hat{A}$ سه زاویه یک مثلث باشند، حاصل $\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}$ را بیابید.

پاسخ: چون $\hat{C},\hat{B},\hat{A}$ سه زاویه ثیک مثلث هستند، لذا

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \rightarrow \hat{C}=\pi-(\hat{A}+\hat{B})$$

بنابراین:

$$\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan(\pi-(\hat{A}+\hat{B}))=$$

$$\tan\hat{A}+\tan\hat{B}-\tan(\hat{A}+\hat{B})=-(\tan(\hat{A}+\hat{B})-\tan\hat{A}-\tan B)$$

$$=\underbrace{-\tan(\hat{A}+\hat{B})}_{\tan\hat{C}}\tan\hat{A}\tan\hat{B}=\tan\hat{C}\tan\hat{A}\ \tan\hat{B}$$