

امتحان ریاضی (تجربہ) خارج از کشور ۲۰۲۳، ۹۹

① درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (۱/۵)

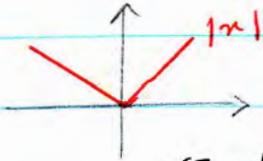
(الف) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشند، آنگاه $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$ است.

ج: نادرست $g \circ f = g(f(x)) = \sin \sqrt{x} \neq \sqrt{\sin x}$

(ب) تابع $f(x) = |x|$ در تمام دامنه اش صعودی است.

ج: نادرست. در x های منفی نزولی و در

x های مثبت صعودی می‌گردد.



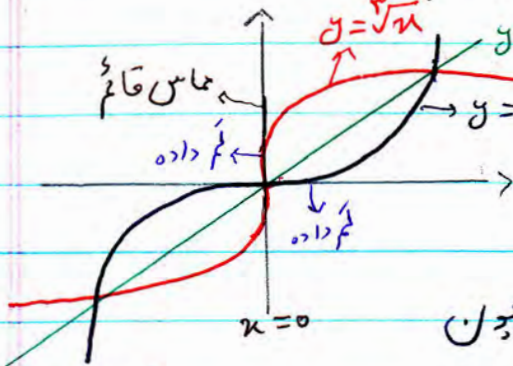
(ج) مقدار مینیمم تابع $y = 3 \sin(2x) - 2$ برابر ۵- است.

ج: درست

$$\left. \begin{aligned} \sin(2x) = 1 &\Rightarrow y = 3(1) - 2 = 1 \\ \sin(2x) = -1 &\Rightarrow y = 3(-1) - 2 = -5 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{max} \\ \text{min} \end{array}$$

→ تابع min

(د) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در نقطه $x=0$ مماس قائم دارد.



ج: درست. خط $x=0$ مماس قائم است

دقت کنید $\sqrt[3]{x}$ همان وارون x^3 است

به قسمتی که نمودار روی محورها x و y داده اند

دقت کنید و درست رسم کنید.

این نمودار پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست چون

مشتق ∞ شده است.

(ه) اگر تابع f پیوسته باشد لزوماً مشتق پذیر است. مثال نقض

ج: غلط. اگر گفته بود f مشتق پذیر باشد لزوماً پیوسته، درست می بود.

یعنی شرط پیوستگی مشتق پذیر نیست بلکه برعکس آن درست است.

(ج) دو پرت مد A و B از نای زگاری کوئیم هوانه A و B با هم رخ ندهند

ج: درست

دقت کنید متضاد نای زگاری A و B زگاری است (نای زگاری یعنی اشتراکی ندارند)

متضاد متقابل A و B است. در پرت مد A و B متقابل یا وابسته اشتراک وجود دارد.

(۲) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (۱/۲۵)

الف) اگر برد تابع f برابر $[۴ و ۸]$ باشد آنگاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با $[۲ و ۸]$ است.

ب) خواهیم از $f(x)$ به $2f(x)$ برسیم. کار روی x موافق علامت است

$$-۱ \leq f(x) \leq ۴ \xrightarrow{\text{در } f \text{ ضرب شد}} -۲ \leq 2f(x) \leq ۸ \rightarrow R_{2f(x)} = [-۲ و ۸]$$

ب) اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(۴) = \dots$

$$f(g(۴)) = f(۷) = ۵$$

پ) دوره تناوب اصلی $y = \tan x$ برابر π می باشد.

در قیاسی کتاب ص ۳۹

ت) باقی مانده تقسیم $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر با $R = ۴$ است.

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 4 \Rightarrow R = 4$$

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک **نیم کره** است.

دقت کنیم اگر نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر عمود دوران کند یک نیم کره

و اگر نیم دایره حول قطر خود دوران کند یک کره ایجاد می شود.

ع حول شعاع عمود بر قطر



نیم کره

ع حول قطر



کره

(۳) اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+7}$ باشد، دامنه $f \circ g$ را بدست آورید. (۱/۷۵)

$$g(x) = \sqrt{x+7} \rightarrow D_g: x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -7 \rightarrow D_g = [-7, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow D_f: \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-7, +\infty) : \sqrt{x+7} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow [-7, +\infty) \cap \mathbb{R} = [-7, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [-7, +\infty)$$

\mathbb{R}

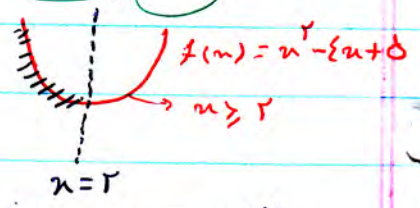
④ الف) وارون تابع $y = \sqrt{x+2}$ را بدست آورید.

ب) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک بدست آورید.

الف) $y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = x+2 \rightarrow y^2 - 2 = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 - 2$

\downarrow $R = [0, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$ (تبدیل: $R_f = D_{f^{-1}}$
 $D_f = R_{f^{-1}}$)

ب) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$
 $f(x) = \frac{a}{1}x^2 - \frac{b}{2}x + \frac{c}{1}$



به دلخواه است چه سیمی را حذف کردیم تا دامنه محدود شود ($x \geq 2$) و تابع درجه دوم که در حالت کلی یک به یک نیست، یک به یک شود. پس: $f(x) = x^2 - 4x + 5 : (x \geq 2)$
 اگر سمت راست را حذف می کردیم باز هم درست بود و یک به یک می شد.

⑤ معادله سینوسی مقابل را حل کنید ①

$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin 3x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4}$

چون $3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \div 3 \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{3}$

$3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \div 3 \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}$

⑥ اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه حاده باشد، $\cos 2\alpha$ را بدست آورید.

یادقت در ۳ فرمول یاد آورید که بسیار مهم است و حتما در امتحان می آید می بینید فرمول * بهترین فرمول برای حل این سوال است

یادآور $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

* $\cos 2\alpha = 2 \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{50 - 169}{169} = \frac{119}{169}$

۷) اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب 2π و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد

تابع سینوسی آن را بنویسید. ①

* $f(x) = a \sin bx + c$

فرم کلی تابع سینوسی

سر به سر بافتن a و c می رویم $T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

وقتی نمی کنند طرا مشبته یا منفی بشیریم هر ۲ درست است چون

در سؤال عرفی در مورد تابع تزرده

حال طبق و فز سؤال:

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = -1 \\ y_{min} = -|a| + c = -7 \end{cases}$$

دستگاه

$$\begin{aligned} |a| + c &= -1 \xrightarrow{c = -4} |a| - 4 = -1 \\ |a| &= -1 + 4 \\ |a| &= 3 \rightarrow a = \pm 3 \end{aligned}$$

$$2c = -8 \rightarrow c = -4$$

* $\Rightarrow f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{1}x\right) - 4$ برای a هم هر کدام از جایها خواهد آمد و در دهید.

۸) حد های زیر را می لیه کنید. ① (۱۷۵)

در صورت مخرج از مخرج صفر $\left(\frac{\infty}{\infty} = 0\right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{\infty} = 0$ (الف)

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4} = \frac{-3(-2)}{4-4} = \frac{+6}{0^+} = +\infty$

بایدیم به عدد که هم سوتی می دهند $x^2-4=0 \rightarrow x = \pm 2$

طبق جدول تعیین علامت $\begin{matrix} & -2 & & 2 & \\ & | & + & | & - \\ x^2-4 & & & & \end{matrix}$

$x \rightarrow (-2)^- \Rightarrow x^2 = 4^+ \leftarrow$

دوباره حد در بی نهایت. درم بر توان صورت ۲ مخرج ۳ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-1} \xrightarrow{\text{از ز}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

چون هر ۲ توان برابر جواب حد خراب تکم بر هم

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{4-(x+1)}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)} = \frac{-1(3+3)(2+\sqrt{3+1})}{1} = \frac{-1(6)(4)}{1} = -24$

۹) مشتق تابع زیر را بیست آورید (ساده کردن الزامی نیست) (۲/۲۵)

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 1}$

صورت مشتق فرج
مخرج مشتق صورت

$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+1) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+1)^2}$ (دید دست بعین نرسید)

ب) $f(x) = (x^2+1)^3 (5x-1)$

خودداری مشتق دوم خودداری مشتق اولی

$f'(x) = (3(2x)(x^2+1)^2)(5x-1) + (5)(x^2+1)^3$

$u^n \rightarrow u' = nu^{n-1}$

۱۰) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت

متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ برابر است؟ (۱/۵)

$f(t) = t^2 - t + 10 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 - 0 + 10 = 10 \\ f(5) = 5^2 - 5 + 10 = 30 \end{cases}$

$[0, 5]$ در بازه \rightarrow

باید آهنگ متوسط را حساب کنیم و جواب

را مساوی آهنگ لحظه‌ای کنیم $\Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$

مشتق تابع است بگذارم تا t بیست آید \Leftarrow

$f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$

سر در کجا $t = \frac{5}{2}$ سرعت لحظه‌ای تابع با سرعت متوسط برابر شده است

(11) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ باشد، نشان دهید $f'(0)$ موجود نیست. (1/75)

ابتداءً سراغ بررسی پیوستگی در $x=0$ می‌رویم.

$$\left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{همه‌اها اجازه بررسی مشتق پذیری در } x=0 \text{ می‌دهد}$$

پیوسته است

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \end{aligned} \right\}$$

چون مشتق چپ و راست در $x=0$ برابر نیست پس $f'(0)$ موجود نمی‌باشد.

(12) انحنای نقطه بحرانی را تعریف کنید. (1/75)

(ب) اگر نقطه (a, c) نقطه اکسترمم شدنی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، d و b را بیابید که در آن نقطه ازای طول c از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم. $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد. نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز جزو نقاط بحرانی محسوب می‌شوند. (کتاب 106)

(ب) مختصات نقطه اکسترمم در تابع اصلی صدق می‌کند

① $A|_1 \xrightarrow[\text{صدق}]{f, d} f(2) = 1 \rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$ *

مشتق به ازای طول نقطه اکسترمم همواره برابر صفر است.

② $f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=2} 12 + 4b = 0 \rightarrow 4b = -12$

$\rightarrow b = -3$ ✓

* $4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} 4(-3) + d = -7$

$\Rightarrow -12 + d = -7 \rightarrow d = 5$ ✓

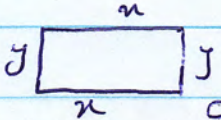
۱۳ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هر اندازه باشند. (۱/۲۵)

$$P = 2x + 2y = 14 \rightarrow x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x$$

$$S = x \cdot y = x(7 - x) = 7x - x^2$$

$$S' = 0 \rightarrow 7 - 2x = 0 \rightarrow 7 = 2x \rightarrow x = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$* y = 7 - x \xrightarrow{x=3.5} y = 7 - 3.5 = 3.5 \Rightarrow x = y = 3.5$$



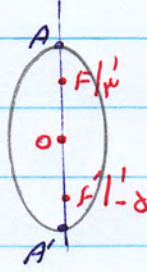
۱۴ کانون‌های یک بیضی نقاط (۱، ۳) و (۵، -۱) است و اندازه قطر بزرگ آن ۱۲ می‌باشد. فاصله کانونی و مختصات و مرکز بیضی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید. (۱/۲۵)
 اولاً بیضی قائم‌الزاویه چون b های متفاوت دارد

$$2a = 12 \rightarrow a = 6$$

$$F \text{ و } F' \text{ و } O \Rightarrow O \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = O(3, 1)$$

$$FF' = 2c = \sqrt{(1-5)^2 + (3+1)^2} = 8$$

$$2c = 8 \rightarrow c = 4 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

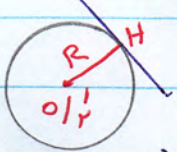


۱۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن (۲، ۱) باشد. (۱)

$$3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow OH = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow OH = R = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = R^2$$

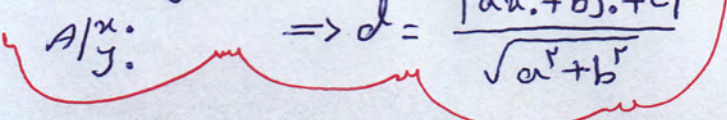
$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$



برای به OH از فرمول فاصله نقطه از خط هندسه مسطحه (فصل اول ریاضی ۲)

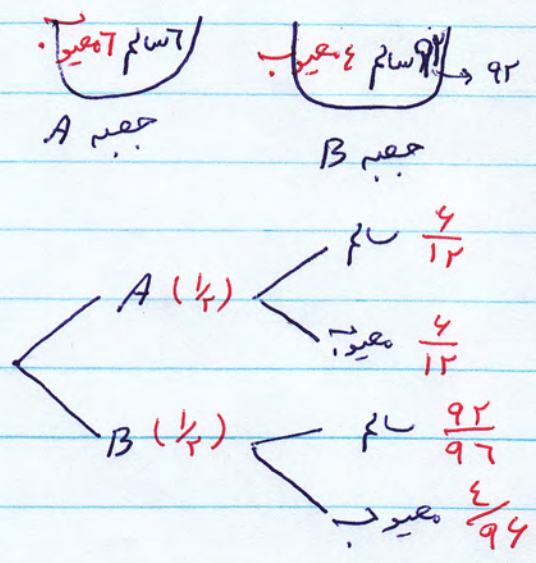
$$ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



استفاده کردیم.

۱۶) دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ وارد دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ وارد دارد که ۴ تا از آنها معیوب هستند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم، حقد را احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟ ۱/۲۵



هم می‌توانیم نمودار درختی رسم کنیم
 هم می‌توانیم از فرمول بایس استفاده کنیم.
 در هر ۲ حالت درست می‌باشد.

$$P(\text{معیوب}) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{96} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

بر اساس فرمول $\Rightarrow P(\text{معیوب}) = P(A) \cdot P(\text{معیوب} | A) + P(B) \cdot P(\text{معیوب} | B)$

با آرزوی موفقیت برای هم‌سما
 دانش‌آموزان عزیز

حسین کامران
 ۹۹/۴/۱

