

باسمہ تعالیٰ

ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	رئیسه: ریاضی و فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: حسابان
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۲۴	سال سوم آموزش متوسطه (سالی - واحدی)	
کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت دی ماه سال ۱۳۸۳	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	از ضوابط زیر کدامیک ضابطه یک تابع است؟ (الف) $f : N \rightarrow R$ (ب) $g : R \rightarrow R$ $x^2 + y^2 = 26$ $y^3 + 2y + 1 + x = 0$	۱
۲	تابع $f$ و $g$ با ضابطه های $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ مفروضند. دامنه توابع $f$ و $g$ و $gof$ را تعیین کنید. سپس ضابطه تابع $gof$ را (در صورت وجود) بنویسید.	۱/۲۵
۳	در معادله $x^2 + mx - 3 = 0$ ، مقدار $m$ را چنان بیابید که بین $\alpha, \beta$ ریشه های این معادله رابطه $2\alpha + \beta = 4$ برقرار باشد.	۱
۴	به کمک رسم نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ، تحقیق کنید تابع $f$ با ضابطه $f(x) =  \cos x $ زوج است یا فرد؟	۰/۷۵
۵	درستی رابطه رو به رو را ثابت کنید:	۱
۶	تابع $f$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2a(\sqrt{x+3}-2)}{ x-1 } & x < 1 \\ [x-1]+1 & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. $a$ را چنان بیابید که تابع در $x=1$ حد داشته باشد. (۱) نماد جزء صحیح است	۱
۷	حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (۱) نماد جزء صحیح است (الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-\lambda}{\sqrt[3]{x-2}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1+\sqrt{x^2+x})$ (ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-x-1}{x^2-1}$ (د) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{2+\sin x}$ (ه) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) \tan \frac{\pi}{2} x$	۲/۵
۸	معادلات خطوط مجانب قائم وافقی تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ را در صورت وجود بنویسید.	۰/۷۵
	ادامه سوالات در صفحه دوم	

با اسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: حسابان	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه (سالی - واحدی)			تاریخ/امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۲۴
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت <b>دی ماه</b> سال ۱۳۸۳	کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه		
۹	مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f$ با ضابطه $[x] = f(x)$ را دروی دامنه آن مشخص کنید. (ا) نماد جزء صحیح است		۰/۷۵
۱۰	اگر $y = f(x^2 - 3x)$ ، مشتق تابع $f'(x) = \frac{x}{x-1}$ را حساب کنید.		۰/۷۵
۱۱	مشتق بگیرید . ( ساده کردن مشتق الزامی نیست )  الف $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \sqrt{2x-3}$ ب $y = \left( \frac{5x-7}{1+x^2} \right)^3 - \tan(1-2x)$		۱
۱۲	معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = \sqrt{4 + \cos x}$ را در نقطه $(\frac{\pi}{2}, 2)$ بنویسید.		۱
۱۳	از نقطه $(1, 2)$ دو مماس بر منحنی تابع $y = -x^7 + 1$ رسم می کنیم . شیب خطوط مماس را پیدا کنید .		۱/۵
۱۴	مشتق پذیری تابع $f$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{ x-2 }$ را در $x=2$ بررسی کنید.		۱
۱۵	در تابع $y = \frac{1}{4}mx^3 - x^2$ ، $(m < -1)$ حدود $m$ را چنان تعیین کنید که تابع همواره نزولی باشد.		۱
۱۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{\cos x}{1 - 2\cos x}$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.		۱/۵
۱۷	مقدار عددی کمیت زیر را بایابید .  $A = \text{Arc Sin}(\text{Cos}(\text{Arc tan}(\text{Cos} \pi)))$		۱
۱۸	ابتدا نمودار تابع $ x-2  = f(x)$ را رسم کنید سپس انتگرال معین $\int_{-1}^3 f(x) dx$ را نیز محاسبه کنید .		۱/۲۵
	جمع نمرات « موفق باشید »		۲۰

با اسمه تعالی

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: حسابان
تاریخ/امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۲۴	سال سوم آموزش متوسطه (سالی- واحدی)
کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت ۵ ماه سال ۱۳۸۳

ردیف	راهنمای تصحیح
۱	$x = 1, y = \Delta \Rightarrow \text{تابع نیست} \quad (./25)$ <p>الف) خیر</p> $x = 1, y = -\Delta$ $y_1^r + 2y_1 + 1 + x = \cdot$ $y_1^r + 2y_1 + 1 + x = \cdot \rightarrow y_1^r + 2y_1 = y_1^r + 2y_1$ $\Rightarrow y_1(y_1^r + 2) = y_1(y_1^r + 2) \rightarrow \text{هم علامتند} \rightarrow y_1, y_1$ $y_1^r - y_1^r + 2y_1 - 2y_1 \neq \cdot \quad (./25) \quad (y_1 - y_1)(y_1^r + y_1^r + y_1y_1 + 2) = \cdot \quad (./25) \quad y_1 = y_1 \quad (./25)$ <p>تابع هست.</p>
۲	$D_f = R - \{\}, D_g = [-2, +\infty) \quad (./25)$ $(./25)$ $D_{gof} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in R - \{ \} \mid \frac{1}{x-1} \geq -2 \right\} = \left( -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left( 1, +\infty \right)$ $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} \quad (./25)$
۳	$\begin{cases} 4\alpha + B = 4 \\ \alpha + B = -m \end{cases} \rightarrow \alpha = 4 + m \quad (./25)$ $(4+m)^r + m(4+m) - 3 = \cdot \quad (./25) \rightarrow 4m^r + 12m + 13 = \cdot \rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2} \quad (./25)$
۴	<p>رسم شکل <math>(./5)</math></p> <p>با توجه به شکل چون محور عرضها، محور تقارن شکل است این تابع (یعنی تابع <math>f</math>) زوج است. <math>(./25)</math></p> <p>ادامه در صفحه‌ی دوم</p>

با اسمه تعالی

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: حسابان
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۲۴	سال سوم آموزش متوسطه (سالی - واحدی)
کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت دی ماه سال ۱۳۸۳

۵

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases} \quad (./25)$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) \cos(a-b) &= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \sin^2 b \\ &= \cos^2 a - \cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b \quad (./25) \end{aligned}$$

(./10)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - 1 + 1) = 1 \quad (./25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\gamma a(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{-(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\gamma a(x-1)}{-(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{\gamma a}{-\gamma} = -\frac{a}{\gamma} \quad (./5)$$

$$\text{داشتن: } 1 = -\frac{a}{\gamma} \rightarrow a = -\gamma \quad (./25)$$

۶

الف

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + \sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + \sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + 4 + \sqrt[3]{x})}{(x-1)} = 12 \quad (./5)$$

(ب)  $+\infty$  (./25)

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 2x + 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2} \quad (./5)$$

۷

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\gamma + (-1)} = \frac{-1}{1} = -1 \quad (./25)$$

$$e) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ t \rightarrow 0}} \frac{(x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{\gamma} x}{\cos \frac{\pi}{\gamma} x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2) \sin \frac{\pi}{\gamma} (t+1)}{\cos \frac{\pi}{\gamma} (t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{\gamma} t(t+2) \cos \frac{\pi}{\gamma} t}{\frac{\pi}{\gamma} (-\sin \frac{\pi t}{\gamma})} = \frac{-4}{\pi} \quad (./25)$$

$$\frac{x-1}{x+2} \rightarrow x \rightarrow D = (1, +\infty) \quad (./25) \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = +\infty \Rightarrow \text{قائم} \quad \text{مجانب} \quad x = 1 \quad (./25)$$

۸

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \cdot \Rightarrow \text{مجانب افقی} \quad y = \cdot \quad (./25)$$

استدلال اینکه تابع در نقاطی به طول اعداد صحیح حد ندارد و بنابراین ناپیوسته است یا با ذکر مثال نقض (۵/۰) مجموعه نقاط ناپیوسته  $Z = \{ \cdot \}$  (./25)

۹

ادامه در صفحه‌ی سوم

با سمه تعالی

رشه: ریاضی و فیزیک	رهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: حسابان
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۲۴	سال سوم آموزش متوسطه (سالی - واحدی)
کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت دی ماه سال ۱۳۸۳
$y' = (x^r - 3x)' f'(x^r - 3x) \quad (./25) \Rightarrow y' = (2x - 3) \frac{x^r - 3x}{x^r - 3x - 1} \quad (./5)$	۱۰
الف ) $y' = \frac{-\sin x(1 - \sin x) - (-\cos x)\cos x}{(1 - \sin x)^2} \sqrt{2x - 3} + \frac{2}{2\sqrt{2x - 3}} \left( \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) \quad (./25)$	۱۱
ب) $y' = r \left( \frac{\Delta x - 1}{1 + x^r} \right)^r \left( \frac{\Delta(1 + x^r) - 2x(\Delta x - 1)}{(1 + x^r)^r} \right) + 2(1 + \tan^r(1 - 2x)) \quad (./25)$	
$y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}} \xrightarrow{m \text{ مماس}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2}}} = \frac{-1}{4} \quad \text{قائم} \quad m = 4 \rightarrow y - 2 = 4(x - \frac{\pi}{2}) \quad (./25)$	۱۲
$\begin{cases} B(\alpha, -\alpha^r + 1) \\ y' = -2x \end{cases} \quad m = -2\alpha \quad (./25) \quad B \text{ مماس در } (./25) \Rightarrow y - (-\alpha^r + 1) = -2\alpha(x - \alpha) \quad (./25)$	۱۳
$1 + \alpha^r - 1 = -2\alpha + 2\alpha^r \rightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{2} \rightarrow m_{\text{مماس}} = -2(1 \pm \sqrt{2}) \quad (./25)$	
$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ x - 2 } - \cdot}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x - 2}}{x - 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{-x + 2}}{x - 2} = -\infty \end{cases} \quad (./25)$	۱۴
$y' = \frac{r}{4} mx^r - 2x - 1 \quad (./25) \quad y' \leftarrow \begin{cases} \Delta \leftarrow 1 - \frac{r}{4}m(-1) \\ \frac{r}{4}m \leftarrow \frac{m}{r} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{r} \leftarrow -\frac{1}{2}$	۱۵
ادامه در صفحه‌ی چهارم	

۱۶

$$y' = \frac{-\sin x}{(1-2\cos x)^2} \quad (\cdot / 25)$$

$$y = \cdot \rightarrow \cos x = \cdot$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad (\cdot / 25)$$

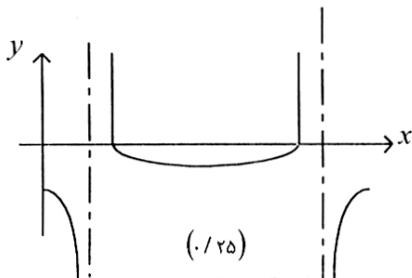
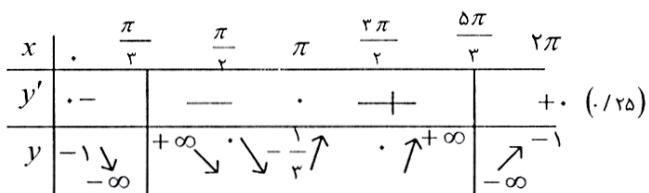
$$y' = \cdot \rightarrow \sin x = \cdot$$

$$\begin{cases} x = \cdot, \pi, 2\pi \\ y = -1, \frac{-1}{3}, -1 \end{cases} \quad (\cdot / 25)$$

$$y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

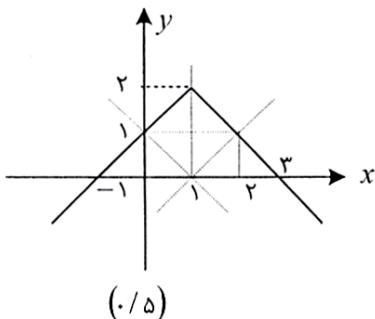
$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{مجانب قائم } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad (\cdot / 25)$$



$$\begin{aligned} \cos \pi = -1 &\rightarrow \operatorname{ArcTan}(-1) = -\frac{\pi}{4} & (\cdot / 25) \\ &\rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & (\cdot / 25) \\ &\rightarrow \operatorname{ArcSin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} & (\cdot / 25) \end{aligned}$$

۱۷



$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{2 \times 2}{2} + \frac{(1+2) \times 1}{2} = \frac{5}{2} \quad (\cdot / 25) \end{aligned}$$

۱۸

با سلام خدمت همکاران محترم

لطفاً برای کلیهٔ روش‌های حل صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید. با تشکر