به نام خداوند بخشنده و مهربان

مؤسسه آموزشی فرهنگی

جبر و احتمال

فصــل ۱

استدلال ریاضی

درک شهودی:

شهود یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال می‌باشد. درک شهودی یک اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود.

استدلال تمثیلی یا قیاسی:

قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح قابل استفاده است. اما استدلال قیاسی یک اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود و فقط به درک بهتر موضوع کمک می‌کند.

☜ مثال: ضرب‌المثل «مارگزیده از ریسمان سیاه وسفید می‌ترسد» اشاره دارد به:

۱) استدلال قیاسی　　۲) استدلال استقرایی　　۳) استدلال استنتاجی　　۴) روش تجربی یا علمی

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

هر کس که یک بار توسط مار گزیده شود، با مشاهده هر چیزی که شبیه به مار، آن را با مار مقایسه می‌کند و خصوصیات مار را به آن نسبت می‌دهد و در نتیجه از آن می‌ترسد.

استدلال استقرایی:

استدلال استقرایی، روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ای محدود از مشاهدات است. استدلال استقرایی، محدودیت دارد، چون همواره این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند، تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی را نشان دهند.

☜ مثال: ضرب‌المثل «هر گردی، گردو نیست» اشاره دارد به محدودیت:

۱) استدلال استقرایی　　۲) استدلال استنتاجی　　۳) مثال نقض　　۴) برهان خلف

✍ **حل:** گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با مشاهده‌ی گرد بودن چند گردو نتیجه‌گیری شده است، که هر چیز گردی گردو است، که از اشکالات و محدودیت‌های استدلال استقرایی است.

استقرای ریاضی:

فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد، اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در اینصورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی صادق است.

استقرای تعمیم یافته:

درست همانند استقرای ریاضی است با این تفاوت که حکم برای کلیه‌ی اعداد طبیعی برقرار نیست و برای $n \ge m$ (از یکجا به بعد) برقرار است.

☜ مثال: در اثبات $2^n > n^2 ; n \ge 5$ با روش استقراء ریاضی، کدام نامساوی بدیهی زیر به کار می‌رود؟

۱) $k^2 > k$　　۲) $2k - 1 > 5$　　۳) $(k-1)^2 > 2$　　۴) $(k+1)^2 > 2$

✍ **حل:** گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

$$2^k > k^2 \rightarrow 2^{2k+1} > 2k^2$$

حال اگر نشان دهیم $2k^2 > (k+1)^2$ رابطه اثبات می‌شود:

$$2k^2 > k^2 + 2k + 1 \rightarrow k^2 - 2k - 1 > 0 \rightarrow (k-1)^2 > 2$$

چون $k \ge 5$ است، نامساوی فوق بدیهی است و تمام مراحل بازگشت‌پذیر است.

☜ مثال: اصل استقرای ریاضی درمورد حکم $P(n): 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<\frac{5n}{12}$ برای اعداد طبیعی $n \ge m$ برقرار است. کوچک ترین مقدار m کدام گزینه است؟

۱) ٤ ۲) ٥ ۳) ٦ ٤) ٧

✍ حل: گزینه ۳ پاسخ است.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}>\frac{25}{12}=\frac{125}{60}$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{147}{60}<\frac{30}{12}=\frac{150}{60}$$

استدلال استنتاجی:

استدلال‌استنتاجی روش نتیجه‌گیری بااستفاده ازحقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم.

اصول احکامی هستند که درستی آنها را بدون اثبات می‌پذیریم. اما قضایا احکامی هستند که برای درستی آنها برهان می‌آوریم.

قضایای کلی احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.

☜ مثال: کدامیک از موارد زیر قضیه کلی هستند؟

۱) اگر $x^2 \ge x$ آنگاه $x>0$ ۲) اگر $x^2 \ge x$ آنگاه $x<0$

۳) اگر $x>0$ آنگاه $x^2 \ge x$ ٤) اگر $x<1$ آنگاه $x^3 \le x^2$

✍ حل: گزینه ٤ صحیح است.

گزینه ۱ برای $x=-2$ صادق نیست. گزینه ۲ برای $x=2$ صادق نیست. گزینه ۳ برای $x=\frac{1}{2}$ صادق نیست.

اما در گزینه ٤ $x<1 \xrightarrow{x^2\ge 0} x^3 \le x^2$

مثال نقض:

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه به دست آمده حتماً درست است. این جامعیت یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

☜ مثال: کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ٤٠ ۲) ٤٦ ۳) ٥٦ ٤) ٦٤

✍ حل: گزینه ٤ پاسخ است.

$40=10+9+8+7+6$
$46=13+12+11+10$
$56=12+11+10+9+8+7$

اما دقت کنید ٦٤ را نمی توان به صورت جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت. در حالت کلی اعدادی به فرم 2^n را نمی‌توان به صورت جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت $(n \ge 2)$.

قضایای شرطی:

با جملات شرطی به صورت اگر ...... آنگاه ...... که به ازاء تمام مقادیر X برقرار هستند، روبرو شده‌اید. این نوع جملات را قضایای شرطی می‌نامند. جای فرض و حکم در عکس قضیه شرطی با هم عوض می‌شوند. اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را تعویض و ارزش هر یک از آنها را نقض نماییم. (عکس نقیض گزاره شرطی) گزاره شرطی جدیدی به دست می‌آید که ارزش آن معادل ارزش گزاره شرطی اولیه می‌باشد.

مثلاً نقیض گزاره «اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد، آنگاه دو قطر آن بر هم عمودند» برابر است با: «اگر دو قطر چهار ضلعی بر هم عمود نباشند، آنگاه چهارضلعی لوزی نیست.»

قضیه دو شرطی:

اگر یک قضیه شرطی و عکس آن هر دو درست باشند، آنگاه قضیه را دو شرطی می‌نامند. $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

اثبات بازگشتی:

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌هاـ به خصوص در مورد تساویها، نامساویها و تساوی مجموعه‌هاـ با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که مراحل انجام شده تماماً بازگشت پذیرند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

مثال: وقتی ثابت می‌کنیم $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$ از کدام شیوه استدلال استفاده می‌کنیم؟ $(a>۰)$

۱) استقرایی ۲) استنتاجی ۳) اثبات بازگشتی ٤) تمثیلی

حل: گزینه ۳ صحیح است.

چون اثبات بازگشت‌پذیر است، حکم اثبات شده است. $a^۲+۱-۲a \geq ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰ \Rightarrow$ همواره درست است.

برهان خلف:

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد، آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

یعنی اول فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد.سپس نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود فرضی که در گام اول کرده‌بودیم، نادرست است. بنابراین نتیجه مطلوب باید درست باشد.

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر مربع یک عدد صحیح مضرب ۵ باشد، خود آن عدد نیز حتماً مضرب ۵ است.» کدام روش را برای اثبات این حکم به کار گیریم؟

۱) استدلال قیاسی ۲) استدلال استقرایی ۳) برهان خلف ٤) مثال نقض

حل: گزینه ۳ صحیح است.

فرض می‌کنیم عدد مضرب ۵ نباشد در این صورت مربع آن نیز نمی تواند مضرب ۵ باشد. لذا به تناقض رسیدیم.

اصل لانه کبوتر (اصل حجره‌ها یا اصل دیریکله):

اگر m کبوتر n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد، $(m>n)$ آنگاه طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر کبوتر در آن قرار داشته باشند.

قضیه(تعمیم اصل لانه کبوتر): فرض کنید m کبوتر در n لانه قرار گرفته‌اند و $m>n$، در این صورت یقیناً، لانه‌ای هست که حداقل $\left[\frac{m-۱}{n}\right]+۱$ کبوتر در آن قرار دارد.

☜ **مثال: جمعیت افراد یک میهمانی حداقل چند نفر باید باشد تا مطمئن باشیم که در آن میهمانی حداقل ۳ نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند؟**

✍ **حل:** $۲\times۷+۱=۱۵$

☜ **مثال: کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز از هفته متولد شده اند، کدامست؟**

✍ **حل:**

تعداد لانه‌ها $\underset{\text{ماه}}{\underset{\downarrow}{۱۲}}\times\underset{\text{روز}}{\underset{\downarrow}{۷}}=۸۴$

پس حداقل باید ۸۵ نفر باشند.

☜ **مثال: ۶۵کبوتر حداکثر در چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر باشد؟**

✍ **حل:** اگر سه لانه داشته باشیم: $۲n+۱\le۶۵\to n\le۳۲$ پس حداکثر ۳۲ لانه می‌توانیم داشته باشیم یعنی اگر ۳۳ لانه داشته باشیم، ممکن است در هیچ لانه‌ای بیش از ۲ کبوتر قرار نگیرد.

☜ **مثال: هر زیر مجموعه‌ی n عضوی از مجموعه‌ی $S=\{۳,۴,۵,...,۱۲,۱۳\}$ حداقل دارای ۲ عضو است که مجموع آن‌ها برابر ۱۶ است. کمترین مقدار n کدامست؟**

✍ **حل:** اگر از مجموعه $\{\{۸\},\{۷,۹\},\{۶,۱۰\},\{۵,۱۱\},\{۴,۱۲\},\{۳,۱۳\}\}$ ۷ عضو برداریم لااقل یکی از گروه‌ها ۲ عضو انتخاب کرده‌ایم که مجموعشان ۱۶ است.

☜ **مثال: هرزیرمجموعه از مجموعه $\{۱,۳,۵,...,۱۷,۱۹\}$ که دارای ٦ عضو باشد، حداقل دو عضودارد که مجموع آنها برابر است با:**

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ٤) ١٦

✍ **حل:** اگر مجموعه را به صورت $\{\{۹,۱۱\},\{۷,۱۳\},\{۵,۱۵\},\{۳,۱۷\},\{۱,۱۹\}\}$ دسته‌بندی کنیم، با انتخاب ٦ عضو لااقل از یکی از گروه‌ها ۲ عضو انتخاب می‌شود که مجموعشان ۲۰ است.

☜ **مثال: در میان کیسه‌ای که در آن ۵ جفت جوراب قهوه‌ای، ٤ جفت سیاه، ۳ جفت آبی و ۳ جفت طوسی قرار دارند، حداقل چند لنگه جوراب باید بیرون آورد، تا حتماً دوجفت جوراب همرنگ داشته باشیم؟ (بطور مثال یک جفت آبی و یک جفت طوسی یا دو جفت آبی)**

✍ **حل:** با انتخاب ۵ لنگه در بدترین حالت یک جفت همرنگ خواهیم داشت. حال اگر لنگه ششم را انتخاب کنیم ممکن است این لنگه از رنگ همان جفت ایجاد شده باشد، لذا برای آن که مطمئن باشیم، باید لنگه هفتم را نیز خارج کنیم تا حتماً ۲ جفت همرنگ داشته باشیم.

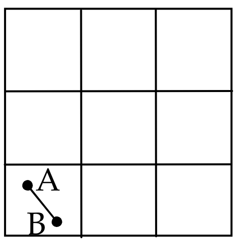
☜ **مثال: درون یک مربع به ضلع یک واحد، ۱۰ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟**

۱) حداقل دو نقطه از این ۱۰ نقطه به فاصله کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{٤}$ قرار دارند.

۲) حداقل دو نقطه از این ۱۰ نقطه به فاصله کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ اند.

۳) حداقل سه نقطه از این ۱۰ نقطه به فاصله کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{٤}$ قرار دارند.

٤) حداقل سه نقطه از این ۱۰ نقطه به فاصله کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ اند.



✍ **حل:** اگر مربع را به ۹ لانه یکسان و همنهشت افراز کنیم، لااقل دو نقطه در یک لانه قرار می‌گیرند. در این صورت حداکثر فاصله آن برابر است با: $AB<(\frac{۱}{۳})\sqrt{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

مثال: تعدادی گاو در یک گله وجود دارند. گاوها یا سفیدند یا سیاه و یا قهوه‌ای. همچنین می‌توان گاوهارا به دو نوع گوشتی و شیری تقسیم کرد. در ضمن این گاوها از ۳ نژاد مختلف می‌باشند. دست کم چند تا از این گاوها را انتخاب کنیم تا اطمینان یابیم در میان آنها ۳ گاو همرنگ، هم نوع و هم نژاد وجود داشته است؟

حل:

تعداد لانه‌ها = $\underset{\text{نوع}}{۲} \times \underset{\text{رنگ}}{۳} \times \underset{\text{نژاد}}{۳} = ۱۸$

لااقل تعداد گاوها $۲\times۱۸+۱=۳۷$

مثال: در یک مدرسه ۳۰۰ نفری حداقل چند نفر در روز شنبه متولد شده اند؟

حل: ممکن است هیچ کس در روز شنبه انتخاب نشده باشد. نباید لانه را اسم‌گذاری کنیم. باید بگوییم لانه‌ای وجود دارد که در آن لااقل $\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]+۱$ فرد حضور داشته باشد.

مثال: در یک مدرسه ۵۰ نفر قد بلند بوده و قدشان ۱۸۵و۱۸۶و...و۱۹۵ سانتی متر است و قد ۳۲۰ نفر بقیه، از آنها کمتر است. حداقل قد چند نفر را اندازه گیری کنیم تا قطعاً دو نفر با قد بلند یکسان بین آنها باشد؟

حل:

بدترین انتخاب ممکن:

$\underset{\text{ابتدا ۳۲۰ قدکوتاه}}{۳۲۰} + \underset{\text{از هر قد بلند یک نفر}}{۱۱} + \underset{\text{نفر دوم از یکی از قدهای بلند}}{۱} = ۳۳۲$

مثال: n عدد طبیعی موجود است. حداقل مقدار n چقدر است که یقین حاصل کنیم حداقل ٤ عدد در بین آن اعداد موجود است که دارای رقم یکان یکسانی بوده و در تقسیم بر ۳ نیز باقی مانده‌ی یکسانی دارند؟

حل:

رقم یکان باقی‌مانده تقسیم بر ۱۰ است و باقی‌مانده بر ۳ نیز صفر یا ۱ یا ۲ است. پس کل حالت‌های ممکن در تقسیم بر ۱۰، ۳، $۳\times۱۰=۳۰$ حالت است.

بدترین حالت $۳\times \underset{\text{از هر باقی‌مانده ۳ تا}}{۳۰} + \underset{\text{چهارمین انتخاب از یکی از باقی‌مانده‌ها}}{۱} = ۹۱$

مثال: ٤۰ نفر می‌خواهند از بین ۷ نفر کاندید یک نفر را به عنوان رئیس انتخاب کنند. فرد انتخاب شده حداقل باید چند رأی داشته باشد؟

حل:

در بدترین حالت برخی از کاندیداها لااقل $\left[\frac{۴۰}{۷}\right]+۱=۶$ رأی دارند. اما چون کسی که می‌خواهد رئیس شود، باید یک رأی بیشتر از بقیه داشته باشد. پس فرد منتخب لااقل ۷ رأی دارد.

مثال: اگر S یک زیرمجموعه‌ی ۵۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم هر یک از اعضای S بر عدد ١٦، تعداد عضوهای هم باقی مانده چگونه است؟

۱) درست ۳ عضو ۲) دست کم ۳ عضو ۳) کم‌تر از ٤ عضو ٤) دست کم ٤ عضو

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

چون باقی مانده های ممکن در تقسیم بر ١٦، ١٦ تا است لذا بنابر اصل لانه کبوتر در بدترین حالت اگر از هر باقی مانده ۳ نماینده داشته باشیم تعداد اعداد ٤۸ خواهد بود که ۲ عدد باقی مانده باعث می شوند دسته ای موجود باشد که در آن دست کم ٤ عضو هم باقی مانده وجود داشته باشد.

مثال: حداقل چند دوتایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به‌طور قاطع لااقل در دو جفت انتخاب شده (a,b) و (c,d)، حاصل هر دو عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند؟

حل:

هر دوتایی مرتب که انتخاب شود به یکی از چهار شکل زیر است:

(فرد، فرد) (زوج، فرد) (فرد، زوج) (زوج، زوج)

برای این‌که $a+c$ و $b+d$ هر دو زوج شوند، باید حداقل دو زوج مرتب هم‌شکل داشته باشیم، بنابراین حداقل ۵ زوج مرتب باید انتخاب کنیم.

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

جبر و احتمال

فصل ۲

تئوری مجموعه‌ها:

مجموعه از مفاهیم اولیه است و تعریف نمی‌شود، اما برای توضیح آن می‌توان گفت: اجتماعی (دسته‌ای) از اشیاء معین (مشخص) و متمایز

☜ **مثال: مجموعه** $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}\}$ **چند عضو دارد؟**

✍ **حل:** اعضای مجموعه a و $\{a\}$ و $\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ می‌باشد یعنی ۳ عضو دارد.

گزاره‌نما:

گزاره‌نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هر گاه هر عضو مانند a، $a\in A$ (A مجموعه‌ای دلخواه) را به جای x قرار دهیم، جمله حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست. اگر چنین باشد، می‌گوئیم که این گزاره نما برای مجموعه A معتبر است.

☜ **مثال: کدام گزاره نما برای مجموعه دانشجویان معتبر است؟**

۱) درس‌خوان بودن ۲) روشنفکر بودن ۳) متأهل بودن ۴) متعهد بودن

✍ **حل:**

باید گزاره‌نما به‌وضوح صحیح یا غلط باشد. جمله‌ی x متأهل است دارای ارزش مشخص صحیح یا غلط برای تمام افراد است. اما گزینه‌های دیگر نسبی و سلیقه‌ای است.

ویژگی‌های مجموعه:

۱ـ تکرار اعضای مجموعه، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً: $\{a,b,c\}=\{a,b,c,c\}$

۲ـ جابجایی اعضای مجموعه، مجموعه را تغییر نمی‌دهد. $\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

تعلق (عضویت):

اگر شیئ x عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم: $x\in A$ و از طرف دیگر اگر x عضوی از A نباشد می‌نویسیم $x\notin A$.
دقت کنید که این عضو عیناً باید در مجموعه A وجود داشته باشد.

☜ **مثال: در مورد مجموعه** $A=\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}$ **کدام درست و کدام نادرست است؟**

۱) $۲\in A$ ۲) $\{۲\}\in A$ ۳) $\{۳\}\notin A$

۴) $\{۵\}\in A$ ۵) $\{\{۲\}\}\in A$ ۶) $\{۲,\{۲\},\{۳,۵\}\}\in A$

✍ **حل:** ۱ و ۲ و ۳ درست و ۴ و ۵ و ۶ نادرست است.

مجموعه تهی:

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را با ϕ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\{\phi\}$ نمایش مجموعه تهی نیست. بلکه یک مجموعه تک عضوی است که ϕ عضو آن است.

☜ **مثال: مجموعه** $A=\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\phi\},\{\phi\},\phi\}$ **چند عضو دارد؟**

✍ **حل:** چون $\varnothing=\{\ \}$ و $\{\varnothing\}=\{\{\ \}\}$ و تکرار تأثیری در مجموعه ندارد پس $\{\varnothing\}=\{\{\ \}\}=\{\varnothing,\{\ \}\}$ لذا در واقع ۲ عضو دارد.

زیر مجموعه بودن (جزئیت):

مجموعه B را زیر مجموعه A گوئیم، هر گاه هر عضو متعلق به مجموعه B، متعلق به مجموعه A، باشد، به عبارت دیگر: $B\subseteq A \Leftrightarrow (\forall x; x\in B \Rightarrow x\in A)$ و اگر عضوی در مجموعه B باشد که در مجموعه A نباشد می‌نویسیم $B\nsubseteq A$

☜ **مثال: در مورد مجموعه $A=\{۲,\{۳\},\{۴,۵\}\}$ کدام درست و کدام نادرست است؟**

۱) $\{۲\}\subseteq A$ ۲) $\{۳\}\subseteq A$ ۳) $\{۲,۳\}\subseteq A$

۴) $\{\phi\}\subseteq A$ ۵) $\{\{۲\}\}\subseteq A$ ۶) $\{\{۳\}\}\subseteq A$

✍ **حل:** ۱ و ۶ درست و ۲ و ۳ و ٤ و ۵ نادرست است.

☜ **مثال: اگر $A=\{۲\}$، $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ کدام رابطه نادرست است؟**

۱) $B\subset C$ ۲) $A\subset B$ ۳) $A\in B$ ٤) $B\in C$

✍ **حل:** گزینه ۱ پاسخ است.

$A=\{۲\}\quad,\quad B=\{۲,\{۲\}\}\quad,\quad C=\{۲,\{۲,\{۲\}\}\}$

می‌توان گفت $A\subset B$ و همچنین $A\in B$ $(A\in C)$ و نیز $B\in C$ ولی B زیر مجموعه‌ی C نیست زیرا $۲\notin C$.

مجموعه مرجع:

در نظریه مجموعه‌ها، همه مجموعه‌های مورد بررسی زیر مجموعه یک مجموعه به نام مجموعه مرجع می‌باشند و با حرف M یا U نمایش داده می‌شود.

نکات:

۱ـ مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای می‌باشد و هر مجموعه ای زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع است. همچنین هر مجموعه ای زیر مجموعه‌ی خودش نیز می‌باشد. $A\subseteq A,\phi\subseteq A,A\subseteq U$

۲ـ اگر A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند و داشته باشیم: $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$

۳ـ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی از رابطه $\binom{n}{r}$ به دست می‌آید.

نتیجه ۱: یک‌مجموعه n عضوی دارای $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+...+\binom{n}{n}$ زیرمجموعه‌حداقل k عضوی است.

نتیجه ۲: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی حاوی k عضو معین از رابطه $\binom{n-k}{r-k}$ به دست می‌آید.

نتیجه ۳: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی فاقد k عضو معین از رابطه $\binom{n-k}{r}$ به دست می‌آید.

٤ـ تعدادزیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی از رابطه ۲^n بدست می‌آید.

نتیجه: تعداد زیرمجموعه‌های حاوی(یا فاقد) k عضو معین برای یک مجموعه n عضوی از رابطه: ۲^{n-k} بدست می‌آید.

☜ **مثال: اگر دو عضو از اعضای مجموعه A را حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۳۸٤ واحد کم می‌شود، A چند عضو دارد؟**

✍ **حل:**

$$۲^n=۲^{n-۲}+۳۸۴\rightarrow ۲^{n-۲}(۲^۲-۱)=۳۸۴\rightarrow ۲^{n-۲}=۱۲۸=۲^۷\rightarrow n=۹$$

☜ **مثال: در مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی A که شامل همه اعداد فرد اول یک رقمی می‌باشد، برابر چند است؟**

✍ **حل:**

اعداد فرد اول یک رقمی$=\{۳,۵,۷\}$

زیرمجموعه‌های ۵ عضوی شامل اعداد فرد اول یک رقمی: $\binom{۹-۳}{۵-۳}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

مثال: مجموعه‌ی $k=\{۱,۲,۳,...,۷\}$ چند زیرمجموعه حداقل ۳ عضوی دارد؟

حل:

$$\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۴}+\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۲^۷-\binom{۷}{۰}-\binom{۷}{۱}-\binom{۷}{۲}=۱۲۸-۱-۷-۲۱=۹۹$$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ چند زیر مجموعه مانند X در رابطه $(A\cap B)\subseteq X\subseteq (A\cup B)$ صدق می‌کند؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{۲,۳,۴\} \\ A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\} \end{array}\right\}\Rightarrow X=\{۲,۳,۴,-,-\}$$

x باید حتماً ۲ و ۳ و ٤ را داشته باشد و در مورد داشتن ۱ و ۵ مختار است که هر کدام می‌توانند باشند یا نباشند یعنی هر کدام ۲ حالت دارند، لذا $۲\times۲=۴$ مجموعه در این رابطه صدق می‌کند.

زیرمجموعه‌های محض (سره ـ خاص):

هرگاه $A\subseteq B$ و $A\neq B$ باشد، A را زیر مجموعه (سره) B می‌گوییم و گاهی با نماد $A\subset B$ نمایش می‌دهیم.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی برابر است با: $۲^n-۱$

تذکر: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی تعریف نشده است.

مثال: اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ باشد، مجموعه‌ی $A-\{A\}$ چند زیرمجموعه‌ی سره‌ی غیرتهی دارد؟

۱) ۲ ۲) ٦ ۳) ۷ ٤) ١٤

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

A و $\{A\}$ هیچ عنصر مشترکی ندارند، بنابراین $A-\{A\}=A$.

تعداد زیرمجموعه‌های سره (محض) برابر است با $۲^n-۱$ و اگر زیرمجموعه‌ی تهی را از آن‌ها حذف کنیم، تعدادشان $۲^n-۲$ می‌شود. با توجه به این‌که مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی ٤ عضوی است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سره‌ی غیرتهی برابر $۲^۴-۲=۱۴$ است.

دو مجموعه مساوی:

دو مجموعه A و B مساویند هر گاه هر عضو A در B و هر عضو B در A باشد، به عبارت دیگر:

$$(A\subseteq B,B\subseteq A)\Leftrightarrow A=B$$

تعداد اعضای دو مجموعه مساوی با هم برابر است.

نکته: اگر $A\subseteq\phi$ باشد، آنگاه $A=\phi$ و اگر $M\subseteq A$ باشد، آنگاه $A=M$ (M مجموعه مرجع)

مثال: اگر دو مجموعه $A=\{۱,x+۱,y-۲\}$، $B=\{۰,x,y\}$ با هم برابر باشند، در این صورت x,y کدامند؟

حل:

دو حالت امکان‌پذیر است:

$$\begin{cases} y=۱ \\ x=y-۲=-۱ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=۱ \\ y=x+۱=۲ \end{cases}$$

دو مجموعه نامساوی:

دو مجموعه A و B را نامساوی گویند، هرگاه لااقل یک عضو در مجموعه A باشد که متعلق به مجموعه B نباشد یا لااقل یک عضو در مجموعه B باشد که متعلق به مجموعه A نباشد و آن را نماد $A \neq B$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه توانی:

مجموعه همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه توانی آن مجموعه می‌نامیم. مجموعه توانی مجموعـه‌ی A را بـا $P(A)$ نمایش می‌دهیم. یعنی $P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$ برای مثال اگر $A=\{0,1\}$ باشد، در این‌صورت $P(A)=\{\{1\},\{0\},\{1,0\},\phi\}$

نکات:

۱- اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، $P(A)$ دارای 2^n عضو و 2^{2^n} زیرمجموعه می‌باشد.

۲ـ اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند و $A \subseteq B$ آنگاه $P(A) \subseteq P(B)$ و بالعکس.

۳ـ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ یعنی تساوی $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ لزوماً برقرار نیست.

☜ **مثال: اگر A یک‌مجموعه ٤ عضوی‌باشد، مجموعه‌زیرمجموعه‌های A چندزیرمجموعه دارد؟**

✍ **حل:**

$$|P(A)| = 2^4 = 16 \rightarrow P(A) \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } = 2^{16}$$

☜ **مثال: هر عضو کدامیک از مجموعه‌های زیر عضوی از مجموعه‌ی توانی همان مجموعه نیز می‌باشد؟**

۱) $\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$ ۲) $\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$ ۳) $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\{\{\phi\}\}\}\}$ ٤) $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$

✍ **حل:**

در واقع سوال به دنباله مجموعه‌ای است که هر عضو آن زیرمجموعه آن نیز باشد. که در گزینه ٤ چنین اتفاقی افتاده است.

$\varnothing \subseteq A$

$\{\varnothing\} \subseteq A$

$\{\{\varnothing\}\} \subseteq A$

باید توجه داشته باشید غیر از این الگو، الگوی $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ نیز دارای این ویژگی می‌باشد.

☜ **مثال: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ مجموعه‌ی $P(A)-A$ چند عضو دارد؟**

✍ **حل:**

$$P(A)=\{\{a\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\{a,\{a\}\},\{a,\{\{a\}\}\},\{\{a\},\{\{a\}\}\},\varnothing,A\}$$

تنها ۲ عضو $\{a\}$ و $\{\{a\}\}$ مشترکند. پس $P(A)-A$ ٦ عضو دارد.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود (متناهی) باشد، یا تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه را متناهی می‌گوییم. (مجموعه تهی را نیز مجموعه‌ای متناهی در نظر می‌گیریم.) مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها محدود نیست را مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم.

☜ **مثال: اگر n عددی طبیعی باشد، کدامیک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟**

۱) $\{n \mid n^3 > n^2\}$ ۲) $\{n \mid n^2 > 2^n\}$ ۳) $\{n \mid 2^n > n^3\}$ ٤) هیچکدام

✍ **حل:** تنها عضو مجموعه‌ی گزینه‌ی ۲، $n=3$ است چون $2^3 < 3^2$ و برای $n \geq 5$ همواره: $2^n > n^2$ است.

گزینه‌ی ٤ برای $n \geq 10$ همواره صحیح است. لذا مجموعه های ۱ و ۳ نامتناهی و ۲ متناهی است.

جبر مجموعه‌ها:

اجتماع دو مجموعه:

اجتماع مجموعه‌های A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموعه تمام عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق داشته باشند. به عبارت دیگر:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

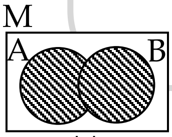
اشتراک دو مجموعه:

اشتراک مجموعه‌های A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموعه تمام اعضایی که هم متعلق به مجموعه A و هم متعلق به مجموعه B هستند. به عبارت دیگر:

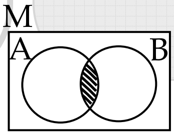
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

نمودار وِن: راهی ساده و آموزنده برای نمایش روابط بین مجموعه‌ها، بکار بردن نموداری مشهور به نمودار وِن می‌باشد. در این روش مجموعه مرجع را با یک مستطیل و بقیه مجموعه‌ها را با اشکال هندسی مانند دایره رسم کرده و روابط مورد نظر را با زدن هاشور نمایش می‌دهند.

لذا داریم:



$A \cup B$



$A \cap B$

دو مجموعه جدا از هم:

دو مجموعه‌ای را جدا از هم گویند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی: $A \cap B = \phi$

تعمیم اجتماع و اشتراک:

n مجموعه دلخواه $A_1, \dots, A_n$ را در نظر می‌گیریم:

۱) اجتماع این مجموعه‌ها را با نماد $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ نشان‌می‌دهیم‌وداریم: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

۲) اشتراک این مجموعه‌ها را با نماد $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ نشان‌می‌دهیم‌وداریم: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

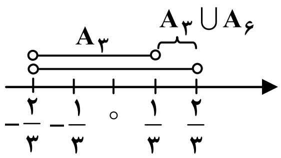
☜ مثال: اگر $A_n = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{n} < x \leq 2\right\}$ باشد، $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

✍ حل:

$$A_1 = (1,2], A_2 = \left(\frac{1}{2},2\right], A_3 = \left(\frac{1}{3},2\right], \dots \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,2] \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (1,2]$$

☜ مثال: اگر $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right)$ به صورت بازه باشد، مجموعه‌ی $(A_3 \cup A_6) - A_3$ برابر کدام بازه است؟

✍ حل:



$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = \left[\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right] - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

☜ مثال: اگر $A_i=\{m\in\mathbb{Z} \mid -i\le m\le 8-i\}$، مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^{8}A_i-\bigcap_{i=1}^{8}A_i$ چند عضو دارد؟

✍ حل:

$$A_1=\{-1,0,\dots,7\}$$
$$A_2=\{-2,0,\dots 6\}$$
$$\vdots$$
$$A_8=\{-8,-7,\dots,0\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{8}A_i=\{-8,\dots,7\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{8}A_i=\{-1,0\}$$

لذا $\bigcup_{i=1}^{8}A_i-\bigcap_{i=1}^{8}A_i$ ، $16-2=14$ عضو دارد.

☜ مثال: اگر $A_n=\{m\in\mathbb{Z} \mid m\ge -n, 2^m\le n\}, n\in\mathbb{N}$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_4\cap A_3$ چند زیرمجموعه دارد؟

✍ حل:

$$A_3=\left\{x \mid x\ge -3, 2^x\le 3\right\}=\{1,0,-1,-2,-3\}\quad,\quad A_4=\left\{x \mid x\ge -4, 2^x\le 4\right\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$$
$$\rightarrow A_3\cap A_4=\{-3,-2,-1,0,1\}$$

که چون $A_3\cap A_4$، ۵ عضو دارد. پس $32=2^5$ زیر مجموعه خواهد داشت.

خواص اجتماع و اشتراک:

۱) $\begin{cases}A\subseteq A\cup B\\ B\subseteq A\cup B\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}A\cap B\subseteq A\\ A\cap B\subseteq B\end{cases}$

۲) $\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$

۳) $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A\cup C\subseteq B\cup D\\ A\cap C\subseteq B\cap D\end{cases}$

نتیجه ۱:

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq B\cup C\\ A\subseteq B\cap C\end{cases}$$

نتیجه ۲:

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq C\\ B\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A\cup B\subseteq C\\ A\cap B\subseteq C\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}A=B\\ C=D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A\cup C=B\cup D\\ A\cap C=B\cap D\end{cases}$$

نتیجه ۳:

$$\begin{cases}A\cup B=\phi\Leftrightarrow A=\phi\wedge B=\phi\\ A\cap B=U=M\Leftrightarrow A=U\wedge B=U\end{cases}$$

٤) $\begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$

٥) $A\subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A\cap B=A \\ A\cup B=B \end{cases}$

نتیجه:

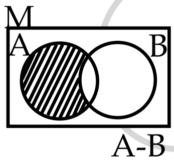
$\begin{cases} A\cup A=A \\ A\cap A=A \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} A\cup U=U \\ A\cap U=A \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} A\cup\phi=A \\ A\cap\phi=\phi \end{cases}$

٦) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$

٧) $\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{cases}$ (قوانین جذب)

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل مجموعه‌های A و B مجموعه عضوهایی است که به A تعلق دارند ولی به B تعلق ندارند و با $A-B$ نمایش داده می‌شود، به عبارت دیگر:



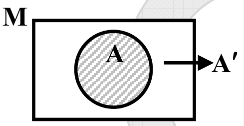
$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

لذا داریم:

$$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$$

متمم یک مجموعه:

اگر A زیر مجموعه‌ی B باشد، متمم مجموعه A نسبت به مجموعه‌ی B عبارت است از:



$$B-A$$

اگر A زیر مجموعه‌ی U باشد، تفاضل مجموعه مرجع (U) و مجموعه A را با A' نمایش می‌دهیم.

$$A'=U-A=\{x\in U\mid x\notin A\}$$

نکات:

۱) داریم: $A-B=A\cap B'$

$A\cap A'=\phi \qquad A-B\subseteq A \qquad (A')'=A \qquad \phi-A=\phi \qquad A-M=\phi$

قوانین شبه جذب (هم‌پوشانی)

$\begin{cases} A\cup(A'\cap B)=A\cup B \\ A\cap(A'\cup B)=A\cap B \end{cases}$ قوانین دمورگان: $\begin{cases} (A\cup B)'=A'\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B' \end{cases}$

۲) مجموعه‌های A-B و B-A و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم می‌باشند.

۳) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند $(A\cap B=\phi)$ آن‌گاه:

$$\begin{cases} A-B=A \\ B-A=B \end{cases}$$

٤) عمل تفاضل بر روی اجتماع و اشتراک فقط از راست شرکت پذیر است:

$$\begin{cases} (A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C) \\ (A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C) \\ (A-B)-C=(A-C)-(B-C) \end{cases}$$

۵) عمل تفاضل بر روی اجتماع و اشتراک از سمت چپ عمل را عکس می‌کند:

$$\begin{cases} A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C) \\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C) \end{cases}$$

٦) فقط عمل اشتراک بر تفاضل توزیع پذیر است و اجتماع بر تفاضل در حالت کلی توزیع پذیر نیست.

$$\begin{cases} A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C) \\ A\cup(B-C)\overset{?}{=}(A\cup B)-(A\cup C) \end{cases}$$

۷) داریم: $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\phi$

۸) اگر $A\subseteq B$ باشد، آن گاه $B'\subseteq A'$

حالت خاص: اگر $A=B$ آن گاه $A'=B'$

۹) داریم: $\left.\begin{matrix} A=B \\ C=D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A-C=B-D$

۱۰) اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آن گاه: $X=\phi$ و اگر $A\subseteq X$ و $A'\subseteq X$ آن گاه $X=M$ است.

حالت خاص: اگر $A'\subseteq A$ آن گاه $A=U$ و اگر $A\subseteq A'$ آن گاه: $A=\phi$

۱۱) اگر $A\cap B=\phi$ آن‌گاه: $B\subseteq A'$,$A\subseteq B'$. اگر $A\cup B=U$ آن‌گاه: $A'\subseteq B, B'\subseteq A$.

حالت خاص: اگر $A\cup B=U$ و $A\cap B=\phi$ آن‌گاه: $B=A'$ و $A=B'$.

۱۲) تساوی $(A-B)-C=A-(B-C)$ لزوماً برقرار نمی‌باشد. (شرط برقراری آن است که $A\cap C=\phi$)

۱۳) در حالت کلی $A-B\neq B-A$، اما اگر $A-B=B-A$ آن گاه: $A=B$

☜ **مثال: حاصل عبارات زیر را حتی الامکان ساده کنید:**

الف) $(A\cup B'\cup C')\cap((B\cap C)\cup A)$

$$(A\cup(B\cap C)')\cap(A\cup(B\cap C))=A\cup[(B\cap C)'\cap(B\cap C)]=A\cup\varnothing=A$$

ب) $\left[(A\cup B)'\cap C'\right]\cup(A\cup C)'$

$$[A'\cap B'\cap C']\cup(A'\cap C')\xrightarrow{X=A'\cap C'}X\cup[X\cap B']\overset{\text{جذب}}{=}X=A'\cap C'$$

ج) $(A\cap B)\cup(A'\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B')$

$$((A\cup A')\cap B)\cup((A\cup A')\cap B')=(U\cap B)\cup(U\cap B')=B\cup B'=U$$

د) $(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A'\cup B')$

$$((A\cap A')\cup B)\cap((A\cap A')\cup B')=(\varnothing\cup B)\cap(\varnothing\cup B')=B\cap B'=\varnothing$$

ه) $[(A\cap B)\cap(A'\cup B)]\cap[(A\cup(A-B))]$

$$\left(A\cap\underbrace{B\cap(B\cup A')}_{\text{جذب}}\right)\cap(A)=(A\cap B)\cap A=A\cap B$$

☜ **مثال: متمم مجموعه‌ی $(B-A)'-A$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام است؟**

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ٤) B

✍ **حل:** گزینه ۱ پاسخ است.

$$X=(B-A)'-A=(B-A)'\cap A'=((B-A)\cup A)'=(A\cup B)'\Rightarrow X'=A\cup B$$

☜ **مثال: متمم مجموعه‌ی $C\cup A'\cup B'$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟**

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

✍ **حل:** گزینه ۲ پاسخ است.

متمم مجموعه‌ی داده شده را کمی ساده‌تر می‌نویسیم، سپس با اعمال قوانین جبر مجموعه‌ها به گزینه‌هایی‌که برابر با آن هستند، می‌رسیم:

$$[C\cup A'\cup B']' = [C\cup(A\cap B)']' = C'\cap(A\cap B) = A\cap B\cap C'$$

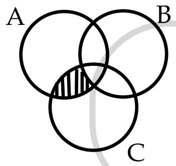
گزینه‌ی (۴) برابر با مجموعه‌ی داده شده است. $A\cap B\cap C' = (A\cap B)-C \Rightarrow$

گزینه‌ی (۳) برابر با مجموعه‌ی داده شده است. $A\cap B\cap C' = A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C) \Rightarrow$

گزینه‌ی (۱) برابر با مجموعه‌ی داده شده است. $A\cap(B\cap C') = A\cap(B-C)\xrightarrow[\text{اشتراک بر روی تفاضل}]{\text{خاصیت توزیع پذیری}}(A\cap B)-(A\cap C) \Rightarrow$

بنابراین مجموعه‌ی گزینه‌ی (۲) با مجموعه‌ی داده شده برابر نیست.

☜ **مثال: قسمت هاشورخورده در نمودار ون شکل زیر کدام است؟**



۱) $A-(B\cap C)$ ۲) $A\cap(C-B)$

۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap C)-B'$

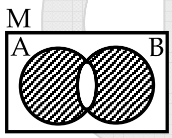
✍ **حل:** ناحیه هاشورخورده $(A\cap C)-B$ یا $A\cap(C-B)$ می‌باشد.

تفاضل متقارن دو مجموعه:

تفاضل متقارن دو مجموعه A و B مجموعه اعضایی است که متعلق به A یا متعلق به B است ولی به اشتراک دو مجموعه تعلق ندارد و آن را با $A\Delta B$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$A\Delta B = \{x \mid x\in A \vee x\in B \wedge x\notin A\cap B\}$$

داریم:



$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

نکات و خواص:

۱) $A\Delta B = B\Delta A$ (جابجایی)

۲) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (شرکت پذیری)

۳) اگر $A\Delta B = A\Delta C$ آن گاه $B=C$ و بالعکس.

۴) (توزیع پذیری اشتراک روی تفاضل متقارن) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

۵) $(A\Delta B)-C = (A-C)\Delta(B-C)$

۶) داریم:

$$A\Delta B = A'\Delta B'$$
$$(A\Delta B)' = A'\Delta B = A\Delta B'$$

۸) داریم:

$$A\Delta B = U \Leftrightarrow B = A'$$
$$A\Delta B = \phi \Leftrightarrow B = A$$
$$A\Delta B = A \Leftrightarrow B = \phi$$
$$A\Delta B = A' \Leftrightarrow B = U$$
$$A\Delta B = B-A \Leftrightarrow A\subseteq B$$
$$A\Delta B = A\cup B \Leftrightarrow A\cap B = \phi$$

☜ **مثال: حاصل عبارات $A\cap(B\Delta A')$ و $(A\Delta B)-A'$ و $(A-B)\Delta(B-A)$ و $(A-B)\Delta A$ و $(A-B)\Delta B$ برابر کدام است؟**

✍ **حل:**

(۱) $\mathbf{A\cap(B\Delta A')=(A\cap B)\Delta(A\cap A')=(A\cap B)\Delta\phi=A\cap B}$

(۲) $\mathbf{(A\Delta B)-A'=(A\Delta B)\cap A=(A\cap A)\Delta(B\cap A)=A\Delta(A\cap B)\overset{(A\cap B)\subseteq A}{=\!=\!=\!=}A-(A\cap B)=A-B}$

(۳) $\mathbf{(A-B)\Delta(B-A)\overset{(A-B)\cap(B-A)=\phi}{=\!=\!=\!=\!=}(A-B)\cup(B-A)=A\Delta B}$

(۴) $\mathbf{(A-B)\Delta A\overset{(A-B)\subseteq A}{=\!=\!=\!=}A-(A-B)=A\cap B}$

(۵) $\mathbf{(A-B)\Delta B\overset{(A-B)\cap B=\varnothing}{=}A\cup B}$

روش شماره‌گذاری:

قضیه: اگر $A\cap B=\phi, A=B$ آنگاه $A=B=\phi$

با استفاده از قضیه فوق هر گاه یک تساوی از مجموعه‌ها داشته باشیم می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

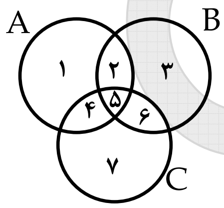
۱ـ ابتدا هر دو طرف تساوی را بصورت اجتماع مجموعه‌های جدا از هم می‌نویسیم.

۲ـ مجموعه‌های مساوی را از طرفین حذف می‌کنیم.

۳ـ مجموعه‌های باقیمانده رامساوی تهی قرارمی‌دهیم و رابطه مورد نظر رابدست می‌آوریم.

در روش شماره‌گذاری ابتدا به هر مجموعه شکلی دلخواه نسبت می‌دهیم و سپس به هر یک از مجموعه‌های از هم جدا عددی را نسبت می‌دهیم و بوسیله این اعداد رابطه‌های موجود را بازنویسی می‌کنیم و سپس مانند بالا عمل می‌کنیم.

☜ **مثال: اگر $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ آنگاه کدامیک صحیح است؟**



۱) $A\subseteq C$

۲) $C\subseteq A$

۳) $A=C$

۴) $C=\phi$

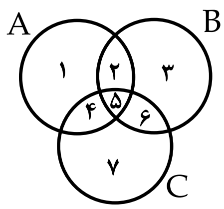
✍ **حل:** گزینه ۲ پاسخ است

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(A\cap B)\cup C=۲\cup۵\cup۴\cup۶\cup۷}\\ \mathbf{A\cap(B\cup C)=۲\cup۴\cup۵}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{۲\cup۵\cup۴\cup۶\cup۷=۲\cup۴\cup۵\Rightarrow ۶=۷=\varnothing\Rightarrow C=۴\cup۵\subseteq A}$$

☜ **مثال: اگر $A\cap B\cap C=(A\Delta B)\Delta C$ کدامیک درست است؟**

۱) $B=C$ ۲) $A=A\cap B\cap C$ ۳) $C\subseteq A\cup B$ ۴) $A=\phi$

✍ **حل:** تفاضل متقارن ۲ مجموعه، قسمت مشترک را حذف کرده و مابقی دو مجموعه را نگه می‌دارد.



$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A\cap B\cap C=۵}\\ \mathbf{(A\Delta B)=۱\cup۴\cup۳\cup۶}\\ \mathbf{(A\Delta B)\Delta C=۱\cup۳\cup۷\cup۵}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\mathbf{۵=۱\cup۳\cup۷\cup۵\rightarrow ۱=۳=۷=\varnothing}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A\cup B=۴\cup۲\cup۶\cup۵}\\ \mathbf{C=۴\cup۶\cup۵}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{C\subseteq A\cup B}$$

عدد اصلی یک مجموعه، اصل شمول و عدم شمول

عدد اصلی یک مجموعه:

تعداد اعضای مجموعه متناهی A را عدد اصلی آن مجموعه گویند و با $n(A)$ یا $|A|$ (کاردینال A) نمایش می‌دهند.

ویژگیهای عدد اصلی مجموعه‌ها:

درمورد مجموعه‌های متناهی داریم:

اصل شمول:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

اصل عدم شمول: ($\bar{A}$ همان A' به معنای متمم مجموعه A است.)

$$|\bar{A}|=|U|-|A|=|S|-|A|$$
$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|\overline{A_1\cup A_2}|=|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$
$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-$$
$$(|A_1\cap A_2\cap A_3|)$$

اصل شمول و عدم شمول:

$$|A\cap\bar{B}|=|A-B|=|A|-|A\cap B|$$
$$|A\cap B\cap\bar{C}|=|(A\cap B)-C|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap\overline{(B\cap C)}|=|A|-|A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$|A\Delta B|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A-B|+|B-A|=|A|+|B|-2|A\cap B|$$

☜ مثال: اگر $n(A\Delta B)=16$ و $n(A\cup B)=20$ آن گاه **n(A)** کدام است اگر $n(A)$ و $n(B)$ با هم برابر باشند؟

✍ حل:

$$\left.\begin{array}{r}|A\Delta B|=|A-B|+|B-A|=|A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|=|A|+|B|-2|A\cap B|=16\\ |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=20\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}|A\cap B|=4\\ |A|+|B|=24\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |A|=|B|=12$$

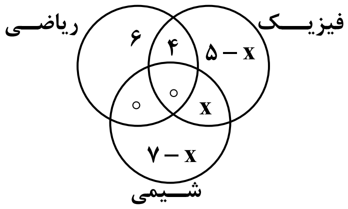
☜ مثال: اگر $n(A)=5, n(B)=7$ و $A\cup B=\{x\mid x\in Z, x^2<20\}$ عدد اصلی مجموعه $A\cap B$ برابر کدام است؟

✍ حل:

$$A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$
$$|A|=5\quad,\quad |B|=7\quad,\quad |A\cup B|=9$$
$$\rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=5+7-|A\cap B|=9\ \rightarrow\ |A\cap B|=3$$

☜ مثال: از یک گروه ۲۰ نفری دبیران یک دبیرستان ۱۰ نفر ریاضی، ۹ نفر فیزیک و ۷ نفر شیمی تدریس می‌کنند. در صورتیکه بدانیم ٤ نفر از دبیران فیزیک و ریاضی تدریس می‌کنند و هیچ کدام از دبیران ریاضی درس شیمی نمی‌دهند، در این دبیرستان چند نفر فقط فیزیک تدریس می‌کنند؟

✍ حل:

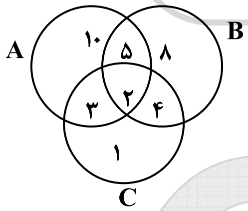


از درونی‌ترین مجموعه شروع به پر کردن می‌کنیم و قسمت مجهول را x می‌گیریم و بقیه داده‌ها را به تفکیک وارد می‌کنیم.

$۶+۴+(۵-x)+x+(۷-x)=۲۰ \Rightarrow x=۲ \to$ فقط فیزیک $=۵-x=۳$

☜ مثال: در مدرسه ای با ۳۳ دانش اموز، هر کسی عضو حداقل یکی از سه گروه C, B, A است اگر **B** دارای ۱۹ عضو، **C** دارای ده عضو و تعداد افرادی که عضو **B** و **C** هستند شش نفر، و ده نفر فقط عضو **A** بوده ودو نفر عضو سه گروه بوده و پنج دانش آموز عضو دو گروه **C** و **A** باشند، و هفت نفر عضو گروه **A** و**B**، چند دانش آموز هستند که عضو گروه **B** یا **C** هستند، ولی عضو گروه **A** نیستند؟

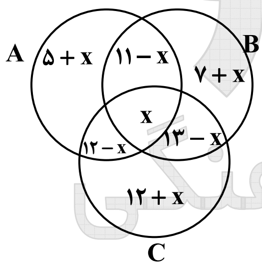
✍ حل:



$|(B \cup C)-A| = ۱+۴+۸=۱۳$

☜ مثال: در یک نظرخواهی از دانش آموزان یک کلاس ۷۸ نفری، معلوم شده است که ۲۸ نفربه تیم **A**، ۳۱ نفر به تیم **B**،۳۷ نفر به تیم **C**، ۱۱ نفر به هر دو تیم **A,B**، ۱۳ نفر به هردو تیم **C,B** و ۱۲ نفر به هر دوتیم **C,A** علاقمندند. اگر ۱۲ نفر به هیچ تیمی علاقه نداشته باشند، چند نفر دقیقا به دوتیم علاقمندند؟

✍ حل:



$۵+۱۱+۱۲+۷+۱۳+۱۲+x=۶۶ \Rightarrow x=۶$

افرادی که دقیقاً به دو تیم علاقمندند $=(۱۱-x)+(۱۳-x)+(۱۲-x)=۱۸$

☜ مثال: تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۷ هستند ولی مضرب ۵ نیستند، کدام است؟

✍ حل:

$A=\{$مضارب ۷$\}$

$B=\{$مضارب ۵$\}$

$A \cap B=\{$مضارب ۳۵$\}$

$$|A \cap B'|=|A-B|=|A|-|A \cap B|=\left(\left[\frac{۹۹}{۷}\right]-\left[\frac{۹}{۷}\right]\right)-\left(\left[\frac{۹۹}{۳۵}\right]-\left[\frac{۹}{۳۵}\right]\right)=۱۳-۲=۱۱$$

☜ مثال: از بین مجموعه اعداد ۱,۲,۳,...,۱۰۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

✍ حل:

$A = \{\text{مضارب ۲}\}$

$B = \{\text{مضارب ۳}\}$

$C = \{\text{مضارب ۵}\}$

$$|A\cap B'\cap C'| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C| = \left[\frac{۱۰۰۰}{۲}\right] - \left(\left[\frac{۱۰۰۰}{۶}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۱۰}\right] - \left[\frac{۱۰۰۰}{۳۰}\right]\right) = ۲۶۷$$

☜ مثال: چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۷۳ که نسبت به ۲۷۳ اول باشد، وجود دارد؟

✍ حل:

$۲۷۳ = ۷\times ۱۳\times ۳$

$A = \{\text{مضارب ۳}\}$ $\quad$ $B = \{\text{مضارب ۱۳}\}$ $\quad$ $C = \{\text{مضارب ۷}\}$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = ۲۷۳ - \left[\frac{۲۷۳}{۳}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۱۳}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۷}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۳۹}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۲۱}\right] + \left[\frac{۲۷۳}{۹۱}\right] - \left[\frac{۲۷۳}{۲۷۳}\right] = ۱۴۴$$

ضرب دکارتی

زوج مرتب:

هردوشیئی تشکیل یک زوج می‌دهند، اگر در یک زوج ترتیب در نظر گرفته شود می‌گوییم یک زوج مرتب داریم. بنابراین زوج مرتب را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم. a را مؤلفه اوّل یا مختص اوّل و b را مؤلفه دوم یا مختص دوم زوج می‌گوییم.

تساوی زوج‌های مرتب:

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) مساوی هستند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های اول زوجها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow a=c,b=d$$

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه:

حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ی A در مجموعه B عبارتست از مجموعه زوجهای مرتبی که مختص اول آنها متعلق به مجموعه A و مختص دوم آنها متعلق به مجموعه B می‌باشد به عبارت دیگر: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$

باید توجه داشت که در حالت کلی $A\times B\neq B\times A$ یعنی ضرب دکارتی دارای خاصیت جابجایی نیست.

☜ مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۴,۵\}$ باشد، $A\times B$ و $B\times A$ کدامست؟

✍حل:

$$\mathbf{A\times B=\{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۳,۵)\}}$$
$$\mathbf{B\times A=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)\}}$$

تذکر: حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در خودش یعنی $A\times A$ را به صورت $A^۲$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A^۲=\{(x,y)\mid x,y\in A\}$$

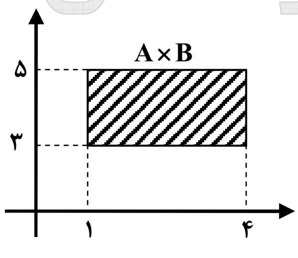
لذا صفحه‌ی مختصات دکارتی را می‌توان به صورت $IR^۲=IR\times IR=\{(x,y)\mid x,y\in IR\}$ تعریف کرد.

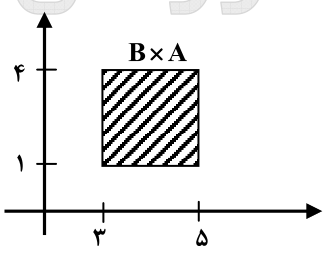
نمودار ضرب دکارتی:

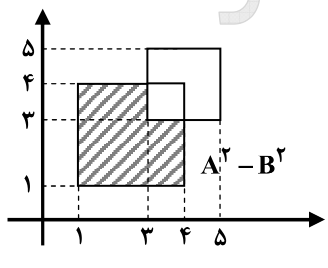
چون حاصل ضرب دکارتی از زوجهای مرتب تشکیل می‌شود، اگر مؤلفه‌ی اول و دوم از مجموعه‌ی اعداد حقیقی انتخاب شوند، می‌توان هر زوج مرتب ر ا بر روی صفحه‌ی مختصات دکارتی $(IR^۲)$نمایش داد. به این ترتیب که مؤ لفه‌ی اول آن را ازمحور x ها وموئلفه‌ی دوم آنرا از محور y ها انتخاب می‌کنیم.

☜ مثال: اگر $A=\{x\mid x\in R,x\in[۱,۴]\}$ و $B=\{x\mid x\in R,x\in[۳,۵]\}$ نمودار $A\times B$ و $B\times A$ و $A^۲-B^۲$ را رسم کنید.

✍حل:

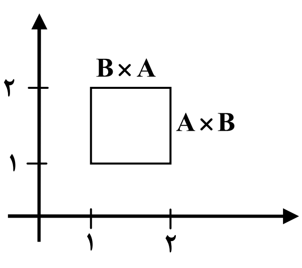






☜ مثال: اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=[۱,۲]$ آنگاه نمودار $(A\times B)\cup(B\times A)$ چگونه است؟

✍حل:



نکات و قضایا:

۱) داریم:

$$A\times B=\phi \iff A=\phi \vee B=\phi$$
$$A\times \phi=\phi\times A=\phi \qquad \phi\times\phi=\phi$$

نتیجه:

$$A\times B=B\times A \iff A=B \vee A=\phi \vee B=\phi$$

۲) ضرب دکارتی بر روی اعمال $\cap,\cup,-,\Delta$ توزیع پذیر است.

$$\begin{cases} A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C) \\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)\end{cases} \qquad \begin{cases} A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C) \\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C) \\ (A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)\end{cases} \qquad \begin{cases} A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C) \\ (A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)\end{cases}$$

۳) داریم:

$$(A\times B)'=(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')$$

٤) اگر D,C,B,A نا تهی باشند:

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq B \\ C\subseteq D\end{array}\right\} \iff A\times C\subseteq B\times D$$

نتایج:

الف)اگر $A\subseteq B$ و C نا تهی باشد آن گاه: $A\times C\subseteq B\times C$ و $C\times A\subseteq C\times B$

ب) اگر D,C,B,A نا تهی باشند:

$$\left.\begin{array}{l} A=B \\ C=D\end{array}\right\} \iff A\times C=B\times D$$

۵) اگر $A\times C=B\times C$ و یا $C\times A=C\times B$ و C ناتهی باشد آن‌گاه: $A=B$ (حذف‌پذیری)

٦) داریم:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

نتیجه:

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^2=(A\times A)\cap(B\times B)=A^2\cap B^2$$

۷) داریم:

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$$

☜ مثال: حاصل عبارات زیر برابر کدام است؟

الف) $\left[\left((A\times B)-(A\times(B\cap C)\right)\cap(A\times C)\right]$

$$=A\times\left((B-(B\cap C))\cap C\right)=A\times\varnothing=\varnothing$$

ب) $\left[(A\cup B)\times C\right]\cap\left[A\times(B\cup C)\right]$

$$=\left[(A\cup B)\cap A\right]\times\left[C\cap(B\cup C)\right]\overset{\text{جذب}}{=}A\times C$$

ج) $(A'\times U)'$

$$=\left((A')'\times U\right)\cup(A'\times U')\cup\left((A')'\times U'\right)=(A\times U)\cup(A'\times\varnothing)\cup(A\times\varnothing)=A\times U$$

☜ مثال: اگر $A\times(B-C)=A\times(C-B)$ باشد آن گاه ثابت کنید: $A\times B=A\times C$

✍حل:

$$\mathbf{A\times(B-C)=A\times(C-B)\ \rightarrow\ B-C=C-B\ \rightarrow\ B=C\ \rightarrow\ A\times B=A\times C}$$

☜ مثال: اگر D,C,B,A چهار مجموعه نا تهی بوده $A\times C\subseteq B\times D$ باشد آن‌گاه تعداد زیر مجموعه‌های $A-B$ کدام است؟

✍ حل:

$$\mathbf{A\times C\subseteq B\times D}\rightarrow\begin{cases}\mathbf{A\subseteq B\ \ \rightarrow\ \ A-B=\phi}\\ \mathbf{C\subseteq D}\end{cases}$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی تهی $\mathbf{۱=۲^۰}$ است.

☜ مثال: اگر $A=\{۵,X-Y\}$, $B=\{X+Y,۱\}$, $A\times B=B\times A$ باشد $X+۲Y$ کدام است؟

✍حل:

$$\mathbf{A\times B=B\times A\xrightarrow{A,\,B\neq\varnothing}A=B\ \rightarrow\begin{cases}x+y=۵\\ x-y=۱\end{cases}\rightarrow\ x=۳\ ,\ y=۲}$$

☜ **مثال: اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو مجموعه‌ی غیرتهی و $\mathbf{(A\times B)\subset(B\times A)}$، آن‌گاه $\mathbf{A\Delta B}$ برابر کدام است؟**

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) $\mathbf{A\cap B}$ ٤) $\mathbf{A\cup B}$

✍ **حل:** گزینه ۱ پاسخ است.

$$\mathbf{(A\times B)\subseteq(B\times A)\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq B\\ B\subseteq A\end{cases}\Rightarrow A=B\Rightarrow A\Delta B=A\Delta A=\varnothing}$$

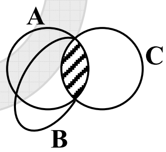
☜ **مثال: اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ سه مجموعه‌ی غیرتهی باشند، از کدام تساوی الزاماً $\mathbf{A=B}$ نتیجه می‌شود؟**

۱) $\mathbf{A\times C=B\times C}$ ۲) $\mathbf{A\cap C=B\cap C}$ ۳) $\mathbf{A\cup C=B\cup C}$ ٤) $\mathbf{A\times(B-C)=(A-C)\times B}$

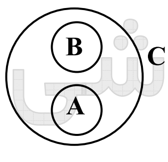
✍ **حل:** گزینه ۱ پاسخ است.

$$\mathbf{A\times C=B\times C\xrightarrow{C\neq\varnothing}A=B}$$

$$\mathbf{A\cap C=B\cap C\xrightarrow{\text{ممکن است}}A\neq B}$$

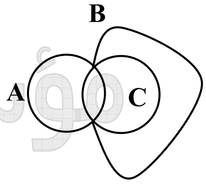


$$\mathbf{A\cup C=B\cup C\xrightarrow{\text{ممکن است}}A\neq B}$$



(مثلاً B تهی باشد و A زیر مجموعه‌ی غیرتهی C باشد.)

$$\mathbf{A\times(B-C)=(A-C)\times B\Rightarrow}$$



$$\mathbf{(A\times B)-(A\times C)=(A\times B)-(C\times B)}$$

اگر $\mathbf{A-B=A-C}$ لزوماً $\mathbf{B=C}$ نیست. پس لزوماً $\mathbf{A\times C=C\times B}$ نیست.

ویژگی‌های عدد اصلی ضرب دکارتی ۲ مجموعه:

هر گاه مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد در اینصورت هر کدام از مجموعـه‌هـای $A\times B$ و $B\times A$ دارای $m\times n$ عضو می‌باشند.

$$n(A\times B)=n(B\times A)=mn$$

نکات:

الف) $n((A\times B)\cap(B\times A))=[n(A\cap B)]^2$

ب) $n\big((A\times B)\cup(B\times A)\big)=2n(A).n(B)-\big[n(A\cap B)\big]^2$

ج) $n((A\times B)-(B\times A))=n(A\times B)-n\big((A\times B)\cap(B\times A)\big)=n(A)n(B)-\big[n(A\cap B)\big]^2$

نتیجه:

$$n\left(B^2-A^2\right)=\left(n(B)\right)^2-\left[n(A\cap B)\right]^2$$

☜ **مثال: اگر مجموعه A دارای ٦٤ زیر مجموعه و مجموعه‌ی B دارای ۱۰ زیر مجموعه دو عضوی باشد. حاصل ضرب دکارتی A در B دارای چند عضو خواهد بود؟**

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} 2^n=64\rightarrow n=6\Rightarrow |A|=6 \\ \binom{n}{2}=10\rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}=10\rightarrow n=5\Rightarrow |B|=5 \end{array}\right\}\Rightarrow |A\times B|=|A||B|=6\times 5=30$$

☜ **مثال: اگر $\{$۴ و ۳ و ۲ و ۱$\}=A$ و $\{$۵ و ٤ و ۳$\}=B$ باشد، تعداد عضوهای $(A\times B)\cup(B\times A)$ کدام است؟**

✍حل:

$$|(A\times B)\cup(B\times A)|=2|A||B|-|A\cap B|^2=2\times 3\times 4-2^2=20$$

☜ **مثال: اگر $A=\{K+2\mid K\in Z,-1\le K\le 2\}$ و $B=\left\{K-1\mid K\in N,K^2\le 9\right\}$ آنگاه B^2-A^2 چند زیر مجموعه دارد؟**

✍ حل:

$B=\{0,1,2\}$ $\qquad$ $A=\{1,2,3,4\}$

$$\left|B^2-A^2\right|=\left|B^2\right|-\left|B^2\cap A^2\right|=|B|^2-\left|(B\cap A)^2\right|=|B|^2-|B\cap A|^2=3^2-2^2=5$$

رابطه:

هرگاه دو مجموعه A و B داده شده باشند، هر زیر مجموعه‌ای از $A\times B$ به نام یک رابطه از A در B خوانده می‌شود.

در صورتیکه R رابطه از A در A باشد، یعنی $R\subseteq A\times A$ در این صورت می‌گوییم رابطه R در A تعریف شده است.

در صورتی که R یک رابطه از A در B باشد و داشته باشیم $(a,b)\in R$ در این صورت می‌نویسیم: aRb و می‌گوییم a با b به وسیله رابطه R مربوطند. واضح است که aRb با bRa تفاوت دارد. در صورتی که $(a,b)\notin R$ می‌نویسیم: $a\not R b$

☜ **مثال: اگر $B=\{a,b\}, A=\{۱,۲,۳\}$ رابطه ای پنج عضوی از A در B را بنویسید.**

✍**حل:**

$$A\times B=\{(۱,a),(۲,a),(۳,a),(۱,b),(۲,b),(۳,b)\}$$

رابطه‌های تک‌عضوی عبارتند از:

$$R_۱=\{(۱,a)\}\quad R_۲=\{(۲,a)\}\quad R_۳=\{(۳,a)\}$$
$$R_۴=\{(۱,b)\}\quad R_۵=\{(۲,b)\}\quad R_۶=\{(۳,b)\}$$

☜ **مثال: رابطه R روی $A=\{-۳,-۲,۱,۲,۳\}$ به صورت زیر تعریف شده است: $\forall a,b\in A: aRb \Leftrightarrow a^۲+b=۶$ اعضای رابطه‌ی R را تعیین کنید.**

✍**حل:** R دارای این ٤ عضو است:

$$(-۲)^۲+۲=۶\to(-۲,۲)\in R$$
$$(+۲)^۲+۲=۶\to(۲,۲)\in R$$
$$(-۳)^۲-۳=۶\to(-۳,-۳)\in R$$
$$(+۳)^۲-۳=۶\to(۳,-۳)\in R$$

☜ **مثال: اگر R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ به‌صورت $aRb\Leftrightarrow|۳b-a|<۴$ تعریف شده باشد، رابطه‌ی R چند عضو دارد؟**

✍ **حل:**

$$aRb\Rightarrow|۳b-a|<۴$$
$$b=۳:|۳\times۳-۶|<۴\to(۳,۶)\in R$$
$$b=۲:|۳\times۲-۶|<۴\ \ldots\ |۳\times۲-۳|<۴\to$$
$$(۲,۶)\in R\qquad(۲,۵)\in R$$
$$(۲,۴)\in R\qquad(۲,۳)\in R$$

$$b=۱:|۳\times۱-۶|<۴\qquad(۱,۶)\in R$$
$$|۳\times۱-۵|<۴\qquad(۱,۵)\in R$$
$$|۳\times۱-۴|<۴\qquad(۱,۴)\in R$$
$$|۳\times۱-۳|<۴\qquad(۱,۳)\in R$$
$$|۳\times۱-۲|<۴\qquad(۱,۲)\in R$$
$$|۳\times۱-۱|<۴\qquad(۱,۱)\in R$$

رابطه همانی:

مجموعه نا تهی A مفروض است، رابطه I_A را همانی گوییم هر گاه: $I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$ لذا اگر مجموعه A دارای n عضو باشد رابطه I_A نیز n عضو دارد.

اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم در رابطه‌ها:

اجتماع و اشتراک و تفاضل دو رابطه به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$R_۱ \cup R_۲ = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_۱ \vee (x,y) \in R_۲\}$$

$$R_۱ \cap R_۲ = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_۱ \wedge (x,y) \in R_۲\}$$

$$R_۱ - R_۲ = \{(x,y) \mid (x,y) \in R_۱ \wedge (x,y) \notin R_۲\}$$

متمم یک رابطه به این ترتیب تعریف می‌شود: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}' = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid (\mathbf{x},\mathbf{y}) \notin \mathbf{R}\}$

رابطه وارون (معکوس):

وارون رابطه R را که رابطه‌ای از A در B می‌باشد با $R^{-۱}$ نمایش داده و مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^{-۱} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

به عبارت ساده‌تر برای نوشتن وارون R کافی است در هر کدام از زوجهای مرتب R جای مختص اول و دوم را عوض کنیم. واضح است که: (برد) $D_{R^{-۱}} = R_R$ (دامنه)   (برد) $D_R = R_{R^{-۱}}$ (دامنه)

☜ **مثال: رابطه $R = \{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ < ۶\}$ رابطه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد صحیح می‌باشد، مجموع مولفه‌های اول $R^{-۱}$ کدام است؟**

✍**حل:**

$$\mathbf{R : N \to Z}$$

$$\begin{array}{ll} ۱^۲ + ۱^۲ < ۶ & ۱^۲ + (-۲)^۲ < ۶ \\ ۱^۲ + ۲^۲ < ۶ & ۱^۲ + (-۱)^۲ < ۶ \end{array} \to \mathbf{R = \{(۱,۱)\ ,\ (۱,۲)\ ,\ (۱,-۲)\ ,\ (۱,-۱)\}}$$

مؤلفه‌های اول $\mathbf{R^{-۱}}$ همان مؤلفه‌های دوم $\mathbf{R}$ است. $\leftarrow$ $۱+۲-۲-۱=۰$

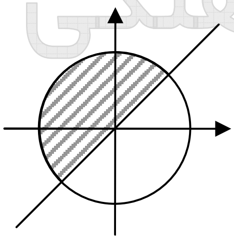
نمودار رابطه‌ها:

برای رسم نمودار یک رابطه می‌توان از صفحات مختصات بهره گرفت. برای رسم نمودار رابطه R که $R \subseteq A \times B$ در صفحات مختصات روی محور افقی عضوهای مجموعه A و روی محور عمودی عضوهای مجموعه B را در نظر می‌گیریم.

سپس زوجهای مرتب موجود در رابطه را در صفحه مختصات معین می‌کنیم.

☜ **مثال: نمودار رابطه: $R = \{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۱, y \ge x\}$ که روی $\mathbf{R}$ تعریف شده است، کدام است؟**

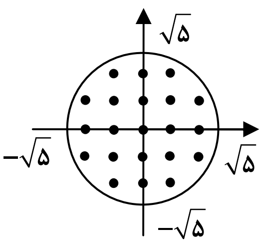
✍**حل:**



☜ **مثال: رابطه $R = \{(x,y) \mid x,y \in Z, x^۲ + y^۲ \le ۵\}$ دارای چند عضو است؟**

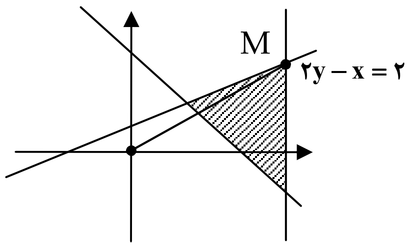
✍**حل:**

در هر ربع دایره ۳ نقطه و روی هر محور ۲ نقطه قرار دارد.



$$۳ \times ۴ + ۴ \times ۲ + \underset{\text{مبدأ}}{\underbrace{۱}} = ۲۱$$

☜ مثال: اگر $A=\{(x,y)\mid x\le ٤\}$ و $S=\{(x.y)\mid ٢y-x\le ٢, x+y\ge ٣\}$ زیر مجموعه‌هایی از R^2 باشند و $B=A\bigcap S$، فاصله دورترین نقطه ناحیه B تا مبداء مختصات کدام است؟

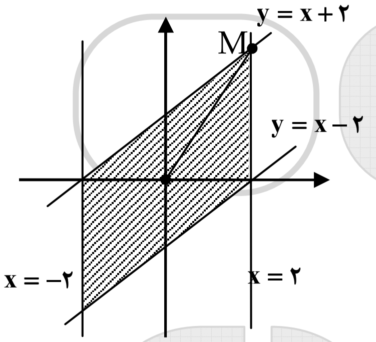


✍حل:

M دورترین نقطه صفحه از مبدأ است. چون هم طول و هم عرضش ماکزیمم است.

$$|OM|=\sqrt{۴^2+۳^2}=۵$$

☜ مثال: اگر $S=\{(x,y)\mid |y-x|\le ٢, |x|\le ٢\}$ زیر مجموعه‌ای از R^2 باشد، فاصله دورترین نقطه مجموعه نقاط S از مبداء مختصات کدام است؟



✍حل:

$$|OM|=\sqrt{۲^2+۴^2}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

M دورترین نقطه صفحه است. چون هم طول و هم عرضش ماکزیمم است.

خواص رابطه‌ها:

۱) خاصیت انعکاسی (بازتابی):

هرگاه رابطه R در مجموعه A تعریف شده باشد، به طوری که هر عضو A به وسیله رابطه R با خودش مربوط شود، می‌گوییم رابطه R در مجموعه A دارای خاصیت بازتابی یا انعکاسی می‌باشد. به عبارت دیگر برای اینکه رابطه R که در A تعریف شده است دارای خاصیت بازتابی باشد:

$\forall a\in A:(a,a)\in R$

$\forall a\in A: aRa$

☜ مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ دارای خاصیت بازتابی است؟

$R_1=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}\rightarrow$ بازتابی هست چون تمام (x,x) ها را دارد.

$R_2=\{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴)\}\rightarrow$ چون زوج $(۳,۳)$ را ندارد، بازتابی نیست.

☜ مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت بازتابی اند؟

الف) $\forall x,y\in IR: xRy\Leftrightarrow x\le y$

$xRx\rightarrow x\le x\rightarrow$ بازتابی است.

ب) $d\,R\,d'\Leftrightarrow d\perp d'$

$dRd\rightarrow d\not\perp d\rightarrow$ پس بازتابی نیست.

ج) $ARB\Leftrightarrow A\subseteq B$

$ARA\rightarrow A\subseteq A\rightarrow$ بازتابی است.

د) $aRb\Leftrightarrow a+b>۰$

$aRa\rightarrow ۲a>۰\rightarrow a>۰\rightarrow$ پس همواره برقرار نیست فقط برای $a>۰$ برقرار است.

هـ) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$(x,y)R(x,y) \to xy = xy \to$ بازتابی است.

و) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t}$

$(x,y)R(x,y) \to \frac{x}{x} = \frac{y}{y} \to$ این رابطه برای $x = ۰$ و $y = ۰$ برقرار نیست.

۲) خاصیت تقارنی:

هرگاه رابطه R در مجموعه A تعریف شده باشد، گوییم R دارای خاصیت تقارنی است، هرگاه به ازاء هر a و b متعلق بـه A داشـته باشیم:

$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ یا $aRb \Rightarrow bRa$

نتیجه: رابطه R روی مجموعه A تقارنی نیست، هرگاه زوج مرتبی مانند (a,b)، متعلق بـه R موجـود باشـد ولـی زوج مرتـب (b,a) متعلق به رابطه R نباشد.

☜ **مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ دارای خاصیت تقارنی است؟**

$R_1 = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\} \to$ تقارنی دارد

$R_2 = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),(۱,۳)\} \to$ تقارنی ندارد، چون $(۳,۱)$ ندارد.

☜ **مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت تقارنی‌اند؟**

الف) $\forall x,y \in IR : xRy \Leftrightarrow x \le y$

$xRy \to x \le y \not\Rightarrow y \le x \to y\not R x \to$ تقارنی ندارد.

ب) $d R d' \Leftrightarrow d \parallel d'$

$dRd' \to d \parallel d' \to d' \parallel d \to d'Rd$ تقارنی دارد.

ج) $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$

$ARB \to A \subseteq B \not\to B \subseteq A \to B\not R A \to$ تقارنی ندارد.

د) $aRb \Leftrightarrow$ x برادر y است

اگر x برادر y باشد، ممکن است y خواهر x باشد. پس تقارنی ندارد.

ه) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$(x,y)R(z,t) \to xy = zt \to zt = xy \to (z,t)R(x,y)$

ز) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x + z = y + t$

$(x,y)R(z,t) \to x + z = y + t \to z + x = t + y \to (z,t)R(x,y)$

☜ **مثال:** رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به صورت: $xRy \Leftrightarrow ax + by = c$ تعریف شده است، در چه صورت متقارن است؟

$xRy \to ax + by = c$

$yRx \to ay + bx = c$

اگـر بخـواهیم هـم xRy هـم yRx برقـرار باشـد بایـد $ax + by = ay + bx = c$ باشـد پـس: $a(x-y) = b(x-y)$ لـذا $(a-b)(x-y) = ۰$ حال اگر بخواهد این رابطه همواره برقرار باشد نباید به x و y ربط داشته باشد پس $a = b$ است.

۳) خاصیت تراگذری یا تعدی یا ترایایی:

هرگاه R رابطه‌ای در A باشد، به طوری که برای هر a و b و c متعلق به A داشته باشیم: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ در این صورت رابطه R دارای خاصیت تراگذاری است. $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ یا $\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

نتیجه: رابطه R روی مجموعه A تراگذاری نیست، هرگاه حداقل دو زوج مرتب مانند (a,b) و (b,c) متعلق به R، موجود باشند ولی زوج مرتب (a,c) در رابطه R وجود نداشته باشد. $(a,b,c \in A)$

همچنین اگر $(a,b) \in R$ ولی b مؤلفه اول هیچ زوجی نباشد، خاصیت تراگذری تحت تأثیر این زوج قرار نمی گیرد.

☜ **مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ دارای خاصیت تراگذری است؟**

$R_۱ = \{(۲,۲),(۳,۳),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}$ **چون (۱,۴),(۴,۱) دارد. (۱,۱) هم باید باشد.**

$R_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),(۱,۳)\}$ **چون (۱,۳) و (۳,۴) هست، (۱,۴) هم باید باشد.**

$R_۳ = \{(۱,۲)\}$ **تراگذاری دارد**

$R_۴ = \{(۱,۲),(۱,۳)\}$ **تراگذاری دارد**

☜ **مثال: کدام‌یک از روابط زیر روی مجموعه‌هایی که تعریف می‌شوند، دارای خاصیت تراگذری‌اند؟**

الف) $\forall x,y \in IR : xRy \Leftrightarrow x \le y$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{xRy \to x \le y} \\ \mathbf{yRz \to y \le z} \end{array}\right\} \to \mathbf{x \le z \to xRz}$$

ب) $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{ARB \to A \subseteq B} \\ \mathbf{BRC \to B \subseteq C} \end{array}\right\} \to \mathbf{A \subseteq C \to ARC}$$

ج) $aRb \Leftrightarrow$ a برادر b است

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{aRb \to} \text{ a برادر b است} \\ \mathbf{bRc \to} \text{ b برادر c است} \end{array}\right\} \to \text{ a برادر c است.}$$

د) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{(x,y)R(z,t) \to xy = zt} \\ \mathbf{(z,t)R(w,v) \to zt = wv} \end{array}\right\} \to \mathbf{xy = wv \to (x,y)R(w,v)}$$

ه) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x + z = y + t$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{(x,y)R(z,t) \to x + z = y + t} \\ \mathbf{(z,t)R(w,v) \to z + w = t + v} \end{array}\right\} \to \mathbf{x + ۲z + w = y + ۲t + v}$$

نمی‌توان نتیجه گرفت: $\mathbf{x + w = y + v}$ پس تراگذاری ندارد.

ز) $\forall x,y,z,t \in IR : (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x - z = ۵(y - t)$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{(x,y)R(z,t) \to x - z = ۵(y - t)} \\ \mathbf{(z,t)R(w,v) \to z - w = ۵(t - v)} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x - w = ۵(y - v) \to (x,y)R(w,v) \to} \text{ تراگذاری دارد}$$

۴) خاصیت ضد تقارنی یا پادتقارنی: هرگاه R یک رابطه روی مجموعه A باشد، این رابطه دارای خاصیت پادتقارنی است، هرگاه:

$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ یا $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

نتیجه: اگر زوج مرتبی مانند (a,b) متعلق به R موجود باشد در حالیکه زوج مرتب (b,a) هم متعلق به R هست، رابطه R روی مجموعه A پادمتقارن نیست.

تذکر: یک رابطه می‌تواند هم تقارنی و هم پادتقارنی باشد یا تقارنی باشد ولی پادتقارنی نباشد یا تقارنی نباشد ولی پادتقارنی باشد، یا تقارنی نباشد و پادتقارنی هم نباشد.

☜ مثال: کدام یک از روابط زیر روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ دارای خاصیت پاد تقارنی است؟

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ پاد تقارنی دارد

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(3,4),(4,3),(4,4),(1,3)\}$ (۴,۳),(۳,۴) با هم هست پادتقارنی ندارد.

$R_3 = \{(1,2)\}$ پادتقارنی دارد.

$R_4 = \{(1,2),(1,3)\}$ پادتقارنی دارد.

نکات مربوط به خواص رابطه‌ها:

۱) **رابطه تهی** روی مجموعه غیر تهی A دارای خاصیت بازتابی نیست ولی تقارنی و پادتقارنی و تراگذاری می‌باشد. ولی رابطه تهی روی مجموعه تهی A دارای همه خواص رابطه می‌باشد.

۲) تمام رابطه‌هایی که به صورت $R = B^2$ روی مجموعه B تعریف شود، همواره خواص بازتابی، تقارنی، و تراگذاری را داراست. (اگر B تهی یا تک عضوی باشد پادمتقارن نیز می‌باشد.)

۳) هر رابطه تک عضوی که روی مجموعه A تعریف شده باشد، دارای خاصیت تراگذاری و پادتقارنی می‌باشد.

٤) اگر رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد و ارتباطی بین زوجهای مرتب آن برقرار نباشد، (هیچ مولفه دومی به عنوان مولفه اول یک زوج مرتب دیگر به کار نرفته باشد.)، دارای خواص پادتقارنی و تراگذاری می‌باشد.

۵) هر رابطه‌ای که هم متقارن و هم پادمتقارن باشد یا تهی است یا عناصری به فرم (a,a) را داراست.

نتیجه: اگر رابطه‌ای دارای خواص تقارنی و پادتقارنی باشد، لزوماً تراگذاری هم خواهد بود.

٦) هر زیر مجموعه یک رابطه پادمتقارن، خود رابطه‌ای پادمتقارن است، اما در مورد بقیه خواص این مطلب لزوماً برقرار نمی‌باشد.

۷) اگر R_1 و R_2 دو رابطه روی مجموعه A باشند، داریم:

الف) اگر R_1 و R_2 هر دو خاصیت بازتابی داشته باشند، در این صورت $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$ نیز بازتابی‌اند، اما $R_1 - R_2$ دارای خاصیت بازتابی نیست.

ب) اگر R_1 و R_2 هر دو خاصیت تقارنی داشته باشند، در این صورت $R_1 - R_2, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$ نیز دارای خاصیت تقارنی می‌باشند.

ج) اگر R_1 و R_2 هر دو خاصیت تراگذاری داشته باشند، در این صورت $R_1 \cap R_2$ نیز دارای خاصیت تراگذاری می‌باشند، اما لزومی ندارد که $R_1 - R_2 , R_1 \cup R_2$ تراگذاری باشند.

د) اگر R_1 و R_2 هر دو خاصیت پادتقارنی داشته باشند، در این صورت $R_1 - R_2, R_1 \cap R_2$ نیز دارای خاصیت پادتقارنی می‌باشند، اما لزومی ندارد که $R_1 \cup R_2$ پادمتقارن باشد.

☜ **مثال: در مجموعه $A = \{1,2,3,4,5\}$ رابطه R را با حداقل اعضا چنان بنویسید:**

الف) که فقط خاصیت بازتابی داشته باشد.

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\boxed{(1,2),(2,3),(2,1)}\}$

این جزء تخریب‌کننده همزمان سه خاصیت تقارنی، پادتقارنی و تراگذری می‌باشد.

ب) که فقط خاصیت تقارنی داشته باشد:

$R = \{(1,2),(2,1)\}$

ج) که فقط خاصیت تعدی داشته باشد:

$R = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,4)\}$

د) که فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۳)\}$

هـ) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$

و) که فقط خاصیت پادتقارنی و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۳)\}$

ز) که فقط خاصیت تراگذری و بازتابی داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴)\}$

ح) که فقط خاصیت تقارنی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱)\}$

ط) که فقط خاصیت تقارنی و پادتقارنی داشته باشد:

اگر رابطه‌ای هم تقارنی هم پادتقارنی باشد، حتماً تراگذری هم هست چون فقط زوج مرتب‌هایی به صورت (x,x) را می‌تواند اختیار کند. لذا امکان آن که فقط ۲ خاصیت فوق را داشته باشیم وجود ندارد.

ی) که فقط خاصیت پادتقارنی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۲)\}$

ک) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲),(۲,۱)\}$

ل) که فقط خاصیت تقارنی و بازتابی و پادتقارنی داشته باشد:

اگر رابطه‌ای هم تقارنی هم پادتقارنی باشد حتماً تراگذری هم هست.

م) که فقط خاصیت پادتقارنی و بازتابی و تراگذری داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۱,۲)\}$

ن) که فقط خاصیت تقارنی و پادتقارنی و تراگذاری داشته باشد:

$R = \{\ \}$

س) که هر ٤ خاصیت را داشته باشد:

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵)\}$

ق) که هیچ خاصیتی را نداشته باشد:

$R = \{(۱,۲),(۲,۳),(۲,۱)\}$

رابطه هم ارزی:

هرگاه رابطه R روی مجموعه A تعریف شده باشد و دارای سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تراگذاری (تعدی) باشد، در این صورت می‌گوییم رابطه R یک رابطه هم ارزی روی A است.

دسته‌های هم ارزی:

هر رابطه هم ارزی روی یک مجموعه‌ی A آن مجموعه را به زیر مجموعه‌های مجزا که هر یک از آن‌ها را دسته یا کلاس هم ارزی می‌نامند، تقسیم می‌کند. دسته هم ارزی a را تحت رابطه R با علامتهای a/R یا $[a]_R$ و به صورت خلاصه $[a]$ نمایش می‌دهیم. a را نماینده دسته می‌گوییم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم. $[a] = \{x \mid xRa\}$

به طور کلی دسته هم ارزی هر رابطه هم ارزی روی مجموعه اعداد صحیح (یا زیر مجموعه‌ای از آن) را با **کوچکترین عدد غیر منفی آن دسته**، مشخص می‌کنند. هر دسته هم ارزی تولید شده توسط عضوی مانند a که $a\in A$، زیر مجموعه‌ای از مجموعه A می‌باشد.

یعنی: $[a]\subseteq A$

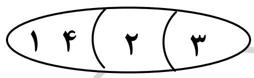
نکته: اگر b عضو دلخواهی از مجموعه A باشد و $b\in[a]$ آن گاه:

$$(a\in A)[a]=[b]$$

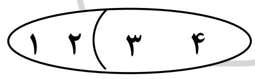
به بیان دیگر در صورتی که رابطه R روی مجموعه A، یک رابطه هم ارزی باشد، اگر aRb آن گاه $[a]=[b]$ و بالعکس $(a,b\in A)$

☜ **مثال: در روابط زیر کلاسهای هم ارزی را مشخص کنید.**

$$R_۱=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,٤),(٤,۱),(٤,٤)\}$$



$$R_۲=\{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۲,۱),(۳,٤),(٤,۳),(٤,٤),(۳,۳)\}$$



$$\mathbf{R_۳=\{(x,y)\,|\,x,y\in Z\ \ ,\ ۳\,|\,x-y\}}$$

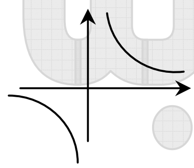
اگر $۳|x-y$ باشد یعنی $\mathbf{x-y=۳q}$ اگر بخواهد این اتفاق بیافتد باید x و y دارای باقیمانده یکسانی در تقسیم بر ۳ باشد پس این رابطه Z را براساس باقیمانده تقسیم بر ۳ به سه کلاس $[۰]$ و $[۱]$ و $[۲]$ تقسیم می‌کند.

نکته: اگر رابطه از $IR^۲$ به $IR^۲$ تعریف شده باشد، کلاسهای هم ارزی دارای نمایش هندسی می‌باشند.

☜ **مثال: در روابط زیر نمودارکلاس $[(۳,٤)]$ را رسم کنید.**

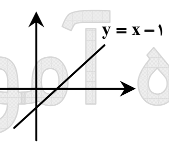
$$\forall x,y,z,t\in IR:(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow xy=zt$$

$$\mathbf{(x,y)R(۳,۴)\to xy=۱۲\to y=\frac{۱۲}{x}}$$



$$\forall x,y,z,t\in IR:(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x+z=y+t$$

$$\mathbf{(x,y)R(۳,۴)\ \to\ x+۳=y+۴\ \to\ y=x-۱}$$



☜ **مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی و B مجموعه‌ی اعداد اول دو رقمی کم‌تر از ۵۰ باشند، رابطه‌ای به‌صورت $\mathbf{(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow x=a}$ بر روی مجموعه‌ی $\mathbf{A\times B}$ تعریف شده است. این رابطه مجموعه‌ی $\mathbf{A\times B}$ را به چند دسته‌ی هم‌ارزی تقسیم می‌کند؟**

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۱   ٤) فاقد هم‌ارزی

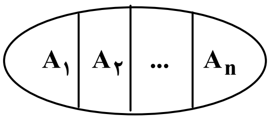
✍**حل:** گزینه ۱ پاسخ است.

رابطه‌ی مورد نظر هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد، پس هم‌ارزی است.

با توجه به تعریف رابطه، نتیجه می‌گیریم که فقط زوج مرتب‌هایی با هم رابطه دارند که مؤلفه‌ی اول مساوی داشته باشند، یعنی فقط عناصری در یک دسته‌ی هم‌ارزی قرار می‌گیرند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها مساوی باشد و چون مؤلفه‌های اول از مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی انتخاب می‌شود، نتیجه می‌گیریم که ۹ دسته‌ی هم‌ارزی داریم.

افراز یک مجموعه:

اگر A یک مجموعه غیر تهی باشد، گوییم A به n زیر مجموعه A_1 و A_2 و... و A_n افراز شده است اگر:



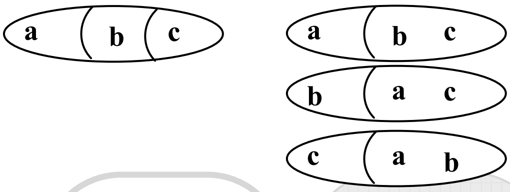
۱) $\forall i \in N(1 \le i \le n) A_i \ne \varnothing$

۲) $\forall i, j \in N, i \ne j (1 \le i, j \le n) A_i \cap A_j = \varnothing$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

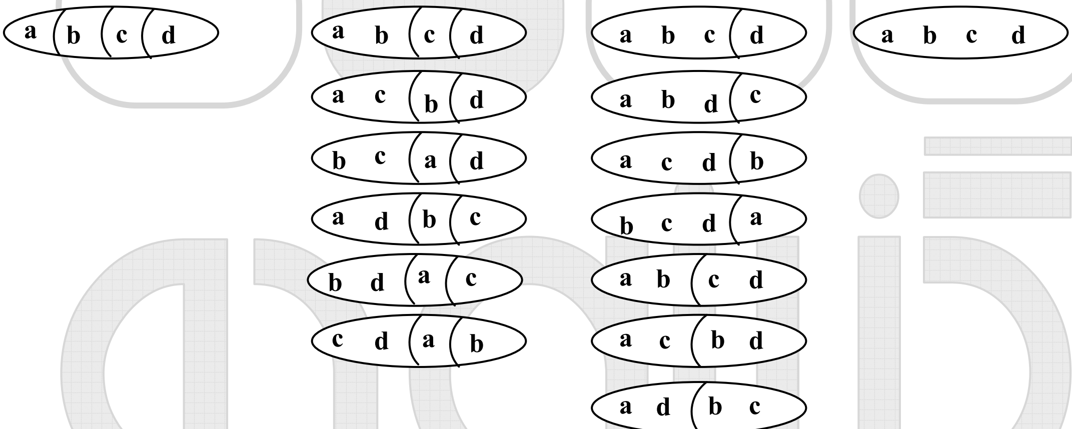
☜ **مثال: تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.**

✍**حل:**



☜ **مثال: تمام افرازهای مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ را بنویسید.**

✍**حل:**



جمعاً ۱۵ افراز داریم.

خاصیت مهم رابطه‌ی هم ارزی:

اگر رابطه‌ای هر سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تراگذری را داشته باشد، دارای این ویژگی خواهد بود که مجموعه‌ای که روی آن تعریف شده است را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند.

این دسته‌ها دارای این ویژگی می‌باشد که هر عضو در آن با بقیه اعضا رابطه دارد و بین این عضو و اعضای دسته‌های دیگر هیچ ارتباطی وجود ندارد.

هر رابطه هم‌ارزی مجموعه تعریفش را به صورتی منحصر به‌فرد به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند.

با داشتن رابطه هم‌ارزی می‌توان افراز متناظر با آن را به‌دست آورد. و بالعکس اگر $T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز مجموعه نا تهی A باشد، رابطه هم ارزی متناظر با افراز T برابر است با:

$$R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \dots \cup A_n^2 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^2$$

یعنی برای یافتن رابطه متناظر با افراز یک مجموعه، فرض می‌کنیم، مجموعه T شامل تمام کلاسهای هم ارزی مجموعه A می‌باشد، اگر بخواهیم رابطه هم ارزی متناظر با این افراز را به دست آوریم، کافی است حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های افراز کننده در خودش را بیابیم. (چون هر عضو با کلیه اعضا رابطه دارد پس باید تمام زوج مرتب‌های ممکن را تولید کنیم.) در این صورت اجتماع مجموعه‌های به دست آمده همان رابطه هم ارزی مورد نظر روی مجموعه A می‌باشد.

نکته:

$$n(R) = n(A_1)^2 + n(A_2)^2 + \cdots + n(A_n)^2$$

نتیجه: بین رابطه‌های هم ارزی روی یک مجموعه A و افرازهای A یک تناظر یک به یک وجود دارد. لذا برای شمردن تعداد روابط هم ارزی قابل تعریف روی یک مجموعه، کافی است تعداد افرازهای ممکن آنرا بشماریم.پس تعداد رابطه‌های هم ارزی روی مجموعه A برابر تعداد افرازهای مجموعه A است. مجموعه ۱ عضوی ۱ افراز، ۲ عضوی ۲ افراز، ۳ عضوی ۵ افراز و ٤ عضوی ۱۵ افراز دارد.

هرگاه صحبت از رابطه هم‌ارزی به میان بیاید، افراز متناظر با رابطه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

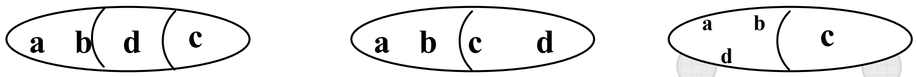
☜ **مثال: تعداد روابط هم ارزی قابل تعریف روی $A = \{a,b,c,d\}$ با شرط‌های زیر را بیابید.**

الف) aRb **ب)** $[c] \neq [a], a \in [b]$

✍ **حل:**

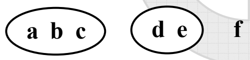
الف) چون a و b در یک دسته هم‌ارزی قرار دارند، پس آنها را طناب‌پیچ می‌کنیم. حال روی این مجموعه جدید ۳ عضوی ($\{ab,c,d\}$)، ۵ افراز داریم، لذا ۵ رابطه هم‌ارزی می‌توانیم بنویسیم:

ب) a,b باید در یک دسته باشند و a,c نباید در یک دسته باشند، این کار به ۳ صورت زیر امکان‌پذیر است:

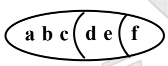


☜ **مثال: اگر $R = \{(a,b),(b,c),(d,e),(f,f)\}$ روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ تعریف شده باشد، حداقل و حداکثر چند عضو به این مجموعه اضافه کنیم، تا هم ارزی گردد؟**

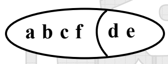
✍ **حل:** چون $b\ R\ c, a\ R\ b$ این سه عضو هم کلاسند پس آن‌ها را طناب‌پیچ می‌کنیم. به همین دلیل e,d را هم طناب‌پیچ می‌کنیم.



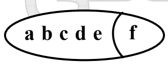
حال این سه عضو را به ۵ صورت می‌توانیم افراز کنیم.



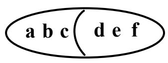
⟶ تعداد اعضا $= 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$



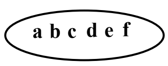
⟶ تعداد اعضا $= 4^2 + 2^2 = 20$



⟶ تعداد اعضا $= 5^2 + 1^2 = 26$



⟶ تعداد اعضا $= 3^2 + 3^2 = 18$



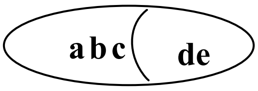
⟶ تعداد اعضا $= 6^2 = 36$

چون رابطه داده شده دارای ٤ عضو است، پس حداقل ۱۰ (برای ١٤ عضوی شدن) و حداکثر ۳۲ (برای ٣٦ عضوی شدن) عضو باید اضافه کنیم.

نکته: همیشه کمترین تعداد اعضای یک رابطه‌ی هم ارزی متناظر با بیشترین تعداد کلاس و بیشترین تعداد اعضای یک رابطه‌ی هم ارزی متناظر با کمترین تعداد کلاس می‌باشد.

☜ **مثال: رابطه‌ی هم ارزی R در مجموعه‌ی ۵ عضوی A، ۲ کلاس هم ارزی پدید آورده به طوریکه یکی از این کلاس‌ها $\{a,b,c\}$ و کلاس دیگر $\{d,e\}$ است. این رابطه چند زیر مجموعه دارد که خود روابطی هم ارزی باشند؟**

✍ **حل:**



اصولاً شمارش روابط هم‌ارزی به به معنای شمارش تعداد افرازها است.

قسمت ۳ عضوی خود دارای ۵ افراز و قسمت ۲ عضوی خود دارای ۲ افراز است. پس جمعاً **۱۰ = ۵×۲** افراز داریم که زیرمجموعه‌ی افراز فوق باشد.

☜ **مثال: بر روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان نوشت که هر یک از آن‌ها دارای ۱۱ زوج مرتب باشند؟**

✍ **حل:** باید افرازی را بنویسیم که ۱۱ زوج مرتب تولید کند و این افراز به‌صورت زیر است:

۱۱ = ۱² + ۱² + ۳² = تعداد اعضا → ≡ (− (−

لذا $۱۰=\binom{۵}{۳}$ افراز به این صورت داریم.

گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

جبر و احتمال

(فصل‌های ۳ و ۴)

احتمال:

تعاریف:

آزمایش یا پدیده‌ای که قبل از رخ‌داد نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشد، را **آزمایش تصادفی** یا **پدیده‌ی تصادفی** می‌نامند.

فضای نمونه: مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

برآمد: هر نتیجه‌ی ممکن یعنی هر عضو S را یک برآمد می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

پیشامد: هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه است. در هرحال وقتی می‌گوییم پیشامدی رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. دو پیشامد که برآمد مشترکی ندارند را ناسازگار می‌گویند.

منظور از رخ‌داد یک پیشامد، وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است.

پیشامد ناممکن و مطمئن: ϕ را پیشامد ناممکن (نشدنی) و S را پیشامد مطمئن (حتمی) می‌گویند.

انواع فضای نمونه:

تعداد اعضای مجموعه‌ی S یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است متناهی یا شمارا نامتناهی یا ناشمارا نامتناهی باشد. وقتی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای، متناهی یا شمارا نامتناهی باشد، آن را فضای نمونه‌ی «گسسته» می‌نامند. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا نامتناهی باشد، که در این‌صورت فضای نمونه گسسته نیست. (مانند انتخاب عددی در بازه‌ی (۲ و ۰).) (وقتی فضای نمونه‌ای، ناشمارا نامتناهی باشد، آن را فضای نمونه‌ای «پیوسته» می‌نامند.)

فضای نمونه
- شمارا (گسسته)
  - متناهی
  - نامتناهی
- ناشمارا (پیوسته)

مثال: در کیسه‌ای ۷ توپ متمایز وجود دارد. یک توپ به تصادف از آن خارج کرده و بدون مشاهده آن را کنار می‌گذاریم. سپس توپ دیگری را خارج کرده آن را مشاهده می‌کنیم. فضای نمونه‌ی این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ٦ ۲) ۷ ۳) $\binom{7}{2}$ ٤) ۱۲

حل:

چون اطلاعی از خروج مهره اول در دست نیست، پس توقع ما در مورد خروج مهره دوم تغییر نکرده است. یعنی ما هم‌چنان توقع خروج هر ۷ مهره را داریم و نمی‌توانیم بگوییم مهره‌ی معینی شانس خروج ندارد. پس فضای نمونه ۷ عضوی است.

اصول موضوع کولموگروف:

وقتی فضای نمونه‌ی S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم که این تابع براساس ۳ اصل موضوع زیر اعداد حقیقی را به پیشامدها، یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد.

اصل موضوع ا: احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است، یعنی: $\forall A \in S : P(A) \geq 0$

اصل موضوع ۲: $P(S) = 1$

اصل موضوع ۳: اگر A_1 و A_2 و...و A_n پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

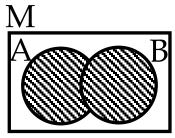
تابعی که در این اصول صادق باشد، به **تابع احتمال** موسوم است. فضای S و تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را **مدل احتمال آزمایش تصادفی** می‌نامند.

عملیات بر روی پیشامدها:

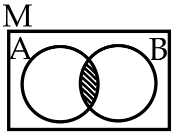
می‌توان بین پیشامدهای یک آزمایش و عبارات مجموعه‌ای یک تناظر یک‌به‌یک ایجاد کرد. در واقع چون پیشامد خود از جنس مجموعه است، می‌توان پیشامدهای جدیدی با استفاده از تلفیق پیشامدهای قبلی ایجاد کرد:

پیشامد وقوع A یا B: $(A\cup B)$

$A\cup B$

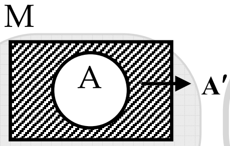


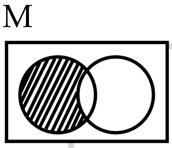
پیشامد وقوع A و B: $(A\cap B)$



$A\cap B$

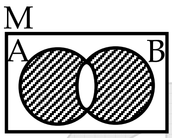
پیشامد عدم وقوع A: ($\overline{A}$ یا A') پیشامد وقوع فقط A: (A رخ دهد و B رخ ندهد):





A-B

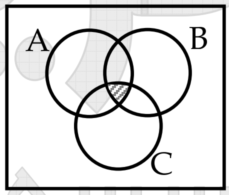
پیشامد وقوع فقط A یا فقط B: (A رخ دهد و B رخ ندهد یا A رخ ندهد و B رخ دهد):



$A\Delta B$

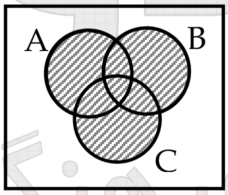
☜**مثال: فرض کنید C , B , A سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. نمودار ون پیشامدهای زیر را رسم کنید:**

الف) هر ۳ پیشامد رخ دهد:



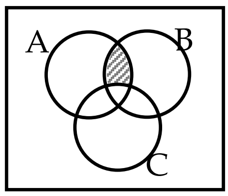
$\mathbf{A\cap B\cap C}$

ب) لااقل یکی از پیشامدها رخ دهد:



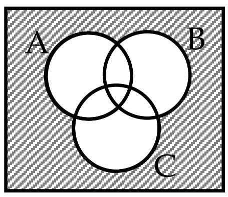
$\mathbf{A\cup B\cup C}$

ج) B , A اتفاق بیفتد و C رخ ندهد:



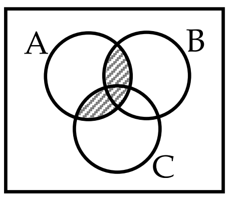
$\mathbf{A\cap B\cap \overline{C}}$

د) هیچ یک از پیشامدها رخ ندهد:



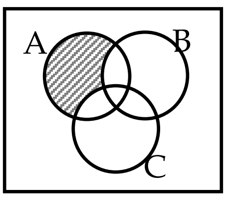
$\mathbf{\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C}}$

هـ) A اتفاق بیفتد و لااقل یکی از پیشامدهای C , B نیز رخ دهد:



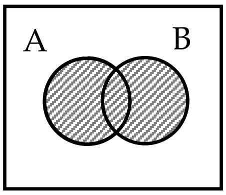
$\mathbf{A\cap (B\cup C)}$

و) فقط A اتفاق بیفتد:



$\mathbf{\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C} = A-(B\cup C)}$

ز) A اتفاق بیفتد یا در صورتی که A رخ نداد، B رخ دهد:



این عبارت در واقع $\mathbf{A \cap (B - A)}$ است که همان $\mathbf{A \cup B}$ می‌باشد.

☜ **مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B به‌طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

د) $A \cap B'$

✍ **حل:**

الف) $\mathbf{S} = \{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (پ،ر،ر)، (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر)، (پ،پ،پ) $\}$

ب) $\mathbf{A} = \{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر) $\}$

ج) $\mathbf{B} = \{$ (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر)، (پ،پ،پ) $\}$

د) $\mathbf{B'} = \{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (پ، ر، ر) $\}$

$\mathbf{A \cap B'} = \{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶) $\}$

☜ **مثال: هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۶ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به‌طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت یک رقمی باشد.

ت) پیشامد $A \cap B$

✍ **حل:**

الف) $\mathbf{S} = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}$

ب) $\mathbf{A} = \{۳,۹,۱۵\}$

پ) $\mathbf{B} = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ت) $\mathbf{A \cap B} = \{۳,۹,۱۵\} \cap \{۱,۳,۵,۷,۹\} = \{۳,۹\}$

☜ **مثال: یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم مطلوبست تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

د) $A' \cup B'$

✍ **حل:**

الف: $\mathbf{S} = \{$ (ر،۱) و (ر،۲) و (ر،۳) و (ر،۴) و (ر،۵) و (ر،۶) و (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶)$\}$

ب: $\mathbf{A} = \{$ (ر،۲) و (ر،۴) و (ر،۶) و (پ،۲) و (پ،۴) و (پ،۶) و (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵)$\}$

ج: $\mathbf{B} = \{$ (ر،۲) و (ر،۴) و (ر،۶)$\}$

د: $\mathbf{A'} = \{$ (پ،۱) و (پ،۳) و (پ،۵)$\}$

$\mathbf{B'} = \{$ (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵) و (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶)$\}$

$\mathbf{A' \cup B'} = \{$ (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶) و (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵)$\}$

مثال: ارقام ۵,۳,۰,۹ را درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A آن که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A \cap B'$

حل:

الف)

$$S = \{۳۰, ۳۵, ۳۹, ۵۰, ۵۳, ۵۹, ۹۰, ۹۳, ۹۵\}$$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می‌شوند، مضرب ۵ هستند.

$$A = \{۳۰, ۳۵, ۵۰, ۹۰, ۹۵\}$$

ج)

$$B = \{۵۳, ۵۹, ۹۰, ۹۳, ۹۵\}$$

د) ابتدا B' را مشخص می‌کنیم.

$$B' = \{۳۰, ۳۵, ۳۹, ۵۰\}$$

$$A \cap B' = \{۳۰, ۳۵, ۵۰\}$$

مثال: در انتخاب سه نفر از بین ۷ نفر پیشامد آن که از بین دو نفر a و b حداقل یکی موجود باشد چند عضو دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

حل:

$$\binom{۷}{۳} - \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{حالتی که هیچ‌کدام موجود نباشد.}} = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵$$

احتمال هم شانس (متساوی الاحتمال) در فضای گسسته: (احتمال کلاسیک)

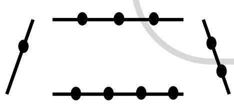
اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ی گسسته‌ی S باشد، $\mathbf{P(A)}$ برابر با مجموع احتمال برآمدهایی است که در A هستند. اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد، فضای نمونه‌ای حاصل را یک‌نواخت یا متساوی الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد، آن‌گاه $P(A)=\frac{m}{n}$ (در واقع فراوانی نسبی پیشامد A را احتمال آن تعریف می‌کنیم.) لذا احتمال رخ دادن پیشامد A در این فضا برابر است با: $\mathbf{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$

☜ **مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟**

✍ **حل:**

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$
$$|S|=۶\times۶=۳۶$$
$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

☜ **مثال: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، چهار نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که با ٤ نقطـه‌ی انتخـاب شـده بتـوان یـک چهارضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟**

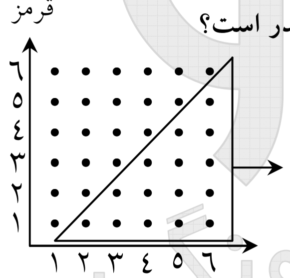


✍ **حل:**

از هر کدام از خط‌ها یکی از رئوس را انتخاب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}$$

☜ **مثال: دو تاس قرمز و سفید پرتاب می‌شوند، احتمال آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر باشد، چقدر است؟**



✍ **حل:**

زوج مرتب‌هایی که مؤلفه سفیدشان بزرگ‌تر است، مطلوبند:

$$P(A)=\frac{\frac{۳۶-۶}{۲}}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

☜ **مثال: در اتاقی ۱۰ جفت کفش متمایز وجود دارد، هرگاه از میان آن‌ها دو لنگه کفش انتخاب شود، احتمال این‌که این دو لنگه کفش یک جفت کفش تشکیل دهند، کدام است؟**

✍ **حل:** از بین جفت‌ها مطلوب است یک جفت را انتخاب کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}$$

☜ **مثال: در پرتاب ٤ سکه با هم احتمال آنکه فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟**

✍ **حل:**

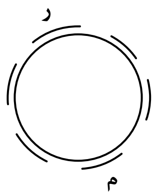
A= {(پ، ر، ر، ر)، (ر، پ، پ، پ)}

جایگشت پ ٤ ×   جایگشت ر ٤ ×

$$P(A)=\frac{۴+۴}{۲^۴}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

☜ **مثال: رئیس و معاون و ٤ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال رئیس مقابل معاون قرار می‌گیرد؟**

✍ **حل:** رئیس در هر مکانی قرار گیرد، از ۵ مکان باقی‌مانده، مکان روبه‌روی رئیس مطلوبست: $P(A)=\frac{۱}{۵}$



☜ **مثال: دو تاس سفید و یک تاس قرمز متمایز را می‌ریزیم. احتمال آن‌که عدد تاس قرمز کوچک‌تر از تاس‌های سفید باشد چقدر است؟**

✍ **حل:**

تاس قرمز	تاس‌های سفید	
۱	٥×٥	می‌توانند از ۲ تا ٦ باشند
۲	٤×٤	می‌توانند از ۳ تا ٦ باشند
۳	۳×۳	می‌توانند از ٤ تا ٦ باشند
٤	۲×۲	می‌توانند از ٥ تا ٦ باشند
٥	۱×۱	فقط می‌توانند ٦ باشند

$$P(A)=\frac{۲۵+۱۶+۹+۴+۱}{۶^{۳}}=\frac{۵۵}{۲۱۶}$$

☜ **مثال: بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد ۳ رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی ارقام ۲ و٤ و٥ و٦ و۷ را نوشته و به تصادف کارتی بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو رقم از ارقام عدد خارج شده فرد باشد چقدر است؟**

✍ **حل:** مطلوب است ۲ رقم از بین ارقام فرد و یک رقم از بین ارقام زوج انتخاب کرده و بچینیم.

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۱}\times ۳!}{\binom{۵}{۳}\times ۳!}=\frac{۳}{۱۰}$$

☜ **مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز متمایز، ۳ مهره‌ی سفید متمایز و ۷ مهره‌ی آبی متمایز قرار دارد.**

الف) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ب) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$p(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ج) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

د) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times\overset{\overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\uparrow}}{۲!}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۴}{۱}}$$

هـ) دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times\overset{\overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\uparrow}}{۲!}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\longrightarrow\text{چون مهره خارج شده مجدداً به جعبه بازگشته است}}$$

☜ **مثال: ده کارت که بر روی هر کدام از آن‌های یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است در درون ظرفی قرار دارند (هیچ دو کارتی شماره‌ی یکسان ندارند). اگر کارت‌های موجود در ظرف را به تصادف و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم احتمال آن که ٤ قبل از ٦ و ٦ قبل از ۲ بیرون آیند (نه لزوماً بلافاصله) کدام است؟**

✍ **حل:**

راه ۱: این سه رقم در هر جایگاهی که قرار بگیرند، نسبت بهم !۳ حالت جایگشت دارند که حالت ٤٦٢ مطلوب است. لذا همواره یکی از ٦ حالت مطلوبست: $P=\frac{۱}{۶}$

راه ۲: ابتدا مکان این سه رقم را تعیین کرده و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم. بقیه ۷ رقم به‌صورت دلخواه چیده می‌شوند.

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۳}\times ۷!}{۱۰!}=\frac{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}}{۱۰\times۹\times۸}=\frac{۱}{۶}$$

☜ **مثال: n نفر را در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک روز یکسان از سال ۳۶۵ روزی نباشد، چقدر است؟**

✍ **حل:**

نفر اول ۳٦۵ روز برای انتخاب دارد. نفر دوم ۳٦٤ و ...

$$P(A)=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times...(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

☜ **مثال: از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟**

✍ **حل:**

باید دو نفر ریاضی باشند و حتماً نفر سوم تجربی و در غیر این صورت ممکن است سه نفر ریاضی شوند.

$$P=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۱۰\times۳}{\frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲}}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

مثال: در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱,۲,۳,۴,۵ قرار دارند. دو مهره باهم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عدد فرد است؟

حل:

برای آن‌که مجموع شماره‌ها فرد باشد. باید یکی زوج و دیگری فرد باشد.

$$P=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

احتمال غیر هم شانس (غیرمتساوی‌الاحتمال) در فضای گسسته:

در حالت کلی (حالتی که پیشامدها دارای شانس اتفاق افتادن برابر نباشند) فرض کنید فضای نمونه‌ای ما $S=\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ شامل n عضو باشد. به هر پیشامد ساده‌ی $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $p(\{e_k\})$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است، نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد:

الف) $۰\le p(\{e_k\})\le ۱$ ب) $\sum_{i=۱}^{n}P(\{e_i\})=۱$

اعداد $p(\{e_۱\}),p(\{e_۲\}),...,p(\{e_n\})$ را که در شرایط بالا صدق می‌کنند، **تخصیص احتمال مقبول** می‌گویند و اگر دو شرط بالا صادق نباشد، **تخصیص احتمال مجاز نیست.**

مثال: سه شناگر A و B و C با هم مسابقه می‌دهند. A و B دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هرکدام از آن‌ها دو برابر C است. احتمال آن‌که B یا C ببرد کدام است؟

حل:

$$P(A)=P(B)=۲P(C)\rightarrow P(A)+P(B)+P(C)=۱\rightarrow ۲P(C)+۲P(C)+P(C)=۱\rightarrow ۵P(C)=۱\rightarrow P(C)=\frac{۱}{۵}$$

$$\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}\rightarrow P(B\cup C)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

مثال: احتمال رو شدن هر وجه از یک تاس غیرهمگن، متناسب با تعداد خال‌هایی است که روی آن حک شده است. احتمال آن‌که در یک بار پرتاب آن، عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

حل:

$$\frac{P(۱)}{۱}=\frac{P(۲)}{۲}=\frac{P(۳)}{۳}=\frac{P(۴)}{۴}=\frac{P(۵)}{۵}=\frac{P(۶)}{۶}=k\rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\rightarrow$$

$$k+۲k+۳k+۴k+۵k+۶k=۱\rightarrow k=\frac{۱}{۲۱}\rightarrow P(۲\cup ۳\cup ۵)=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}+\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

احتمال در فضای پیوسته: (ناشمارا نامتناهی)

وقتی فضای نمونه ناشمارا نامتناهی باشد، تخصیص احتمال به همه‌ی برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها، احتمالی که به هریک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آن‌ها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد.

واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه‌ای یا پیشامد میسر نیست ولی آن‌چه می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد، «اندازه‌ی» طول بازه‌ها، مساحت سطوح و حجم شکل‌های فضایی است. در این حالت نسبت اندازه‌ی فضای پیشامد به اندازه‌ی فضای نمونه‌ای احتمال وقوع پیشامد را مشخص می‌کند.

$$P(A)=\frac{\text{طول}\ A}{\text{طول}\ S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}$$

$$P(A)=\frac{\text{مساحت}\ A}{\text{مساحت}\ S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}^{۲}$$

$$P(A)=\frac{\text{حجم}\ A}{\text{حجم}\ S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}^{۳}$$

☜ **مثال: اگر زاویه‌ی α را به تصادف در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ انتخاب کنیم. احتمال آن‌که $\sin\alpha < \cos\alpha$ باشد، چقدر است؟**

✍ **حل:**

چون در بازه $\left[۰,\frac{\pi}{۴}\right]$: $\sin\alpha<\cos\alpha$ است پس: $P(A)=\frac{L_A}{L_S}=\frac{\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۴}$

☜ **مثال: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ زاویه‌ی $\hat{A}=۴۵^\circ$ و زاویه‌های B و C به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ منفرجه الزاویه باشد، چقدر است؟**

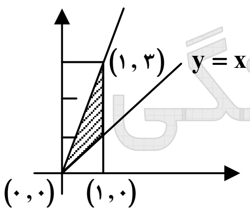
✍ **حل:** $A=۴۵^\circ \to B+C=۱۳۵^\circ$

اگر B را متغیر فرض کنیم ۲ حالت امکان‌پذیر است:

$$\left.\begin{array}{l}۱۳۵\ge B>۹۰^\circ\\ ۴۵\ge B>۰\to C>۹۰^\circ\end{array}\right\}\to P(A)=\frac{۴۵+۴۵}{۱۳۵}=\frac{۲}{۳}$$

☜ **مثال: نقطه‌ی (x,y) را به تصادف از درون مثلثی به رئوس $(۰,۰),(۱,۰),(۱,۳)$ انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد که $y>x$ باشد؟**

✍ **حل:**

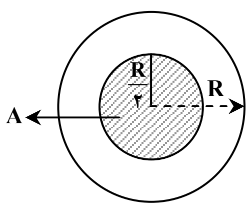


$$P(A)=\frac{\frac{۳\times۱}{۲}-\frac{۱\times۱}{۲}}{\frac{۳\times۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

☜ **مثال: دایره‌ای را در نظر می‌گیریم، نقطه‌ای به طور تصادفی بر روی سطح آن انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این نقطه به مرکز آن نزدیک‌تر تا محیط دایره باشد، کدام است؟**

✍ **حل:**

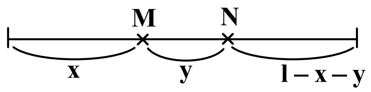
چون نقطه بر روی سطح انتخاب شده است، لذا با خطی فرض کردن تغییرات سطح در واقع مطلوب است نقطه به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد تا به محیط دایره، یعنی مطلوب است نقطه داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ قرار داشته باشد.



$$P=\frac{\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}}{\pi R^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

مثال: بر روی پاره خط AB دو نقطه‌ی N,M به تصادف در نظر گرفته می‌شوند احتمال آن که با سه پاره خط حاصل بتوان مثلثی ساخت کدام است؟

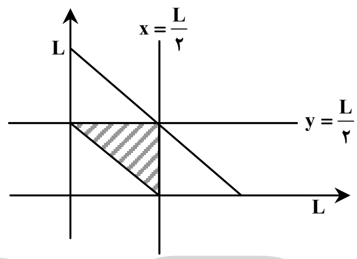
حل:



فضای نمونه $x > 0$ و y هایی است که: $x + y < L$

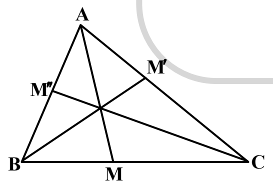
فضای مطلوب: (باید قطعات ایجاد شده روی پاره‌خط تشکیل مثلث دهند.)

$$\left.\begin{array}{l} L-(x+y) < x+y \to \frac{L}{2} < x+y \\ x < y+(L-x-y) \to x < \frac{L}{2} \\ y < x+(L-x-y) \to y < \frac{L}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$



مثال: نقطه‌ی (x,y) درون مثلثی با ۳ رأس $(0,0),(4,0),(3,3)$ به تصادف انتخاب می‌شود، با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه‌های مثلث قرار می‌گیرد.

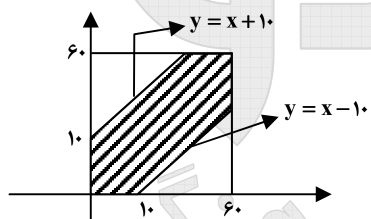
حل:



احتمال وقوع پیشامدی با بعدی کم‌تر از فضای نمونه برابر صفر است. این پیشامدها را تقریباً غیرممکن می‌نامند.

مثال: دو نفر قرار گذاشتند بین ساعت ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند. هر کدام زودتر رسیدند ۱۰ دقیقه منتظر دیگری می‌ماند وگرنه کار خود را شروع می‌کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع یکدیگر را ملاقات کنند؟

حل:



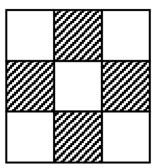
اگر زمان رسیدن نفر اول را x و نفر دوم را y فرض کنیم (نسبت به ساعت ۷)، می‌خواهیم فاصله‌ی دو نفر کم‌تر از ۱۰ دقیقه باشد پس $|x - y| < 10$ لذا:

$$-10 < x - y < 10 \to x - 10 < y < x + 10$$

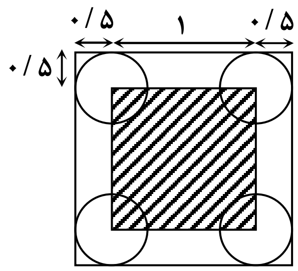
پس فضای مطلوب قسمت هاشور خورده است:

$$P(A) = \frac{60 \times 60 - 2 \times \frac{50 \times 50}{2}}{60 \times 60} = 1 - \left(\frac{50}{60}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

مثال: یک سکه به شعاع ۰/۵ بر روی ضلع شطرنجی مقابل که هر ضلع آن $6cm$ است، پرتاب نموده‌ایم. احتمال آنکه سکه کاملاً درون مربع‌های سفید قرار بگیرد، کدام است؟



حل:

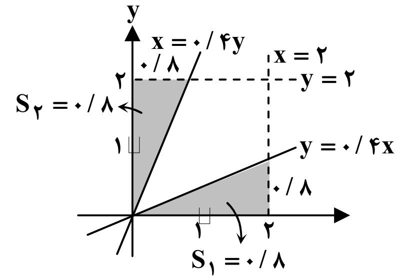


ملاک قرار گرفتن سکه روی صفحه مرکز سکه می‌باشد، اما در مورد فضای مطلوب باید کل سکه داخل ناحیه سفید باشد.لذا مکان مرکز سکه به صورت هاشورخورده مقابل مطلوب است.

$$P(A) = \frac{5 \times 1 \times 1}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$$

مثال: دو عدد به تصادف بین صفر و ۲ انتخاب می‌شوند. با کدام احتمال نسبت این دو عدد کم‌تر از ۰/٤ است؟

حل:



$$\frac{x}{y}<0/4 \xrightarrow{y>0} x<0/4y$$

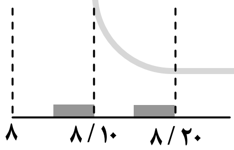
$$\frac{y}{x}<0/4 \xrightarrow{y>0} y<0/4x$$

$$\begin{cases} y=0/4x \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow y=0/8 \Rightarrow P(A)=\frac{0/8+0/8}{2^2}=\frac{1/6}{4}=0/4$$

مثال: در یک تابلو نمایش‌گر، تصویر مورد نظر از ساعت ۷ هر ۱۰ دقیقه یک بار، متناوباً لحظه‌ای نمایان می‌شود. اگر فردی بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ مقابل این تابلو قرار گیرد، با کدام احتمال برای رؤیت این تصویر کم‌تر از ٤ دقیقه معطل می‌شود؟

حل:

این فرد یا باید در بازه ۸/۰٦ تا ۸/۱۰ یا در بازه‌ی ۸/۱٦ تا ۸/۲۰ وارد شود.

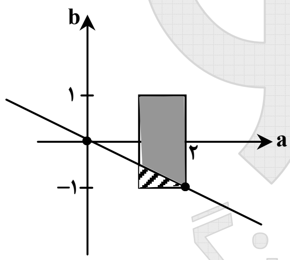


$$P=\frac{4+4}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

مثال: در معادله‌ی $ax+b=0$، ضریب a به طور تصادفی از بازه‌ی $[1,2]$ و ضریب b به تصادف از بازه‌ی $[-1,1]$ انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که جواب معادله کم‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد، کدام است؟

حل:

$$x=-\frac{b}{a}<\frac{1}{2} \Rightarrow -b<\frac{a}{2}$$



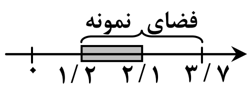
اگر b را y و a را x در نظر بگیریم $y>-\frac{x}{2}$ را رسم می کنیم که بالای خط مورد نظر است. حال کافی است سطح مطلوب را بر سطح کل تقسیم کنیم.

$$P=\frac{2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

مثال: زمان تصادفی که یک حیوان نسبت به داروی خاصی عکس‌العمل نشان دهد، بین ۱/۲ و ۳/۷ دقیقه است. با کدام احتمال، عکس‌العمل این حیوان نسبت به این دارو، کم‌تر از ۲/۱ دقیقه است؟

حل:

اگر بازه‌ی زمانی برای نشان دادن عکس‌العمل را روی محور اعداد حقیقی رسم کنیم، به‌صورت مقابل است:



یعنی طول پیشامد فضای نمونه ۲/۵ دقیقه است، حال آن‌که پیشامد مطلوب این است که زمان عکس‌العمل کم‌تر از ۲/۱ دقیقه باشد، یعنی طول فضای مطلوب ۰/۹ دقیقه است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{0/9}{2/5}=0/36$$

قوانین احتمال:

۱) برای تمام پیشامدها: $۰ \le P(A) \le ۱$ و (پیشامد حتمی (مطمئن)) $P(S) = ۱$ و (پیشامد ناممکن (نشدنی)) $P(\phi) = ۰$

۲) قانون جمع احتمال‌ها: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A \cap B) = ۰$ و لذا: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۳) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

۴) $P(A') = ۱ - P(A)$

۵) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۶) $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = ۲P(A \cup B) - P(A) - P(B)$

۷) $P(A' \cap B') = P\left((A \cup B)'\right) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

مثال: احتمال این‌که شخصی در امتحان ریاضی قبول شود برابر $\frac{۲}{۳}$ و احتمال این‌که در امتحان فیزیک قبول شود برابر $\frac{۱}{۴}$ و احتمال این‌که در هر دو درس قبول شود برابر $\frac{۱}{۶}$ است. احتمال این‌که در هیچ یک از دو امتحان قبول نشود، چقدر است؟

حل:

$$P(ر' \cap ف') = ۱ - P(ر) - P(ف) + P(ر \cap ف) = ۱ - \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

مثال: احتمال این که از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل تولد دو نفرشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد چقدر است؟

حل:

$$P(A) = ۱ - P(\text{هیچ ۲ تایی مثل هم نباشند}) = ۱ - \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۷ \times ۷ \times ۷} = \frac{۱۹}{۴۹}$$

مثال: از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است و بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست؟

حل:

تعداد اعداد بخش پذیر بر هفت $\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right] = ۴۲$

تعداد اعداد بخشپذیر بر هفت و یازده $\left[\frac{۳۰۰}{[۷, ۱۱]}\right] = \left[\frac{۳۰۰}{۷۷}\right] = ۳$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ و بخش‌ناپذیر بر ۱۱ $= ۴۲ - ۳ = ۳۹$

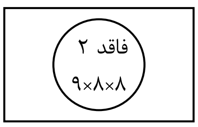
$$\Rightarrow P(A) = \frac{۳۹}{۳۰۰} = ۰/۱۳$$

مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

حل:

تعداد اعداد ۳ رقمی $= n(S) = \boxed{۹}\boxed{۱۰}\boxed{۱۰} = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$

تعداد اعداد ۳ رقمی فاقد ۲ $= n(A') = \underbrace{\boxed{۸}}_{\text{به جز ۰ و ۲}}\underbrace{\boxed{۹}}_{\text{به جز ۲}}\underbrace{\boxed{۹}}_{\text{به جز ۲}} = ۸ \times ۹ \times ۹$



$n(s) = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰$

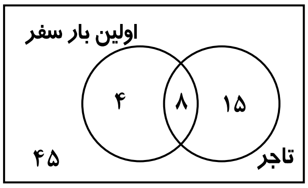
$$\Rightarrow P(A) = \frac{۹ \times ۱۰ \times ۱۰ - ۸ \times ۹ \times ۹}{۹ \times ۱۰ \times ۱۰} = ۱ - \frac{۸ \times ۹ \times \cancel{۹}}{\cancel{۹} \times ۱۰ \times ۱۰} = ۱ - ۰/۷۲ = ۰/۲۸$$

مثال: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟

حل:

۲۳ تاجر:
- ۸ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند.
- ۱۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

۴۹ نفر تاجر نیستند:
- ٤ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند
- ٤٥ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند



$$P = \frac{۴۵}{۷۲} = \frac{۵}{۸}$$

مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه و ٤ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلبوست احتمال آن‌که هر سه مهره دارای یک رنگ نباشند؟ (مثلاً هر سه قرمز نباشند)

حل:

$$۱-\left(\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}\right)=\frac{۱۹}{۲۰}$$

استقلال دو پیشامد:

اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در رخداد پیشامد A مؤثر نباشد، A را مستقل از B می‌گوییم، که در این‌صورت: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. اگر تساوی اخیر هم برقرار باشد، دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. (این قضیه به چند پیشامد نیز قابل تعمیم است.)

مثال: در کیسه‌ای ٤ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم، چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی و دومی سبز و سومی آبی باشد؟

حل: به‌دلیل استقلال پیشامدها، احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

قسمت اول: $\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱۶}{۲۴۳}$

قسمت دوم: $\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۱۴}$

مثال: در یک خانواده‌ی سه فرزندی، با انتخاب یکی از فرزندان، مشاهده شده آن فرزند پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر است؟

حل: چون دو فرزند باقی‌مانده مستقل از فرزند انتخاب شده می‌باشند، لذا احتمال آن‌که هر دو فرزند دختر باشند، عبارت است از:

$$P(A) = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{اولی دختر}}\times\overbrace{\frac{۱}{۲}}^{\text{دومی دختر}}$$

احتمال دو جمله‌ای:

آزمایش‌های دو حالته را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ی هر امتحان دو برآمد دارد.

اگر احتمال پیروزی در یک آزمایش دوحالته p و شکست $q=1-p$ باشد، احتمال آن‌که در N بار تکرار این آزمایش x بار پیروز شویم برابر است با: $\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$

در حالت خاص $p=q=\frac{1}{2}$ فرمول به صورت: $\binom{N}{x}(\frac{1}{2})^N$ درمی‌آید. (مانند پرتاب متوالی سکه یا بچه‌های متوالی یک خانواده)

☜ **مثال: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال این‌که این خانواده حداکثر ٤ دختر داشته باشد، کدام است؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{حداکثر ٤ دختر})=1-P(\text{۵ دختر})=1-\binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5=\frac{31}{32}$$

☜ **مثال: یک سکه را حداقل چند بار باید پرتاب کنیم تا احتمال آمدن اقلا یک شیر بیش از ۹۹ ٪ باشد؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{اقلاً یک شیر})=1-P(\text{اصلاً شیر نیاید})=1-\binom{n}{0}(\frac{1}{2})^n>\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}\rightarrow(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{100}\rightarrow n\geq 7$$ حداقل ۷ بار

☜ **مثال: سکه‌ای را آن قدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. احتمال آن که در دهمین پرتاب به این منظور برسیم کدام است؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{در دهمین پرتاب})=\underbrace{\binom{9}{2}(\frac{1}{2})^9}_{\text{در ۹ بار اول، ۲ بار رو بیاید}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{بار دهم رو بیاید}}=\binom{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{36}{2^{10}}=\frac{9}{2^8}=\frac{9}{256}$$

☜ **مثال: هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند. با کدام احتمال از ٤ کالای خریداری شده‌ی این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟**

✍ **حل:**

تذکر $\rightarrow P(\text{مرغوب})=\frac{75}{100}\Rightarrow P(\text{خراب})=\frac{25}{100}$

$$P(\text{لااقل یک کالا از ٤ کالا مرغوب})=1-P(\text{همه کالاها خراب})$$

$$=1-\binom{4}{4}(\frac{25}{100})^4(1-\frac{25}{100})^{4-4}=1-(\frac{1}{4})^4\times1=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

☜ **مثال: در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟**

✍ **حل:**

با توجه به این‌که احتمال متولد شدن دختر برابر احتمال متولد شدن پسر و برابر $P=\frac{1}{2}$ است لذا طبق توزیع احتمال دوجمله‌ای داریم:

$$P(\text{دقیقاً } k \text{ بار رخ داد پیشامد} A \text{ در } n \text{ آزمایش})=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل ۲ دختر از ۵ نوزاد})=1-(P(\text{هیچ دختر})+P(\text{یک دختر}))=1-\left(\frac{\binom{5}{0}}{2^5}+\frac{\binom{5}{1}}{2^5}\right)=1-(\frac{1}{32}+\frac{5}{32})=1-\frac{6}{32}=\frac{13}{16}$$