۱

آنالیز برداری

۱ـ۱ خواص بردارها و دستگاه مختصات

اعداد معمولی را نرده‌ای می‌نامند که ممکن است حقیقی یا مختلط باشند. در مقابل نرده‌ایها کمیتهای دیگری به نام بردارها داریم. روش ترکیب این کمیتها غیر از نرده‌ایهاست. در فیزیک برای نمایش کمیتهایی که دارای اندازه و جهت هستند از بردار استفاده می‌کنیم. نمونه‌ای از این کمیتها جابه‌جایی است. به بیان ریاضی بردارها کمیتهایی هستند که رفتار و ترکیب آنها بر طبق دستورهای زیر است:

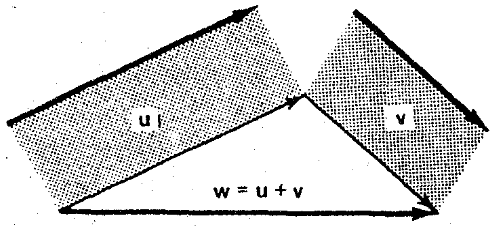
۱. جمع دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردار دیگری است: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$. جمع یک عمل جابه‌جایی دوتایی است یعنی $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

۲. قانون شرکت‌پذیری برای جمع برقرار است یعنی برای بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$، و $\mathbf{w}$ داریم:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$$

۳. می‌توان هر بردار را برای به‌دست‌آوردن بردار دیگری در یک عدد ضرب کرد.

به روش هندسی، بردارها را به شکل یک پاره‌خط جهت‌دار (یعنی پیکان) نشان خواهیم داد. اندازهٔ بردار متناسب با طول پاره‌خط و جهت بردار همان جهت پیکان ــ یعنی جهتی که به آن اشاره دارد، است. قواعدی که جمع هندسی بردارها از آن تبعیت می‌کنند بدین قرارند (شکل ۱ـ۱ را ببینید): روی نمودار بردار جابه‌جایی $\mathbf{u}$ به مقیاس معینی را رسم کرده‌ایم؛ آنگاه بردار $\mathbf{v}$ را از انتهای $\mathbf{u}$ رسم می‌کنیم. حالا



شکل ۱ـ۱ تعریف هندسی جمع دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

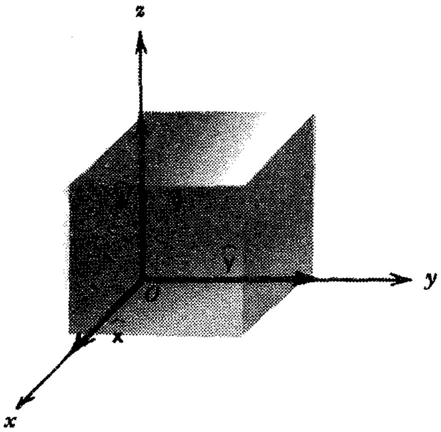
خطی از ابتدای $\mathbf{u}$ به انتهای $\mathbf{v}$ می‌کشیم که نشان‌دهنده جمع برداری $\mathbf{w}$ است. این جابه‌جایی از نظر اندازه و جهت معادل جابه‌جاییهای پشت سرهم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است. این روش قابل تعمیم به جمع هر تعداد جابه‌جاییهای پشت سرهم است.

۱ـ۱ـ۱ بردارهای پایه و دستگاه مختصات

انتخاب یک دستگاه مختصات در فضا، اساساً هم‌ارز یک مجموعه بردار پایه است. اگر یک دستگاه عمود برهم انتخاب کنیم (شکل ۱ـ۲) بردارهای پایه در امتداد سه راستای ثابت دوبه‌دو عمود برهم x، y، و z انتخاب می‌شوند. هرگاه بردار را با یک پیکان نمایش دهیم، تصاویر عمودی آن روی سه محور را مؤلفه‌های متعامد (دکارتی) بردار در این جهتها می‌نامیم. برحسب این مؤلفه‌ها اندازه بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\text{اندازهٔ بردار } \mathbf{A} \equiv |\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{A}}$ برداری است که اگر در اندازهٔ آن $|\mathbf{A}|$ ضرب شود



شکل ۱ـ۲ تعریف دستگاه مختصات متعامد به همراه نمایش بردارهای یکه.

بردار $\mathbf{A}$ نتیجه می‌شود، یعنی $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{A}}$. (بردار یکه ابزاری است برای نشان دادن جهت.) بردارهای یکه در طول محورهای مختصات متعامد x، y، و z را به ترتیب با $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$، و $\hat{\mathbf{z}}$ مشخص می‌کنیم. این بردارها یک مجموعه مناسب و اساسی از بردارهای پایه هستند. به کمک بردارهای یکه دکارتی، هر بردار $\mathbf{A}$ را با

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱\text{ـ}۱)$$

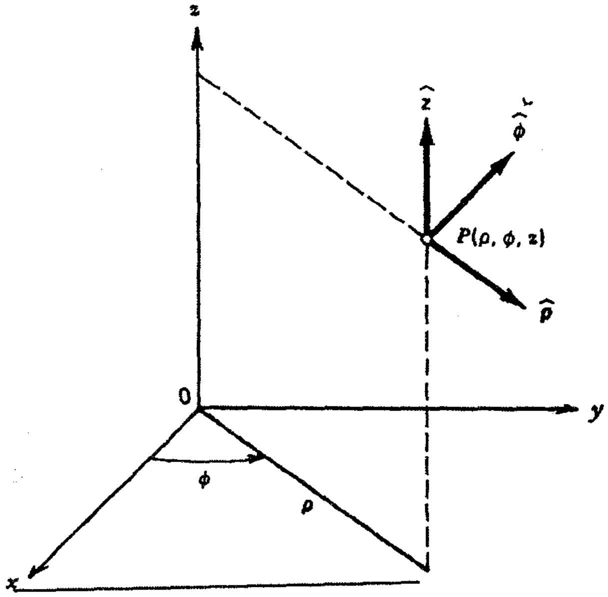
نمایش می‌دهیم که A_x، A_y، و A_z به‌ترتیب مؤلفه‌های بردار $\mathbf{A}$ در جهتهای $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ هستند.

توجه خود را به مواردی که بردارهای پایه یک مجموعه متعامد هستند محدود می‌کنیم. افزون بر این اندازهٔ هر بردار پایه واحد در نظر گرفته می‌شود (متعامد بهنجار). معمولترین بردارهای پایهٔ مورد استفاده در فضای سه‌بعدی بردارهای پایهٔ یکه ($\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$، $\hat{\mathbf{z}}$) هستند. این بردارها را ثابت فرض می‌کنیم. نه اندازه و نه جهت آنها در فضا به محل قرارگرفتن آنها نسبت به یک نقطهٔ مرجع در فضا وابسته نیست. ثابت بودن این مجموعه بردارهای پایهٔ متعامد بهنجار است که موجب تأکید ما بر کلمهٔ دکارتی می‌شود.

نمایش بردارها به کمک بردارهای یکه در محاسبات برداری خیلی مفید است. مثلاً برای جمع $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}$ به‌سادگی مؤلفه‌های دکارتی آنها را جمع می‌کنیم:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}$$

اغلب مناسب است مجموعه‌های دیگری از بردارهای پایه که راستای آنها به محل استقرارشان وابسته است (بردارهای پایهٔ خمیده خط) را به‌کار گیریم. مثلاً دستگاه مختصات کروی و دستگاه مختصات



شکل ۱ـ۳ تعریف دستگاه و مختصات استوانه‌ای، به همراه بردارهای یکه مربوطه.

استوانه‌ای را تعریف می‌کنیم و اغلب آنها را به‌کار می‌بریم. برای هر یک از این دستگاهها، یک مجموعه بردارهای پایه متعامد بهنجار که وابسته به محل استقرار آنها در فضاست پیدا خواهیم کرد.

یادآور می‌شویم که بردار یکه دکارتی $\hat{\mathbf{x}}$ را می‌توان به‌عنوان بردار یکه‌ای که بر هر صفحهٔ $x = \text{const.}$ عمود است تعریف کرد. همچنین بردارهای یکهٔ $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ را به‌ترتیب به صفحه‌های $y = \text{const.}$ و $z = \text{const.}$ مربوط می‌کنیم. اکنون سطوح دیگری یافت می‌شوند که متغیر هندسی دیگری برای آنها ثابت است. اگر بتوان سه سطح، که با سه متغیر هندسی تعریف می‌شوند، پیدا کرد که در یک نقطه برهم عمود باشند، آنگاه می‌توان در آن نقطه سه بردار عمود برهم متقابل چنان تعریف کرد که بر آن سطوح عمود باشند. در توصیف دستگاههای استوانه‌ای و کروی دو مثال مفید را بیان می‌کنیم. (البته مثالهای زیادی وجود دارند.)

در دستگاه مختصات استوانه‌ای (شکل ۱ـ۳) مجموعه‌ای از بردارهای پایه در هر نقطه را با در نظر گرفتن سه سطح، که دو تای آنها مسطح و دیگری استوانه‌ای است، تعریف می‌کنیم. سطوح با روابط زیر مشخص می‌شوند

الف) $z = \text{const.}$

ب) $\rho = \sqrt{x^{2} + y^{2}} = \text{const.}$

ج) $\phi = \tan^{-1}(y/x) = \text{const.}$

در معادلهٔ (الف) مختصهٔ z یک دسته از صفحات موازی را مشخص می‌کند. این مختصه نسبت به صفحهٔ مرجع $z = 0$ تعریف می‌شود. آن‌گاه بردار یکهٔ $\hat{z}$ بردار ثابتی در جهت (مثبت) محور z (که ممکن است

به دلخواه انتخاب شود) عمود بر صفحات $z = \text{const.}$ است. محور z یک خط جهت‌دار در راستای z $(-\infty < z < \infty)$ انتخاب می‌شود.

در معادلهٔ (ب) مختصهٔ ρ نسبت به محور z با دسته‌ای از سطوح دایره‌ای استوانه‌ای که صفحات $z = \text{const.}$ را به‌طور عمودی قطع می‌کنند تعریف می‌شود. فاصلهٔ ρ هر سطح معین تا محور z، عبارت است از شعاع سطح استوانه‌ای. بردار یکه $\hat{\rho}$ عمود بر سطح استوانه‌ای و در جهت دور شدن از محور z است. راستای آن به نقطهٔ واقع بر دایرهٔ (محل تقاطع صفحه $z = \text{const.}$ با استوانه $\rho = \text{const.}$) مورد نظر بستگی دارد. به این ترتیب، در شکل ۱ـ۳، $\hat{\rho}$ تابعی از متغیر ϕ است که در معادلهٔ (ج) (برای $\rho > 0$) تعریف کردیم.

در معادلهٔ (ج) تنها سطوحی که صفحات تعریف‌شده قبلی را در تمام نقاط به‌طور قائم قطع می‌کنند شامل محور zاند. یکی از این صفحات، صفحهٔ $\phi = 0$ است که اختیاری انتخاب می‌شود. بردارهای یکه $\hat{\phi}$ بر سطوح $\phi = \text{const.}$ عمود بوده و به زاویهٔ ϕ صفحه نسبت به صفحهٔ مرجع $\phi = 0$ بستگی دارند.

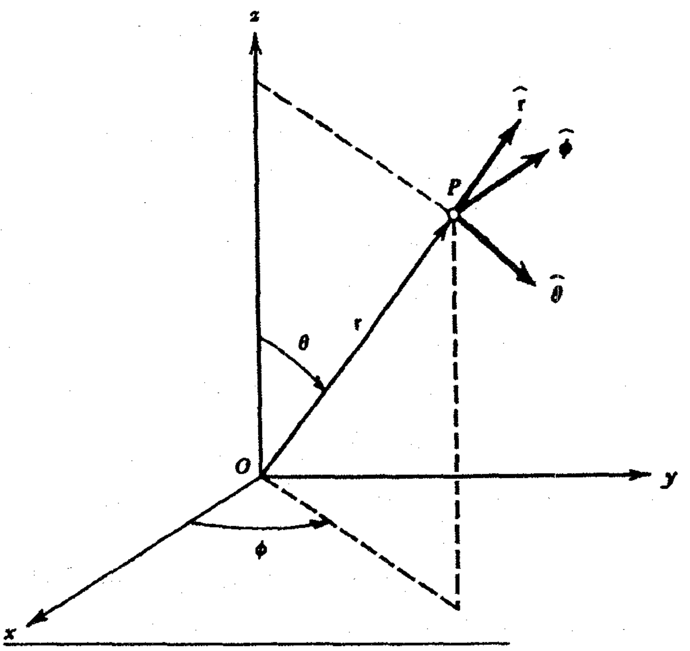
محل تقاطع سطوحی که با روابط (الف)، (ب)، و (ج) توصیف شد، درست مانند محل تقاطع صفحات در مختصات متعامد نقاطی در فضا هستند. با وجود این بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای تنها با مشخص شدن یک نقطه (نه روی محور z) معین می‌شوند. (مبدأ با قراردادن $z = 0$ و $\rho = 0$ مشخص می‌شود). پس از مشخص‌کردن نقطه‌ای با (ρ, ϕ, z) یا (x, y, z)، هر بردار در آن نقطه را می‌توان به کمک بردارهای یکه $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\rho}, \hat{\phi})$ بیان کرد.

به‌سادگی می‌توان ارتباط بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای با بردارهای یکه در دستگاه متعامد را با روابط زیر نشان داد

$$\hat{\rho} = \hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\phi \quad \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \tag{۱ـ۲}$$

یادآوری می‌کنیم که $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ به مختصهٔ ϕ بستگی دارند. بنابراین هر بردار $\mathbf{A}$ را در نقطه‌ای که بردارهای یکه آن $\hat{\mathbf{z}}$، $\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ هستند به‌صورت $\mathbf{A} \equiv A_z\hat{\mathbf{z}} + A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi}$ می‌نویسیم. زیرا $\{\hat{\mathbf{z}}, \hat{\rho}, \hat{\phi}\}$ یک مجموعه متعامد بهنجار است. اگر $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ یک میدان نقطه‌ای برداری باشد، بردارهای سه‌گانه پایه که برای بیان $\mathbf{A}$ استفاده می‌شود بردارهایی خواهند بود که در محل $\mathbf{r}$ تعریف می‌شوند. توجه کنید که جابه‌جایی $\mathbf{r}$ که نقطهٔ (z, ρ, ϕ) را مشخص می‌کند با رابطه $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$ بیان می‌شود.

دستگاه مختصات کروی (شکل ۱ـ۴) را به تفصیل دستگاه استوانه‌ای بررسی نمی‌کنیم بلکه فقط سطوح ثابت انتخاب‌شده را به‌صورت زیر



شکل ۱ـ۴ تعریف دستگاه مختصات کروی، به همراه بردارهای یکه مربوط.

معرفی می‌کنیم:

الف) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const.}$ که کره‌ای با شعاع r به مرکز مبدأ را توصیف می‌کند.

ب) $\theta = \cos^{-1}(z/r) = \text{const.}$ که مخروطی قائم با زاویه رأس θ را نشان می‌دهد.

ج) $\phi = \tan^{-1}(y/x) = \text{const.}$ که یک صفحهٔ دربرگیرندهٔ محور مخروط (ب) را توصیف می‌کند.

بردارهای یکه عمود بر این سطوح را به‌ترتیب با $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ مشخص می‌کنیم که یک مجموعه متعامد بهنجار را در نقطه‌ای (نه در مبدأ و نه روی محور z) که محل تقاطع سه سطح عمود برهم فوق است، تشکیل می‌دهند. این بردارهای یکه با روابط زیر به بردارهای یکه متعامد مربوط‌اند

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi \end{aligned} \tag{۱ـ۳}$$

اگر $\mathbf{A}$ عضوی از یک میدان برداری، $\mathbf{A}(\mathbf{r})$، باشد آن‌گاه در هر نقطه که با بردار $\mathbf{r}$ مشخص می‌شود می‌توان $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ را برحسب بردارهای پایه مربوط به آن نقطه به شکل $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}$ نشان داد که A_r تصویر $\mathbf{A}$ روی $\hat{\mathbf{r}}$ و ... است. بردار جابه‌جایی نقطهٔ (r, θ, ϕ) با $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ بیان می‌شود.

۱ـ۱ـ۲ ضرب نرده‌ای (ضرب نقطه‌ای)

یکی از مفاهیم مهم در جبر بردارها ضرب نرده‌ای دو بردار است که آن را با $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نمایش می‌دهیم و به نامهای ضرب نقطه‌ای یا ضرب داخلی نیز می‌خوانیم. ضرب نقطه‌ای به شکل $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha$ تعریف می‌شود که $|\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{B}|$ اندازه‌های دو بردار و α زاویهٔ بین آنهاست. به‌سادگی می‌توان خواص زیر را برای ضرب نرده‌ای به‌دست آورد: دو بردار که حاصلضرب نرده‌ای آنها صفر است برهم عمودند؛ یعنی اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$، $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است. بردارهای یکه $\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{y}}$، و $\hat{\mathbf{z}}$ در دستگاه دکارتی، یک مجموعه متعامد بهنجار از بردارهای پایه تشکیل می‌دهند زیرا دوبه‌دو برهم عمودند و اندازهٔ هر یک واحد است.

۱ـ۱ـ۳ ضرب برداری (ضرب خارجی)

دیدیم که می‌توان به هر زوج بردار یک مقدار نرده‌ای نسبت داد. عملی را که به آن منجر می‌شود ضرب داخلی نامیدیم. اکنون می‌خواهیم به هر جفت بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک کمیت برداری نسبت دهیم و بنابراین چیزی را تعریف کنیم که آن را ضرب برداری (یا ضرب خارجی) می‌نامیم. این ضرب به شکل $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ مشخص می‌شود. راستای بردار حاصلضرب را عمود بر صفحهٔ دربرگیرندهٔ دو بردار می‌گیریم. اندازهٔ آن برابر با سطح متوازی‌الاضلاعی است که اضلاعش دو بردار باشند. بنابراین اگر $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر صفحه دربرگیرندهٔ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد آن‌گاه حاصلضرب برداری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

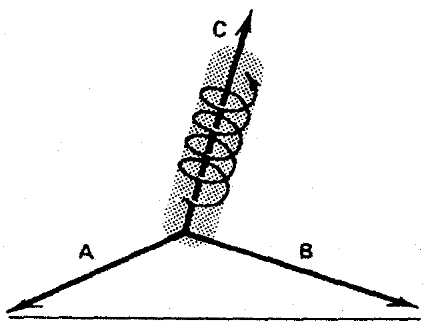
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\equiv|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\alpha\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (۱ـ۴)$$

تعریف بالا هنوز مبهم است زیرا عمود بر صفحهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ممکن است جهتش به طرف "بالا" یا "پایین" باشد. برای مشخص‌کردن جهت $\hat{\mathbf{n}}$ قرار دارد پیچ راستگرد را به‌کار می‌بریم. اگر $\mathbf{A}$ به طرف $\mathbf{B}$ در جهت زاویه $\alpha\le 180°$ بچرخد آن‌گاه این چرخش همان چرخش پیچ راستگرد است که جهت $\hat{\mathbf{n}}$ را، که در جهت پیشرفت پیچ در اثر چرخش است، تعیین می‌کند. (شکل ۱ـ۵).

برحسب بردارهای یکه متعامد حاصلضرب برداری به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\hat{\mathbf{x}}[A_yB_z-A_zB_y]+\hat{\mathbf{y}}[A_zB_x-A_xB_z]$$
$$+\hat{\mathbf{z}}[A_xB_y-A_yB_x] \qquad (۱ـ۵)$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}, \quad \text{یک دترمینان} \qquad (۱ـ۶)$$



شکل ۱ـ۵ تعریف قرارداد پیچ راستگرد، که مفهوم ضرب خارجی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را دارد.

هر گاه سه بردار متعامد بهنجار $\hat{\mathbf{e}}_1$، $\hat{\mathbf{e}}_2$، و $\hat{\mathbf{e}}_3$ داشته باشیم می‌گوییم یک دستگاه راستگرد داریم اگر $\hat{\mathbf{e}}_i\times\hat{\mathbf{e}}_j=\hat{\mathbf{e}}_k$ که i و j و k به‌ترتیب (۱, ۲, ۳)، (۲, ۳, ۱)، یا (۳, ۱, ۲) هستند. پرانتزها جایگشت چرخه‌ای اعداد ۱ و ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که برای یک دستگاه راستگرد که با سه بردار $\{\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3\}$ داده شده‌اند می‌توان نوشت $\hat{\mathbf{e}}_1\cdot(\hat{\mathbf{e}}_2\times\hat{\mathbf{e}}_3)=1$. دستگاه مختصات متعامدی را که به‌کار بردیم یک دستگاه راستگرد است، اگر x را با ۱، y را با ۲ و z را با ۳ مشخص کنیم. یک دستگاه چپگرد تصویر آینه‌ای یک دستگاه راستگرد است.

دو اتحاد مفید زیر را باید به‌خاطر بسپاریم

۱. ضرب نرده‌ای سه‌گانه

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} \qquad (۱ـ۷)$$

(که حاصلضرب حجم متوازی‌السطوحی به ابعاد $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ است.)

۲. ضرب برداری سه‌گانه

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۱ـ۸)$$

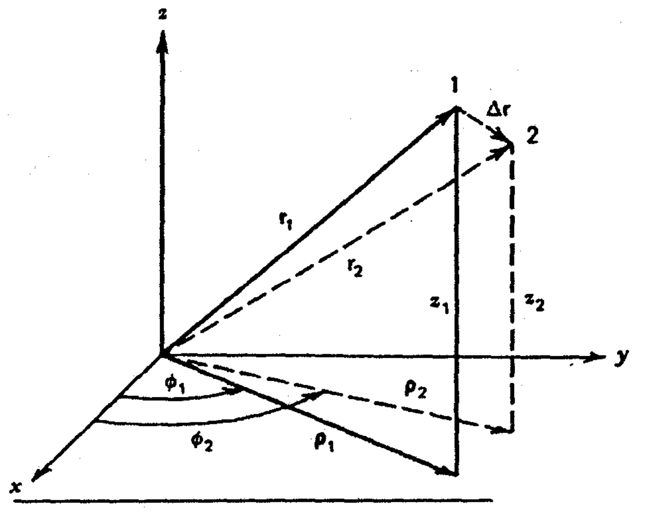
دومی را اغلب دستور بک‌کب می‌نامیم. توجه کنید که در معادلهٔ (۱ـ۷) می‌توان نقطه $(\cdot)$ و ضربدر $(\times)$ را، به‌طوری که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ به‌ترتیب چرخه‌ای بمانند، با یکدیگر جابه‌جا کرد.

۱ـ۲ جزءهای جابه‌جایی، سطح، و حجم؛ زاویهٔ فضایی

۱ـ۲ـ۱ جزء جابه‌جایی

دو نقطهٔ (x,y,z) و $(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ را در فضا در نظر می‌گیریم. نقطه دوم به اندازهٔ $\Delta\mathbf{r}$ نسبت به نقطهٔ اول جابه‌جا شده است. یعنی

$$\Delta\mathbf{r}\equiv\hat{\mathbf{x}}\Delta x+\hat{\mathbf{y}}\Delta y+\hat{\mathbf{z}}\Delta z \qquad (۱ـ۹)$$



شکل ۱ـ۶ مختصات دو نقطهٔ مجاور در دستگاه استوانه‌ای که برای تعریف جابه‌جایی جزئی در این دستگاه به‌کار رفته‌اند.

که آن را در دستگاه دکارتی بیان کرده‌ایم. نتیجتاً جزء جابه‌جایی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۰ـ۱)$$

اکنون می‌خواهیم $\Delta\mathbf{r}$ (یا $d\mathbf{r}$) را در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی به کمک بردارهای یکه مربوط بیان کنیم. دوباره فرض می‌کنیم $\Delta\mathbf{r}$ را می‌توانیم به‌طور دلخواه کوچک کنیم و در حد آن را $d\mathbf{r}$ بنامیم.

در شکل ۱ـ۶ دو نقطه به فاصلهٔ $\Delta\mathbf{r}$ از هم در نظر گرفته شده است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای پایه در نقاط ۱ و ۲ مختلف هستند. به این ترتیب

$$\Delta\mathbf{r} = \rho_2\hat{\rho}_2 + z_2\hat{\mathbf{z}}_2 - (\rho_1\hat{\rho}_1 + z_1\hat{\mathbf{z}}_1) \qquad (۱۱ـ۱)$$

که

$$\rho_2 \equiv \rho_1 + \Delta\rho \qquad \hat{\rho}_2 \equiv \hat{\rho}_1 + \Delta\hat{\rho} \qquad z_2 \equiv z_1 + \Delta z$$
$$\hat{\mathbf{z}}_2 = \hat{\mathbf{z}}_1 \equiv \hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۲ـ۱)$$

با قراردادن معادلهٔ (۱ـ۱۲) در معادلهٔ (۱ـ۱۱) و حذف حاصلضربهای دیفرانسیلها به‌دست می‌آوریم

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\rho\hat{\rho}_1 + \rho_1\Delta\hat{\rho} + \Delta z\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۳ـ۱)$$

اگر نقاط (۱) و (۲) به حد کافی به هم نزدیک باشند آن‌گاه با تقریب خوبی داریم

$$\Delta\hat{\rho} = \frac{d\hat{\rho}}{d\phi}\Delta\phi$$

برای $\Delta\rho$ به حد کافی کوچک، $(\hat{\phi}_1 \approx \hat{\phi}_2 \equiv \hat{\phi})$، می‌توان دید که $\Delta\rho = |\hat{\rho}_1|\Delta\phi\,\hat{\phi}$. در نتیجه معادلهٔ (۱ـ۱۲) می‌شود

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\rho\hat{\rho}_1 + \rho_1\Delta\hat{\phi}_1 + \Delta z\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۴ـ۱)$$

وقتی نقطهٔ (۲) به نقطه (۱) میل کند جابه‌جایی جزئی را می‌توان نوشت

$$d\mathbf{r} = dl_\rho\,\hat{\rho} + dl_{\hat{\phi}}\,\hat{\phi} + dl_z\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۵ـ۱)$$

که

$$dl_\rho = d\rho \qquad dl_\phi = \rho\,d\phi \qquad dl_z = dz \qquad (۱۶ـ۱)$$

جزء جابه‌جاییها به‌ترتیب در راستاهای ρ، ϕ، و z هستند. به این ترتیب

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۷ـ۱)$$

که $\{\rho, \phi, z\}$ در نقطه‌ای تعریف می‌شوند که جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ در آن انجام شده است. از دید هندسی این یک نتیجهٔ طبیعی است زیرا به حد کافی نزدیک به هر نقطهٔ (z, ϕ, ρ) فضا می‌توان یک دستگاه "شبه دکارتی" را طوری تعریف کرد که برحسب آن هر جزء طول مستقیماً بیان شود.

به جای به‌دست‌آوردن جزء جابه‌جایی در یک نقطه برحسب بردارهای یکهٔ کروی در آن نقطه، به‌سادگی می‌توان در هر نقطه بردارهای یکهٔ $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$ را برای ساختن یک دستگاه دکارتی محلی (نزدیک آن نقطه) به‌کار برد. از شکل ۱ـ۷ می‌بینیم که اجزای طول در امتداد سه راستای نزدیک این نقطه با

$$dl_r = dr \qquad dl_\theta = r\,d\theta \qquad dl_\phi = r\sin\theta\,d\phi \qquad (۱۸ـ۱)$$

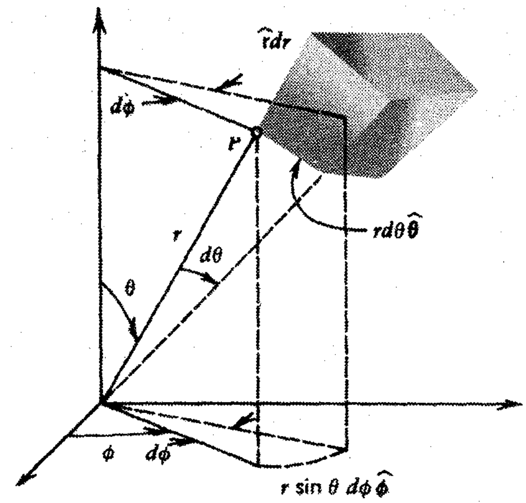
داده می‌شوند و داریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= dl_r\,\hat{\mathbf{r}} + dl_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dl_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \qquad (۱۹ـ۱)$$

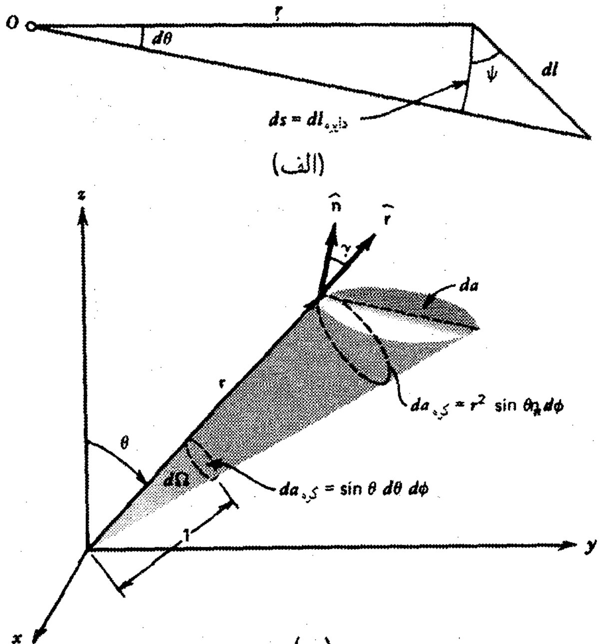
۱ـ۲ـ۲ جزء مساحت سطح

با مشخص‌شدن عبارات جزء جابه‌جایی در دستگاههای مختصات مختلف، اکنون اجزای سطح را تعیین می‌کنیم. سه جزء سطح برای هر دستگاه مختصات وجود دارد؛ اینها به شکل dl_1dl_2، dl_2dl_3، و dl_3dl_1 هستند. برای مختصات دکارتی داریم

$$dx\,dy \qquad dy\,dz \qquad dz\,dx \qquad (۲۰ـ۱)$$



شکل ۱ـ۷ جابه‌جایی جزئی در مختصات کروی.



شکل ۱ـ۸ تعریف زوایای مسطحه و فضایی. (الف) زاویهٔ مسطحه $d\theta$. (ب) زاویهٔ فضایی $d\Omega$.

که به‌ترتیب بر سطوح ثابت $z=$const.، $y=$const.، و $x=$const. منطبق‌اند. همچنین برای مختصات استوانه‌ای اجزای مساحت سطح روی سطوحی که مختصات را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از

$$dz\,d\rho \qquad \rho\,d\rho\,d\phi \qquad \rho\,d\phi\,dz \qquad (۱ـ۲۱)$$

و برای مختصات کروی داریم

$$r\,dr\,d\theta \qquad r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \qquad r\sin\theta\,d\phi\,dr \qquad (۱ـ۲۲)$$

به هر جزء سطح می‌توان یک راستا نسبت داد. این راستا، راستای عمود بر سطح است. اگر $dl_i\,dl_j$ جزء سطح باشد جهت عمود با ضرب خارجی $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j$ داده می‌شود و ممکن است آن را به‌شکل یک بردار $(\hat{\mathbf{e}}_i\,dl_i) \times (\hat{\mathbf{e}}_j\,dl_j) \equiv \hat{\mathbf{e}}_k\,dl_i\,dl_j$ مشخص کرد. اغلب جزء سطح را با روش ساده‌تری به شکل $d\mathbf{a} \equiv \hat{\mathbf{n}}\,da$ مشخص می‌کنیم که $\hat{\mathbf{n}}$ همواره در راستای عمود بر سطح است ولی جهت آن باید تعیین شود.

۱ـ۲ـ۳ زاویهٔ فضایی

وقتی جزء کمان ds یک دایره واقع در یک صفحه را نسبت به مرکزش در نظر گیریم مفهوم زاویهٔ مسطح $d\theta = ds/r$ را به‌کار می‌بریم که در آن r شعاع دایره است [شکل ۱ـ۸(الف)]. از طرف دیگر وقتی یک جزء سطح نسبت به یک مبدأ در نظر گرفته شود اغلب مناسب است که مفهوم زاویهٔ فضایی [شکل ۱ـ۸(ب)] را به‌کار بریم. جزء دیفرانسیلی $d\Omega$ زاویهٔ فضایی نسبت به مبدأ به روش زیر تعریف می‌شود

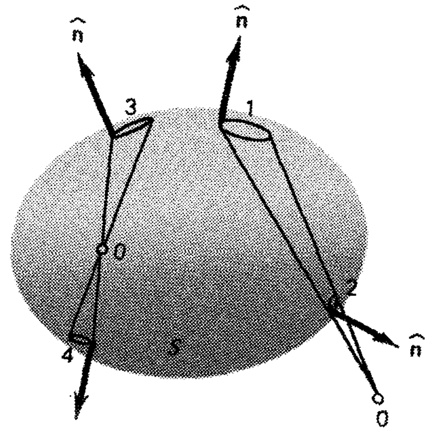
$$d\Omega \equiv \frac{d\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{da\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{da\cos\gamma}{r^2} \qquad (۱ـ۲۳)$$

در این مورد جزء سطح da در نقطه‌ای قرار دارد که نسبت به مبدأ به اندازهٔ بردار $\mathbf{r} \equiv \hat{\mathbf{r}}r$ جابه‌جا شده است. بنابراین γ زاویهٔ بین $\hat{\mathbf{n}}$ و $\hat{\mathbf{r}}$ است. چون $d\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}}$ همان جزء سطح کره‌ای به شعاع r است با قراردادن $da = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$، $d\Omega$ نیز با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$d\Omega = \frac{da_{\text{کره}}}{r^2} = \frac{r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\phi \qquad (۱ـ۲۴)$$

که جزء سطح یک کرهٔ واحد است.

از دید فیزیکی زاویهٔ فضایی "زاویه رأس" مخروطی است که سطح جانبی آن جزء سطح مورد نظر را قطع می‌کند. به این ترتیب درست مثل جزء زاویهٔ معمولی که $r\,d\theta = dl_{\text{دایره}} = dl\cos\psi$ است، برای جزء سطح بینهایت کوچک یک کره (که با تقریب یک سطح مسطح چهارگوش است) داریم $da_{\text{کره}} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$، یا $da_{\text{کره}} \equiv r^2\,d\Omega$. یکای زاویهٔ فضایی را استرادیان می‌نامیم که قابل قیاس با یکای زاویهٔ مسطحه، رادیان است. هر زاویهٔ فضایی محدود را می‌توان به شکل $\Omega = \int d\Omega = \int \sin\theta\,d\theta\,d\phi$ بیان کرد که θ و ϕ مختصات کروی جزء سطح کروی قطع شده است. اگر سطحی مبدأ را به‌طور کامل در بر گیرد آن‌گاه $\Omega = 4\pi$ است، در حالی که برای سطح بسته‌ای که مبدأ درونش نباشد $\Omega = 0$ می‌شود. این موضوع (شکل ۱ـ۹ را ببینید) به این واقعیت مربوط می‌شود که آن‌گونه که از مبدأ دیده می‌شود برای هر زاویه فضایی مثبت موجود، یک زاویه فضایی منفی نیز وجود دارد که از مبدأ دیده می‌شود.



شکل ۱ـ۹ نشان می‌دهد که چرا زاویهٔ فضایی مقابل به سطح بسته‌ای که مبدأ را دربرگرفته 4π و آنچه مبدأ را دربرنگرفته صفر است.

۱ـ۲ـ۴ جزء حجم

با به یاد آوردن اینکه $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ حجم یک متوازی‌السطوح است، جزء حجم برای دستگاهی از بردارهای پایه $\{\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3\}$ به‌سادگی به کمک ضرب سه‌گانهٔ

$$dv = dl_1\,\hat{\mathbf{e}}_1\cdot(dl_2\,\hat{\mathbf{e}}_2\times dl_3\,\hat{\mathbf{e}}_3)$$

یا

$$dv \equiv |\hat{\mathbf{e}}_1\cdot(\hat{\mathbf{e}}_2\cdot\hat{\mathbf{e}}_3)|dl_1\,dl_2\,dl_3$$

داده می‌شود که dl_jها اندازهٔ جزء جابه‌جایی در راستای بردارهای پایه، $\hat{\mathbf{e}}_j$، هستند. به این ترتیب در دستگاه دکارتی

$$dv = |\hat{\mathbf{x}}\cdot(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}})|dx\,dy\,dz = dx\,dy\,dz \qquad (۱ـ۲۵)$$

و در دستگاه استوانه‌ای

$$dv = |\hat{\mathbf{z}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\rho}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}|dz\,d\rho\,\rho\,d\phi = \rho\,dz\,d\rho\,d\phi \qquad (۱ـ۲۶)$$

و نیز در دستگاه کروی داریم

$$dv=|\hat{\mathbf{r}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}})|dr\,r\,d\theta\,r\sin\theta\,d\phi=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \qquad (۱ـ۲۷)$$

۱ـ۳ گرادیان

اگر بخواهیم تغییر یک تابع نرده‌ای از مکان، $f(\mathbf{r})$، را در مکان مشخص $\mathbf{r}$ بیان کنیم آن‌گاه با نوشتن f و $\mathbf{r}$ در مؤلفه‌های دکارتی، تغییر دیفرانسیلی را به طریقهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$df = dx\,\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y} + dz\frac{\partial f}{\partial z}$$

اکنون یک "عملگر برداری" دیفرانسیلی خطی که آن را دل می‌نامیم و با علامت ∇ نشان می‌دهیم به روش زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۱ـ۲۸)$$

چون $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy + \hat{\mathbf{z}}\,dz$، آن‌گاه از تعریف ضرب نقطه‌ای

$$df = (\nabla \mathbf{f})\cdot d\mathbf{r} \qquad (۱ـ۲۹)$$

که ∇f یک تابع نقطه‌ای برداری است و آن را گرادیان f می‌نامیم داریم

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (۱ـ۳۰)$$

بعضی از کاربردها نقش عملگر گرادیان روی میدانهای برداری را دربر دارند. اگر بخواهیم تغییر میدان برداری $\mathbf{A}$ را در محل $\mathbf{r}$ بیان کنیم با نوشتن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{r}$ به‌صورت مؤلفه‌های دکارتی، تغییر دیفرانسیلی را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= dx\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \\ &= \left[dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right]\mathbf{A} \end{aligned}$$

با استفاده از معادلهٔ (۱ـ۳۰) می‌توان نشان داد که ضرب نرده‌ای $d\mathbf{r}$ و ∇ می‌شود

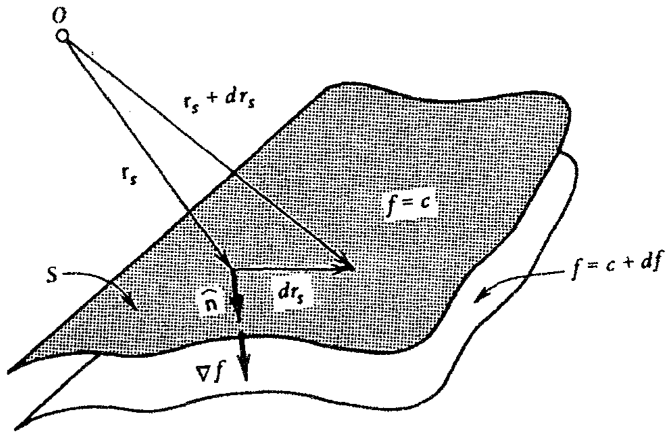
$$d\mathbf{r}\cdot\nabla = \left[dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right] \qquad (۱ـ۳۱)$$

به این ترتیب

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad (۱ـ۳۲)$$

در یک جمله، از تأثیر عملگر نرده‌ای $(d\mathbf{r}\cdot\nabla)$ روی یک تابع (نقطه‌ای) برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$، دیفرانسیل فضایی $\mathbf{A}$، یعنی $d\mathbf{A}$، در نقطهٔ مورد نظر نتیجه می‌شود.

گرادیان در معادلهٔ (۱ـ۲۸) تعبیر جالبی دارد (شکل ۱ـ۱۰ را ببینید). فرض می‌کنیم تابع نرده‌ای $f(\mathbf{r})$ در دست باشد. اگر $f(\mathbf{r})$ را برابر با مقدار ثابتی قرار دهیم، سطح $f(\mathbf{r}) = c$ به‌وجود می‌آید. این زمانی است که اگر دیفرانسیل $f(\mathbf{r})$ را در حالتی که $d\mathbf{r}$ دو نقطه از سطح $f(\mathbf{r}) = c$ را به‌هم وصل می‌کند پیدا کنیم، آن‌گاه (اگر جابه‌جایی سطح را $d\mathbf{r}_s$ بنامیم) $f(\mathbf{r}+d\mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}) = c$



شکل ۱ـ۱۰ استفاده از سطح $f(\mathbf{r}) = c = \text{const.}$ برای نمایش عمود بودن گرادیان تابع $f(\mathbf{r})$ بر این سطح.

و بنابراین $df = 0$. که با توجه به آن $df = (\nabla f)\cdot d\mathbf{r}_s = 0$، و این به معنی آن است که ∇f بر $d\mathbf{r}_s$ عمود است. چون $d\mathbf{r}_s$ را در صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ $\mathbf{r}$ در نظر گرفتیم می‌بینیم که ∇f بر سطح عمود است. اکنون تغییر $f(\mathbf{r})$ را وقتی که به نقطهٔ مجاور $r + dr$ که در سطح قرار ندارد جابه‌جا می‌شویم می‌توان از رابطهٔ (۱ـ۲۹): $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ حساب کرد بنابراین اگر $|d\mathbf{r}| \equiv ds$، $df/ds = (\nabla f)\cdot d\mathbf{r}/ds = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}}$، که $\hat{\mathbf{t}}$ بردار یکه در جهت $d\mathbf{r}$ است. df/ds را مشتق جهتی f می‌نامیم. مقدار بیشینه df/ds وقتی به‌دست می‌آید که $\hat{\mathbf{t}}$ در جهت ∇f قرار گیرد. در این حال $|\nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}}| = |\nabla f| = (df/ds)_{\max}$، یعنی بیشینه آهنگ افزایش تابع $f(\mathbf{r})$ برای جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ برابر با ∇f است و ∇f در راستای افزایش بیشینه قرار دارد. این خواص ∇f در فرمول زیر خلاصه شده‌اند

$$\nabla f = \hat{\mathbf{n}}\frac{df}{dn} \qquad (۱ـ۳۳)$$

که $\hat{\mathbf{n}}\,dn$ جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ در راستای عمود بر سطح $f = \text{const.}$ (در جهت افزایش بیشینهٔ f) است. به این دلیل است که آن را گرادیان f می‌نامیم. به‌عنوان مثال مجموعه صفحات $f \equiv x = c = \text{const.}$ را که هر صفحه، برای یک مقدار c، بر محور x عمود است بررسی می‌کنیم. به روشنی $\nabla f = \hat{\mathbf{x}}$ نشان می‌دهد که (الف) عمود بر صفحه‌ها در راستای x قرار دارد و (ب) میزان افزایش f در این راستا یک است. به‌عنوان مثال دیگر، $f = x^2 + y^2 + z^2 \equiv r^2$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه پیدا می‌کنیم $\nabla f = 2r\hat{\mathbf{r}}$ که $\mathbf{r} \equiv x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ است. عمود بر سطح $f = c$ در راستای شعاع کره به طرف سطوح $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ قرار دارد. آهنگ تغییر f در این جهتها درست برابر است با $df/dr = 2r$. بالاخره توجه کنید که چون ∇f برسطح $f = c$ عمود است می‌توان از آن برای ایجاد بردارهای یکه دستگاه مختصات استفاده کرد. به این ترتیب

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \hat{\mathbf{f}} \qquad (۱ـ۳۴)$$

یک بردار یکه عمود بر سطح $f(x,y,z) = \text{const.}$ است.

اکنون برای هر تابع (نقطه‌ای) نرده‌ای f در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتی برای ∇f به‌دست می‌آوریم. برای این کار به معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ گرادیان، $d\mathbf{r}\cdot\nabla f = df$ توجه کنید. با نوشتن $d\mathbf{r} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,d\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}}\rho\,d\phi + \hat{\mathbf{z}}\,dz$ و

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\rho}}(\nabla f)_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}}(\nabla f)_\phi + \hat{\mathbf{z}}(\nabla f)_z$$

که همواره در هر نقطهٔ $\{\rho,\phi,z\}$ قابل انجام است به‌دست می‌آوریم

$$df = (\nabla f)_\rho\,d\rho + (\nabla f)_\phi\,\rho d\phi + (\nabla f)_z\,dz$$

از طرفی df را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi}\,d\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

از برابری دو عبارت داریم

$$(\nabla f)_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

یا

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

بنابراین عملگر دل (∇) در مختصات استوانه‌ای می‌شود

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۱ـ۳۵)$$

همین طور می‌توان عباراتی برای ∇f و ∇ در مختصات قطبی کروی به‌دست آورد

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (۱ـ۳۶)$$

۱ـ۴ دیورژانس یک بردار و قضیهٔ گاؤس

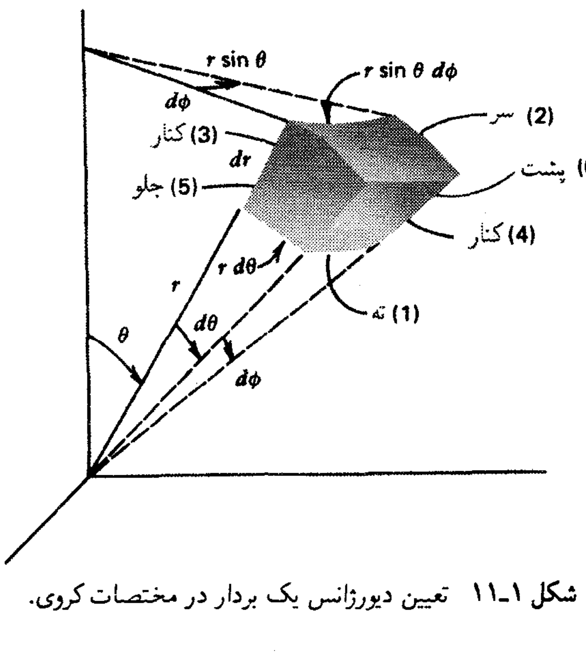
دیورژانس هر میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ را که به شکلهای مختلف $\operatorname{div}\mathbf{A}$ یا $\nabla\cdot\mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\left[\frac{\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}}{\Delta V}\right] \qquad (۱\text{ـ}۳۷)$$

که ΔV یک حجم جزئی و S سطح آن است. به‌علاوه $\nabla\cdot\mathbf{A}$ را می‌توان به‌طور هم‌ارز با حاصلضرب ∇ با بردار $\mathbf{A}$ تعریف کرد. ابتدا تعریف انتگرالی را برای به‌دست‌آوردن دیورژانس یک بردار به‌طور صریح به‌کار می‌بریم. سطح S را که جزء آن با $d\mathbf{a}$ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم، آنگاه انتگرال

$$F = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱\text{ـ}۳۸)$$

را "شار بردار $\mathbf{A}$ از سطح S" می‌نامیم. به روشنی همانند بحث زاویهٔ فضایی، برای S یک جهت (نسبت به دستگاه مختصات به‌کاررفته) در نظر می‌گیریم. سطح S در حالت کلی ممکن است بسته یا باز باشد. جزء شار عبوری از $d\mathbf{a}$ با $dF = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$ داده می‌شود که $\mathbf{A}$ در مرکز $d\mathbf{a}$ اندازه‌گیری می‌شود. اکنون جزء حجم بینهایت کوچک dv که در شکل ۱ـ۱۱ نمایش داده‌ایم را در نظر می‌گیریم. وجوه dv با شش سطح $r = c$، $r = c + dr$، $\theta = c'$، $\theta = c' + d\theta$، $\phi = c''$، $\phi = c'' + d\phi$ در مختصات کروی داده می‌شود و حجم آن $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$ است. شارهای عبوری dF_1، dF_2، ...، dF_6 از این سطوح شش‌گانهٔ ۱ تا ۶ جزء حجم گفته‌شده (که در شکل نشان داده‌ایم) را حساب می‌کنیم



شکل ۱ـ۱۱ تعیین دیورژانس یک بردار در مختصات کروی.

$$dF_1 + dF_2 = -\{r^2 A_r \sin\theta\, d\theta\, d\phi\}_1 + \{r^2 A_r \sin\theta\, d\theta\, d\phi\}_2$$
$$\equiv d[r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, A_r]_{2,1}$$
$$dF_3 + dF_4 = -\{r\sin\theta\, d\phi\, dr\, A_\theta\}_3 + \{r\sin\theta\, d\phi\, dr\, A_\theta\}_4$$
$$\equiv d\{r\sin\theta, d\phi\, dr\, A_\theta\}_{4,3}$$
$$dF_5 + dF_6 = -\{r\, d\theta\, dr\, A_\phi\}_5 + \{r\, d\theta\, dr\, A_\phi\}_6$$
$$\equiv d\{r\, d\theta\, dr\, A_\phi\}_{6,5}$$

مقادیر داخل آکولادها را در مرکز وجوه محاسبه می‌کنیم. بنابراین تنها توابع r برای سطوح ۱ و ۲ مختلف هستند

$$d\{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, A_r\}_{2,1} = d\{r^2 A_r\}_{2,1} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}\{r^2 A_r\} dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

همین طور

$$d\{r\sin\theta\, d\phi\, dr\, A_\theta\}_{4,3} = d\{\sin\theta A_\theta\}_{4,3} r\, dr\, d\phi$$
$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\{\sin\theta\, A_\theta\} r\, d\theta\, dr\, d\phi$$
$$d\{r\, dr\, d\theta\, A_\theta\}_{6,5} = \frac{\partial}{\partial\phi}\{A_\phi\} r\, dr\, d\theta\, d\phi$$

بنابراین

$$\nabla\cdot\mathbf{A} \equiv \left[\frac{\sum_{j=1}^{6} dF_j}{r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}\right]$$

یعنی

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right] \qquad (۱\text{ـ}۳۹)$$

اکنون برای به‌دست‌آوردن دیورژانس در دستگاههای مختصات مختلف ضرب نرده‌ای مستقیم $\nabla\cdot\mathbf{A}$ را به‌کار می‌بریم. عملگر ∇ در مختصات کروی با معادلهٔ (۱ـ۳۶) داده می‌شود. به این ترتیب

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\cdot[\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi]$$

از بسط ضرب نرده‌ای، ۹ جملهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}[\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$[\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi]$$
$$+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}[\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_0 + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi]$$

اکنون با انجام مشتقات، با توجه به اینکه، مثلاً

$$\frac{\partial}{\partial r}(\hat{\mathbf{r}}A_r) = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r}A_r + \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial A_r}{\partial r}$$

و به همین ترتیب برای دیگر جمله‌ها، ۱۸ جمله متمایز به‌وجود خواهد آمد. اما اگر توجه کنیم که $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0$ و غیره، تنها ۱۲ جملهٔ غیرصفر باقی می‌ماند

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} = {} & \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial r}A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r}A_\theta + \hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r}A_\phi \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\cdot\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\theta}A_r + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\theta}A_\phi \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\phi}A_r + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\phi}A_\theta \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi}A_\phi + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\end{aligned}$$

مقدار مشتقهای جزئی بردارهای یکه در این عبارت در جدول ۱ـ۱ آمده است. جدول زیر با استفاده از عبارتهای $\hat{\mathbf{r}}$، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$، و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$، که قبلاً در معادلهٔ (۱ـ۳) آمده بود به‌سادگی تنظیم شده است. مثلاً چون $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\,\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\,\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta$ و بردارهای یکهٔ دکارتی ثابت‌اند

$$\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}/\partial\theta = \hat{\mathbf{x}}(-\sin\theta)\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}(-\sin\theta)\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\cos\theta = -\hat{\mathbf{r}}$$

با جایگذاری، همان نتیجه‌ای را به‌دست خواهیم آورد که در (۱ـ۳۹) به‌دست آمد.

عملگر ∇ را در مختصات استوانه‌ای [معادلهٔ (۱ـ۳۵) را ببینید] به شکل

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

نشان دادیم. در ادامه برای به‌دست‌آوردن $\nabla\cdot\mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای

جدول ۱ـ۱

	$\hat{\mathbf{r}}$	$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	$\hat{\boldsymbol{\phi}}$
$\frac{\partial}{\partial r}$	۰	۰	۰
$\frac{\partial}{\partial\theta}$	$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	$-\hat{\mathbf{r}}$	۰
$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta$	$\hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\theta$	$-[\hat{\mathbf{r}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta]$

روش ضرب مستقیم را به‌کار می‌بریم و به این موضوع توجه می‌کنیم که $\hat{\mathbf{z}}$ یک بردار یکه ثابت است و $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ فقط به مختصه ϕ [معادلهٔ (۱ـ۲)] وابسته‌اند. تنها مشتقهای غیرصفر بردارهای یکه، $\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}/\partial\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ و $\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}/\partial\phi = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$ به‌دست می‌آیند، بنابراین

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

یا

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۱\text{ـ}۴۰)$$

سرانجام عملگر ∇ در مختصات دکارتی، همان طور که در معادلهٔ (۱ـ۲۸) نشان داده شد، به‌دست می‌آید

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

با بسط مستقیم $\nabla\cdot\mathbf{A}$ به‌دست می‌آوریم

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۱\text{ـ}۴۱)$$

قضیهٔ دیورژانس (قضیهٔ گاؤس). بالاخره رابطه‌ای که در الکتروستاتیک بسیار مفید است یعنی قضیهٔ دیورژانس را، که عمل دیورژانس را در بر دارد، اثبات می‌کنیم. از تعریف $\nabla\cdot\mathbf{A}$ برای Δv کوچک داریم

$$(\nabla\cdot\mathbf{A})\Delta v \cong \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$$

حجم V با سطح S که به N جزء حجم ∇v_i با سطح s_i تقسیم شده است را، همان طور که در شکل ۱ـ۱۲ نشان داده‌ایم، در نظر می‌گیریم. آن‌گاه

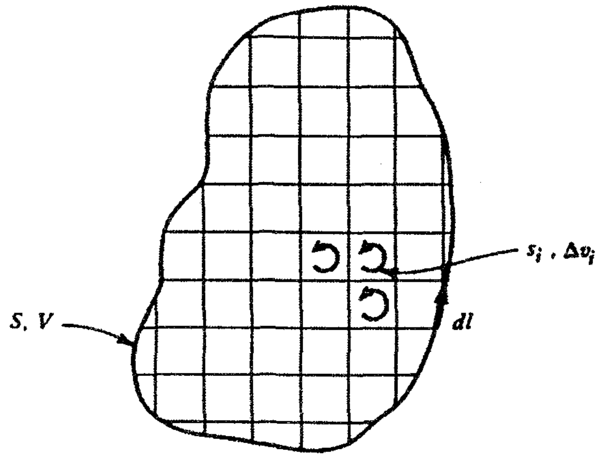
$$\sum_{i=1}^{N}(\nabla\cdot\mathbf{A})_i\Delta v_i = \sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$$

اگر از طرف چپ وقتی $N\to\infty$ و $\Delta v_i \to 0$ حد بگیریم، یک انتگرال حجمی در طرف چپ و یک انتگرال سطحی در طرف راست خواهیم داشت

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}dv = \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱\text{ـ}۴۲)$$

این واقعیت که

$$\lim_{N\to\infty}\sum_i \oint_{S_i}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$$



شکل ۱ـ۱۲ اثبات قضیهٔ دیورژانس (قانون گاؤس) با تقسیم حجم V محدود به سطح S به تعداد زیادی حجم بینهایت کوچک Δv_i به سطح s_i وکاربرد تعریف دیورژانس برحسب حجمهای بینهایت کوچک.

یک انتگرال روی سطح خارجی "حجم کل" می‌شود را از شکل ۱ـ۱۲ می‌توان دید. یادآوری می‌کنیم که شار خالص عبوری از هر سطح داخلی صفر است زیرا چنین سطحی بین دو جزء حجم مجاور مشترک است و عمود بر سطح برای دو جزء حجم مجاور روی سطح مشترک در دو جهت مخالف است. چیزی که باقی می‌ماند شار مربوط به سطوحی است که بین دو جزء حجم مشترک نباشد و آن سطوح واقع بر سطح حجم کل V است.

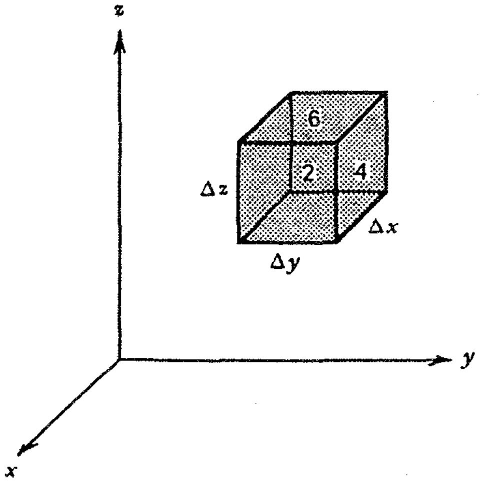
معادلهٔ (۱ـ۴۲) که آن را قضیهٔ دیورژانس (یا قضیهٔ "گاؤس") می‌نامیم موقعی بسیار مفید است که بخواهیم مقادیر میدان برداری روی سطح یک ناحیه را به مقادیر آن در داخل ناحیه مربوط کنیم. اغلب تبدیل یک انتگرال سطحی به انتگرال حجمی (یا بالعکس) مورد نیاز خواهد بود که در فصل ۳ و ۴ آن را نشان خواهیم داد.

۱ـ۵ تاو و قضیهٔ استوکس

اکنون به معرفی عمل مفید دیگری که شامل عملگر ∇ است می‌پردازیم. برای یک میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$، تاو را که به شکل $\nabla \times \mathbf{A}$ نشان می‌دهیم با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to ۰} \left[\frac{۱}{\Delta v} \oint d\mathbf{a} \times \mathbf{A}\right] \qquad (۱ـ۴۳)$$

که Δv یک حجم کوچک با سطح S است. این تعریف را اکنون برای تعیین $\nabla \times \mathbf{A}$ در نمایش دکارتی می‌توان به‌کار برد. جزء حجم $dv = dx\,dy\,dz$ را که در شکل ۱ـ۱۳ نشان داده‌ایم در نظر می‌گیریم.



شکل ۱ـ۱۳ تعیین شکل صریح تاو یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی با استفاده از یک دیفرانسیل جعبه مکعب‌مستطیل.

سهم سطوح مقابل ۱ و ۲ در انتگرال $\int d\mathbf{a} \times \mathbf{A}$ عبارت است از

$$\int_{۱} d\mathbf{a} \times \mathbf{A} = \{-\hat{\mathbf{x}}\,dy\,dz \times \mathbf{A}\}_{۱} = -dy\,dz\{\hat{\mathbf{z}}A_y - \hat{\mathbf{y}}A_z\}_{۱}$$

$$\int_{۲} d\mathbf{a} \times \mathbf{A} = \{\hat{\mathbf{x}}\,dy\,dz \times \mathbf{A}\}_{۲} = dy\,dz\{\hat{\mathbf{z}}A_y - \hat{\mathbf{y}}A_z\}_{۲}$$

جمع این دو انتگرال دیفرانسیل (جزئی) عبارت نشان داده شده در آکولاد است که روی سطوح ۱ و ۲ گرفته شده است

$$\begin{aligned}\int_{۱+۲} d\mathbf{a} \times \mathbf{A} &= dy\,dz[\partial\{\hat{\mathbf{z}}A_y - \hat{\mathbf{y}}A_z\}_{۲,۱}] \\ &= dy\,dz\frac{\partial}{\partial x}\{\hat{\mathbf{z}}A_y - \hat{\mathbf{y}}A_z\}dx \\ &= dv\left[\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

همچنین برای سطوح روبه‌روی ۳ و ۴ و نیز ۵ و ۶ به‌سادگی می‌توان نوشت

$$\int_{۳+۴} d\mathbf{a} \times \mathbf{A} = dv\left[\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

$$\int_{۵+۶} d\mathbf{a} \times \mathbf{A} = dv\left[\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]$$

از جمع تمام جمله‌ها به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \hat{\mathbf{y}}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] \\ + \hat{\mathbf{z}}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] \qquad (۱ـ۴۴)\end{aligned}$$

همین روش را می‌توان برای تعیین $\nabla \times \mathbf{A}$ در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای به‌کار برد. همچنین می‌توان ضرب خارجی عملگر ∇ با تابع نقطه‌ای برداری $\mathbf{A}$ را به همان شیوهٔ ضرب خارجی دو بردار به‌کار برد. می‌توان به‌سادگی نشان داد که نتیجهٔ این عمل دقیقاً همان معادلهٔ (۱ـ۴۴) است.

$\nabla \times \mathbf{A}$ را می‌توانیم در مختصات دکارتی به شکل دترمینان زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (۱\text{ـ}۴۵)$$

این دترمینان به شرطی معنی دارد که نسبت به ردیف اول بسط داده شود.

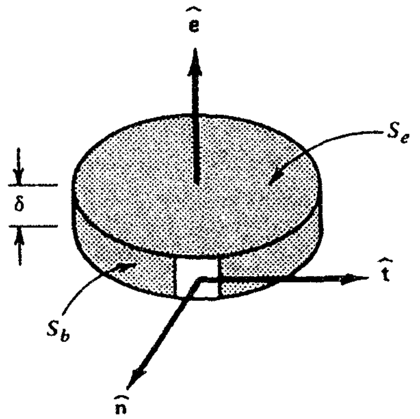
چون $\nabla \times \mathbf{A}$ شبیه ضرب برداری دو بردار ∇ و $\mathbf{A}$ است انتظار داریم که مقدار آن مستقل از دستگاه مختصاتی که در آن نمایش داده شده است باشد. مثلاً خواهیم دید که $\nabla \times \mathbf{A}$ دارای یک معنی فیزیکی است و این معنی مستقل از دستگاه مختصات نمایش‌دهندهٔ $\mathbf{A}$، است. به این ترتیب فرض می‌کنیم که $\nabla \times \mathbf{A}$ یک بردار است، درست مثل آنکه فرض کردیم ∇f یک بردار و $\nabla \cdot \mathbf{A}$ یک نرده‌ای است.

با نوشتن عملگر ∇ و بردار $\mathbf{A}$ در هر دستگاه مختصات دیگر می‌توان به‌طور صریح نمایش $\nabla \times \mathbf{A}$ را در آن دستگاه به‌دست آورد. فقط باید توجه کرد که مشتقهای جزئی بردارهای یکه در مختصات منحنی‌الخط لزوماً صفر نیستند (برخلاف بردارهای یکه در دستگاه مختصات دکارتی که مشتقهای آنها همواره صفر است). با این روش عبارت زیر را در مختصات استوانه‌ای به‌دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \left[\frac{۱}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right] + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] + \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{۱}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right] \qquad (۱\text{ـ}۴۶)$$

معادلهٔ (۱ـ۴۶) مشخص می‌کند که دترمینان ساده‌ای که بتواند تاو یک بردار را در مختصات استوانه‌ای نشان دهد وجود ندارد. با وجود این هنوز می‌توان آن را به شکل دترمینان زیر نوشت

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{۱}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$



شکل ۱ـ۱۴ تعیین مؤلفه تاو یک بردار در راستای بردار واحد $\hat{\mathbf{e}}$ با استفاده از تعریف تاو یک جعبه جزئی با ارتفاع ناچیز و با محوری در راستای $\hat{\mathbf{e}}$.

با همین روش عبارت زیر برای $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = {} & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\right] \\ & + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] \\ & + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left[\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{۱}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \qquad (۱\text{ـ}۴۷) \end{aligned}$$

مجدداً از دترمینان زیر می‌توان استفاده کرد

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{۱}{r^{۲}\sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

قضیهٔ استوکس. در پایان رابطهٔ بسیار مفیدی در مغناطوستاتیک را اثبات می‌کنیم "قضیهٔ استوکس" که دربرگیرندهٔ تاو یک بردار است برای انجام این کار مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در راستای $\hat{\mathbf{e}}$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه این رابطه، جزء حجم کوچکی به سطح S و به‌شکل استوانه را (شکل ۱ـ۱۴) که سطوح بالا و پایین آن هر یک S_e عمود بر $\hat{\mathbf{e}}$ بوده و سطح جانبی آن S_b، به عرض δ و موازی $\hat{\mathbf{e}}$ است در نظر می‌گیریم. با به‌کار بردن معادلهٔ (۱ـ۴۳) برای این جزء حجم داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{۱}{S_e\delta}\oint_S d\mathbf{a} \times \mathbf{A}$$

اکنون مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در راستای $\hat{\mathbf{e}}$ را حساب می‌کنیم. از ضرب

نقطه‌ای $\hat{\mathbf{e}}$ در $\nabla \times \mathbf{A}$ به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e \delta} \oint_S \hat{\mathbf{e}} \cdot d\mathbf{a} \times \mathbf{A} \qquad (۱\text{ـ}۴۸)$$

چون $\hat{\mathbf{e}} \times S_e = ۰$ تنها نوار جانبی در معادلهٔ (۱ـ۴۸) شرکت خواهد داشت. بنابراین

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e \delta} \int_{S_b} \hat{\mathbf{e}} \times d\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$$

اگر δ به حد کافی کوچک باشد می‌توان نوشت $d\mathbf{a} = \delta\, dl\, \hat{\mathbf{n}}$ که dl جزء طول در امتداد نوار جانبی و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر نوار جانبی است. توجه کنید که، $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{t}}$، که $\hat{\mathbf{t}}$ بردار یکه مماس بر نوار جانبی است، آن‌گاه ضرب سه‌گانه $\hat{\mathbf{e}} \times d\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$ را می‌توان به شکل $(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}})\delta\, dl$ نوشت. چون $\hat{\mathbf{t}}\, dl$ برابر $d\mathbf{r}$ است آن‌گاه به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

وقتی $\delta \to ۰$، S_e سطح محدود به مسیر انتگرال‌گیری و شامل بردار $\hat{\mathbf{t}}$ است. جهت چرخش به $\hat{\mathbf{e}}$ وابسته است و به‌گونه‌ای است که اگر چرخش در جهت پیچ راستگرد باشد $\hat{\mathbf{e}}$ در جهت پیشرفت آن است. به‌طور رسمی می‌نویسیم

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{S_e \to ۰} \left[\frac{1}{S_e} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right] \qquad (۱\text{ـ}۴۹)$$

که S_e سطحی است که عمود بر آن موازی $\hat{\mathbf{e}}$ و پیرامون آن به طول C مسیر انتگرال‌گیری است. یادآوری می‌کنیم که انتگرال $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ را چرخش $\mathbf{A}$ حول C می‌نامیم. با به‌کار بردن معادلهٔ (۱ـ۴۹) به‌سادگی مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات منحنی‌الخط متعامد به‌دست می‌آید.

اکنون معادلهٔ (۱ـ۴۹) را برای اثبات قضیهٔ استوکس، که شار تاو $\mathbf{A}$ از یک سطح را به چرخش $\mathbf{A}$ حول لبه سطح ارتباط می‌دهد، به‌کار می‌بریم. سطح باز S محدود به منحنی بسته C را در نظر می‌گیریم. C را "همبند ساده" در نظر می‌گیریم، یعنی منحنی به‌طور پیوسته می‌تواند به یک نقطه نزول کند بی‌آنکه فضا را ترک نماید. سطح S دو رویه دارد که یکی از آنها را مثبت می‌گیریم. اکنون این سطح را به جزءهای برداری سطح $(\hat{\mathbf{e}}_j \Delta a_j)$ تقسیم می‌کنیم که لزوماً، به شرطی که Δa_jها به حد کافی کوچک باشند، لزوماً مسطح‌اند. برای هر یک از این جزءهای سطح معادلهٔ (۱ـ۴۹) را در مورد مؤلفه‌های تاو $\mathbf{A}$ در جهت $\hat{\mathbf{e}}_j$ به روش زیر به‌کار می‌بریم

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{\Delta a_j} \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \qquad (۱\text{ـ}۵۰)$$

یا

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta a_j = \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

اکنون جمع عبارتهای معادلهٔ (۱ـ۵۰) را برای تمام اجزای مربوط به سطح S به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب

$$\sum_j (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta a_j = \sum \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

در حد $\Delta a_j \to ۰$، که در نتیجه تعداد اجزا به بینهایت میل می‌کند طرف چپ با انتگرال روی سطح باز S مساوی است. طرف راست نیز تبدیل به انتگرال خطی روی منحنی C می‌شود زیرا $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ روی تمام اجزای خطوط داخلی S حذف می‌شوند و تنها انتگرال روی حاشیهٔ S (یعنی روی C) باقی می‌ماند. بنابراین

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \qquad (۱\text{ـ}۵۱)$$

که آن را قضیهٔ "استوکس" می‌نامیم. رویهٔ مثبت S و جهت پیموده‌شدن C با قرارداد دست راست به هم مربوط‌اند.

با استفاده از قضیهٔ استوکس بلافاصله می‌توانیم به ملاکی برای پایستار بودن یا نبودن یک میدان برسیم. اگر $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ برای تمام مسیرهای ممکن، در ناحیه‌ای از فضا، صفر باشد آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\nabla \times \mathbf{A}$ نیز در همه جای ناحیه صفر است. عکس این مطلب نیز صحیح است. چنین برداری را بردار پایستار می‌نامیم. بنابراین ملاکی را که تعیین می‌کند آیا یک میدان برداری در ناحیه‌ای از فضا پایستار است یا نه به روش زیر خلاصه می‌کنیم. اگر در ناحیهٔ "همبند ساده" یکی از روابط زیر برقرار باشد

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = ۰ \qquad \text{برای } C \text{ دلخواه}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = ۰ \qquad (۱\text{ـ}۵۲)$$

$$\mathbf{A} = \nabla f \qquad \text{برای تابع نرده‌ای } f \text{ (مثال ۱ـ۲ را ببینید)}$$

آن‌گاه $\mathbf{A}$ میدانی پایستار است. برقراری یکی از این ملاکها در سرتاسر ناحیهٔ "همبند ساده" از فضا مستلزم این است که دوتای دیگر نیز برقرار باشند.

۱ـ۶ نقش برداری ∇

۱ـ۶ـ۱ عملهای دل (∇) تنها

تا کنون مفهوم عملهای گرادیان، دیورژانس و تاو را بحث کردیم. در آنجا عملگر دل، ∇، وقتی معنی‌دار بود که فقط روی کمیتی که در طرف

راست آن قرارگرفته است، عمل کند، در غیر این صورت در خیلی از موارد مثل یک بردار معمولی عمل می‌کند. اینجا می‌خواهیم بعضی از این عملها را خلاصه کنیم. اگر f و g توابع نرده‌ای و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ توابع برداری مکان در فضا باشند آن‌گاه

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g)=\boldsymbol{\nabla} f+\boldsymbol{\nabla} g \tag{۱_۵۳}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} \tag{۱_۵۴}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} \tag{۱_۵۵}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(fg)=(\boldsymbol{\nabla} f)g+f(\boldsymbol{\nabla} g) \tag{۱_۵۶}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A})=(\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\mathbf{A}+f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) \tag{۱_۵۷}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla} f\times\mathbf{A}+f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \tag{۱_۵۸}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}+\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}+\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \tag{۱_۵۹}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} \tag{۱_۶۰}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}+\mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}-\mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) \tag{۱_۶۱}$$

این روابط با بیان $\boldsymbol{\nabla}$ در مختصات دکارتی و مقایسه دو طرف معادله‌های فوق تماماً قابل اثبات است.

۱_۶_۲ عملهای دل ($\boldsymbol{\nabla}$) دوتایی

عملگر دل را می‌توان برای چندین بار پیاپی روی یک تابع اثر داد. با در نظر گرفتن تابع نقطه‌ای نرده‌ای f، مثلاً عبارتهای $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f$ و $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} f$ را داریم. در مختصات دکارتی

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f=\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

چون $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=1$ و $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=0$ داریم

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f=\nabla^2 f \tag{۱_۶۲}$$

این عملگر را لاپلاسی می‌نامیم. لاپلاسی در سایر مختصات به همین روش به‌دست می‌آید. لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای و کروی با روابط زیر داده می‌شود

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{۱_۶۳}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{۱_۶۴}$$

به همین روش تاوگرادیان یک تابع نرده‌ای، $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} f$، را می‌توان حساب کرد. در مختصات دکارتی می‌نویسیم

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} f)=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان داریم

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} f=\hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)+\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$

برای توابع خوشرفتار و پیوسته $\partial^2 f/\partial y\partial z=\partial^2 f/\partial z\partial y$ و غیره، تاوگرادیان یک تابع نرده‌ای صفر است [معادلهٔ (۱_۵۲) را که بردارهای پایستار را تعریف می‌کند ببینید]؛ یعنی

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} f=0 \tag{۱_۶۵}$$

با یک میدان برداری $\mathbf{f}$ می‌توان عبارتهای مختلف دل دوتایی را نوشت. با وجود این می‌توان نشان داد که $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot\mathbf{f}$ و $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla})\times\mathbf{f}$ صفرند. همچنین می‌توانیم با محاسبهٔ مستقیم در مختصات دکارتی نشان دهیم که، $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{f})$، دیورژانس تاو یک بردار صفر است یعنی

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{f})=0 \tag{۱_۶۶}$$

معادلهٔ (۱_۶۶) در مغناطوستاتیک مهم است زیرا دیورژانس میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ صفر است ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$). آن‌گاه می‌توانیم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را برحسب پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ نمایش دهیم

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

در آخر تاوِ تاو یک بردار $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})$ را بحث می‌کنیم. این عملها دل دوتایی کاربرد گسترده‌ای در انتشار امواج الکترومغناطیسی، موضوعی که در فصول آینده این کتاب بحث می‌شود، دارد. با در نظر گرفتن ∇ به‌عنوان یک بردار می‌توان $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})$ را مثل یک ضرب سه‌گانه برداری معمولی، $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$، بسط داد. نتیجه می‌شود

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f})-\nabla\cdot(\nabla\mathbf{f}) \qquad (۱\_۶۷)$$

که $\nabla\mathbf{f}$ یک تانسور مرتبه دوم یا دیادیک است (مثال ۱_۳ را ببینید). در مختصات دکارتی داریم $\nabla\cdot(\nabla\mathbf{f})=(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{f}=\nabla^{2}\mathbf{f}$ که ∇^{2} عملگر لاپلاسی است.

۱_۷ روابط انتگرالی بردار

حال در مورد چند تعمیم از قضیه‌های دیورژانس و استوکس بحث می‌کنیم. اگرچه در ادامهٔ بحث الکتریسیته و مغناطیس در سطح این کتاب نیازی به این تعمیمها نداریم ولی به جهت تکمیل بحث و مراجعه به آن در آینده آنها را می‌آوریم.

قضیهٔ دیورژانس. روابط انتگرالی زیر در معادله‌های (۱_۶۸) تا (۱_۷۲) تعمیم قضیهٔ دیورژانس هستند

$$\int_V[\Phi\nabla^{2}\psi+(\nabla\Phi)\cdot(\nabla\psi)]dV=\int_S(\Phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱\_۶۸)$$

این را اتحاد اول یا قضیهٔ گرین می‌نامیم.

$$\int_V(\Phi\nabla^{2}\psi-\psi\nabla^{2}\Phi)dV=\int_S(\Phi\nabla\psi-\psi\nabla\Phi)\cdot d\mathbf{a} \qquad (۱\_۶۹)$$

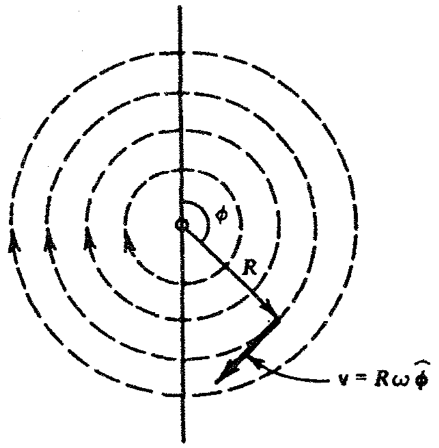
این را اتحاد دوم یا قضیهٔ متقارن گرین می‌نامیم

$$\int_V\nabla\times\mathbf{A}dV=\oint_S(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A})da=\oint_S d\mathbf{a}\times\mathbf{A} \qquad (۱\_۷۰)$$

$$\int_V\nabla\Phi dV=\int_S\Phi\hat{\mathbf{n}}\,da \qquad (۱\_۷۱)$$

$$\int_V(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}\,dV=\oint_S\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}})d\mathbf{a} \qquad (۱\_۷۲)$$

روابط (۱_۶۸) و (۱_۶۹) را به‌سادگی می‌توان با اعمال قضیهٔ دیورژانس به‌ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F}=\Phi\nabla\psi$ و $\mathbf{F}=\Phi\nabla\psi-\psi\nabla\Phi$ ثابت کرد، که Φ و ψ توابع نرده‌ای هستند.



شکل ۱_۱۵ میدان سرعت در یک آبگذر.

روابط (۱_۷۰) و (۱_۷۱) نیز با اعمال قضیهٔ دیورژانس به‌ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ و $\mathbf{F}=\Phi\mathbf{C}$، که $\mathbf{C}$ یک بردار ثابت است، قابل اثبات است.

قضیهٔ استوکس. روابط انتگرالی زیر تعمیم قضیهٔ استوکس است

$$\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B}=\int_S(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\times\mathbf{B}\,da \qquad (۱\_۷۳)$$

$$\oint_C\Phi\,d\mathbf{r}=\int_S(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla\Phi)da=\int d\mathbf{a}\times\nabla\Phi \qquad (۱\_۷۴)$$

این دو معادله را می‌توان با اعمال قضیهٔ استوکس به‌ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ و $\mathbf{F}=\Phi\mathbf{C}$، که $\mathbf{C}$ یک بردار ثابت است، اثبات کرد.

مثال ۱_۱ میدان سرعت در یک آبگذر

میدان برداری $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\rho\hat{\phi}$ را که در شکل ۱_۱۵ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم، که در آن ρ فاصله از محور z، ω یک ثابت و $\hat{\phi}$ مرتبط با مختصهٔ زاویه‌ای ϕ حول محور است. آیا $\mathbf{v}$ پایستار است؟

با بررسی چرخش میدان $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ روی مسیر دایره‌ای به شعاع R حول محور z پایستار نبودن آن به‌وضوح آشکار می‌شود:

$$\oint_{\text{دایره}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\phi=۰}^{۲\pi}\omega R\hat{\phi}\cdot R\hat{\phi}\,d\phi=۲\pi\omega R^{۲}$$

چرخش غیرصفر است و بنابراین $\mathbf{v}$ پایستار نیست. این مثال میدان سرعت آب در حال تخلیه از یک چاهک را نشان می‌دهد، چرخش آب برای چنین دستگاهی در حالت کلی صفر نیست. ■

مثال ۱_۲ ماهیت پایستار بردارهای شعاعی ــ توابع پتانسیل

میدان برداری شعاعی در مختصات کروی که با رابطهٔ $\mathbf{A}=f(r)\hat{\mathbf{r}}$ مشخص می‌شود و $f(r)$ یک تابع نرده‌ای که فقط وابسته به r است

را در نظر می‌گیریم. حال نشان می‌دهیم که این بردار پایستار است. ملاک پایستاربودن یک بردار را معادلهٔ (۱ـ۵۲) به‌دست می‌دهد. با قرار دادن $A_r = f(r)$ و $A_\theta = A_\phi = \circ$ در $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی [معادلهٔ (۱ـ۴۷)] بلافاصله نتیجه می‌گیریم $\nabla \times \mathbf{A} = \circ$. به این ترتیب مشخص می‌شود که $\mathbf{A}$ پایستار است.

میدانهای برداری شعاعی در الکتروستاتیک اهمیت دارند زیرا میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای، شعاعی و بنابراین پایستار است. به خاطر اهمیت این ویژگی ماهیت پایستار این بردارها را از دید آخرین ملاک معادلهٔ (۱ـ۵۲) بررسی می‌کنیم. اگر $\mathbf{A}$ پایستار باشد باید بتوان آن را به شکل گرادیان یک تابع نرده‌ای Φ نوشت یعنی $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. تابع Φ تابع پتانسیل متناظر با $\mathbf{A}$ نام دارد. برای اثبات این موضوع، تابع

$$\Phi = \int_{r_\circ}^{r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_\circ}^{r} f(r) dr$$

را در نظر می‌گیریم. اگر انتگرال وجود داشته و تابع پیوسته‌ای از r باشد، آن‌گاه از عبارت گرادیان در مختصات کروی می‌بینیم که

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = f(r) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \circ$$

نتیجه این است که یک تابع Φ وجود دارد به‌طوری که

$$\nabla\Phi = f(r)\hat{\mathbf{r}} \tag{۱ـ۷۵}$$

$\mathbf{A}$ به راستی یک تابع پتانسیل دارد. ■

مثال ۱ـ۳ گرادیان یک بردار ــ دیادیکها

در این مثال در مورد گرادیان یک بردار بحث می‌کنیم که در بررسی نیروهای وارد بر دوقطبیهای الکتریکی واقع در میدانهای الکتریکی خارجی مفید است. بردار $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$ را در نظر می‌گیریم آن‌گاه $\nabla\mathbf{E}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla\mathbf{E} = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}})$$

از بسط این رابطه نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{E} = &\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}}\right)\\ &+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}\right)\\ &+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\right)\end{aligned} \tag{۱ـ۷۶}$$

کمیتهای $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$، ... را دیادیکهای یکه می‌نامیم. دقت کنید که $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$ برای مثال همان $\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}$ نیست. به این ترتیب ما نُه دیادیک یکهٔ متفاوت در گرادیان داریم. هر کمیت را که بتوانیم آن را به شکل زیر بسط دهیم

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi} = &a_{۱۱}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + a_{۱۲}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} + a_{۱۳}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}} + a_{۲۱}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} + a_{۲۲}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + a_{۲۳}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}\\ &+ a_{۳۱}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + a_{۳۲}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} + a_{۳۳}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{۱ـ۷۷}$$

یک دیادیک می‌نامیم و نُه ضریب a_{ij} مؤلفه‌های آن دیادیک هستند.

بررسی ضرب نرده‌ای یک بردار در یک دیادیک $\mathbf{\Phi}$ به شکل بالا مفید است. با در نظر گرفتن ضرب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Phi}$ می‌نویسیم

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Phi} = A_x\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{\Phi} + A_y\hat{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{\Phi} + A_z\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{\Phi}$$

برای مثال ضرب $\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{\Phi}$ را در نظر می‌گیریم. این ضرب نه جمله دارد که چند جملهٔ آن $\hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۱۱}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}$، $\hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۱۲}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}$، $\hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۲۱}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۳۲}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}}$ هستند. این ضربهای خاص با قواعد زیر ارزیابی می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۱۱}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} &= a_{۱۱}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} = a_{۱۱}\hat{\mathbf{x}}\\ \hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۱۲}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} &= a_{۱۲}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{y}} = a_{۱۲}\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۲۱}\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}} &= a_{۲۱}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{x}} = \circ\\ \hat{\mathbf{x}}\cdot a_{۳۲}\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} &= a_{۳۲}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{y}} = \circ\end{aligned} \tag{۱ـ۷۸}$$

دستورهای مشابه‌ای برای بقیهٔ ضربها و نیز ضربهای $\hat{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{\Phi}$ و $\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{\Phi}$ وجود دارند. به‌عنوان مثال ویژه مسئلهٔ ۱ـ۲۰ را ببینید. ■

مثال ۱ـ۴ تابع دلتای دیراک

در این مثال تابع بسیار مفیدی را برای بحث بارهای نقطه‌ای معرفی می‌کنیم. ابتدا آن را صرفاً از دید ریاضی تعریف می‌کنیم و ارتباط آن با بحثهای الکترومغناطیس را به بعد موکول می‌کنیم. تابع دلتای دیراک که آن را با علامت $\delta(\mathbf{r})$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$\delta(\mathbf{r}) = \circ \qquad \text{برای } \mathbf{r} \neq \circ \tag{۱ـ۷۹}$$

$$\int \delta(\mathbf{r}')dv' = ۱ \tag{۱ـ۸۰}$$

که انتگرال روی تمام فضا گرفته می‌شود. این تعریف نشان می‌دهد که تابع دلتا یک تابع ریاضی بسیار تکین است. یعنی تابع در تمام نقاط،

بجز در یک نقطهٔ تنها، صفر است با این همه انتگرال آن غیرصفر است (تابع میخی‌شکل).[1] روشن است که این تابع پیوسته نیست بنابراین نباید از آن به صورت یک تابع پیوسته مشتق گرفت. با این حال اگر از آن درست استفاده شود یک ابزار ریاضی بسیار مفید است.

ویژگی دیگر تابع دلتای دیراک، ارتباط آن با عملگر لاپلاسی یا دیورژانس است؛ یعنی

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \qquad (۱\_۸۱)$$

با مشتق‌گیری مستقیم به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot\mathbf{r} + \frac{(\nabla\cdot\mathbf{r})}{r^3}$$

چون $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$، $\nabla(1/\mathbf{r}^3) = -3\mathbf{r}/r^4$ آنگاه $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3)$ برای $r \neq 0$ صفر است. و برای $r \to 0$ نامعین می‌شود. ماهیت دیورژانس در $r = 0$ را می‌توان با استفاده از قضیهٔ دیورژانس بررسی کرد. با اعمال قضیه روی حجم کوچکی به شعاع R نتیجه می‌گیریم

$$\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dv = \oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{r^3}\, da = \frac{1}{R^2}\oint da = 4\pi$$

چون این نتیجه بدون توجه به میزان کوچک بودن R صحیح است پس می‌توان به جای $\nabla(\mathbf{r}/r^3)$، $4\pi\delta(\mathbf{r})$ را قرار داد. ■

۱_۸ خلاصه

وقتی که جزء سطح $d\mathbf{a}$ واقع در نقطهٔ $\mathbf{r}$ را از مبدأ ببینیم بهتر است که از مفهوم زاویهٔ فضایی $d\Omega$ استفاده کنیم

$$d\Omega = \frac{d\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad [۱\_۲۳]،\ [۱\_۲۴]$$

اگر سطح بسته S مبدأ را در بر داشته باشد آنگاه $\Omega = \oint_S d\Omega = 4\pi$، در حالی که سطح بسته شامل مبدأ نباشد $\Omega = 0$ است.

عملگر گرادیان، ∇، یک دیفرانسیل خطی "عملگر برداری" است که می‌تواند روی یک میدان نرده‌ای f یا میدان برداری $\mathbf{A}$ اثر کند و گرادیان یک نرده‌ای، دیورژانس یک بردار، تاو یک بردار و گرادیان یک بردار را به‌دست دهد

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad [۱\_۳۰]$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad [۱\_۴۱]$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \hat{\mathbf{y}}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \hat{\mathbf{z}}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] \qquad [۱\_۴۴]$$

$$\nabla\mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}}\right] + \cdots \qquad [۱\_۷۶]$$

که نقاط در معادلهٔ آخری نمایش سه جمله مشابه برای هر مشتق‌گیری نسبت به y و zاند. عملگر گرادیان را می‌توان چندین بار به شکل پی‌درپی روی یک تابع و نیز ممکن است آن را روی حاصلضرب توابع اثر داد. نتیجه این تأثیرات را می‌توان از عملهای دیفرانسیلی اساسی بالا به‌دست آورد. یک عمل مهم تأثیر عملگر لاپلاسی روی یک تابع نرده‌ای یا برداری $\nabla\cdot\nabla f = \nabla^2 f$ یا $\nabla^2\mathbf{A}$ است. تمام عملهای بالا را در دیگر مختصات (استوانه‌ای یا کروی) می‌توانیم به‌دست آوریم.

بعضی اتحادهای انتگرالی عملهای دل (گرادیان) را می‌توان با انتگرال‌گیری رابطه دیفرانسیلی روی حجم دلخواه V که با سطح بسته S محدود شده است یا روی یک سطح بازکه با منحنی بسته C محدود شده است به‌دست آورد. اینها قضیهٔ دیورژانس یا قضیهٔ استوکس را شامل می‌شوند.[4]

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} \qquad [۱\_۴۲]$$

$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \qquad [۱\_۵۱]$$

بردار $\mathbf{A}$ را پایستار می‌نامیم اگر

$$\nabla\times\mathbf{A} = 0 \quad \text{یا} \quad \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (\text{پایستار } \mathbf{A}) \qquad [۱\_۵۲]$$

اگر چنین باشد $\mathbf{A}$ را نیز می‌توان به شکل گرادیان یک نرده‌ای نوشت

$$\mathbf{A} = -\nabla\Phi \qquad (\text{پایستار } \mathbf{A})$$

مسائل

۱_۱ بردار یکه عمود بر صفحهٔ شامل بردارهای $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} - 6\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{z}}$ و $\mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$ را به‌دست آورید.

۱_۲ معادلهٔ صفحه‌ای راکه از نقاط $P_1(2, -1, 1)$، $P_2(3, 2, -1)$، و $P_3(-1, 3, 2)$ می‌گذرد به‌دست آورید.

1. spike function