الف)

فرض می‌کنیم پرتوی نوری با زاویه‌ی r وارد تیغه‌ی شفاف می‌شود. رابطه‌ی بین دو زاویه‌ی i و r طبق قانون اسنل-دکارت به صورت زیر است.

$$\sin i = n \sin r$$

حال شرط اینکه این پرتو از سطح BD خارج شود، این است که ابتدا از سطح AB بازتاب یابد؛ که شرط آن به صورت زیر است.

$$\sin(۹۰ - r) = \cos r \geq \frac{۱}{n}$$

با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ و قانون اسنل-دکارت می‌توانیم بنویسیم:

$$\sqrt{۱ - \sin^۲ r} \geq \frac{۱}{n}$$

$$۱ - \sin^۲ r \geq \frac{۱}{n^۲}$$

$$۱ - \frac{۱}{n^۲} \sin^۲ i \geq \frac{۱}{n^۲}$$

حال با ضرب $n^۲$ در دو طرفِ نامساوی و مرتب‌سازی آن، داریم:

$$n^۲ \geq ۱ + \sin^۲ i$$

که اگر بیشترین مقدار $\sin^۲ i$ که برابر ۱ است را در آن قرار دهیم، می‌یابیم که

$$n^۲ \geq ۲$$

پس

$$n_{min} = \sqrt{۲}$$

م)

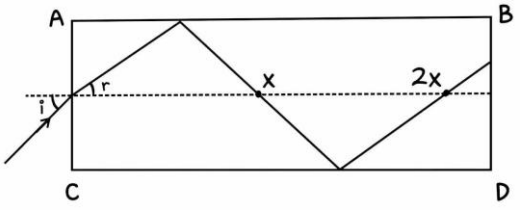
با توجه به اطلاعات داده شده می‌دانیم که زاویه‌ی حد تیغه‌ی شفاف برابر $\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد. در نتیجه

$$\sin r = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin i \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس

$$r \leq \frac{\pi}{۴}$$

حال حالتی را در نظر بگیرید $۰ \leq i \leq \frac{\pi}{۲}$ باشد. مطابق شکل زیر، پرتوی نور پس از نخستین بازتاب از سطح AB ، محور مرکزی را در فاصله‌ی $x = \frac{b}{\tan r}$ از سطح AC قطع می‌کند. با دقت بیشتر در شکل، مشخص می‌شود که شرط اینکه پرتوی نور به آینه برخورد نکند، این است که $۲mx \leq d \leq (۲m+۱)x$ باشد. که در آن m عضو مجموعه‌ی اعداد حسابی است.



با جایگذاری $x = \frac{b}{\tan r}$ و توجه به اینکه $\tan r$ مقداری مثبت است، داریم

$$۲m\frac{b}{d} \leq \tan r \leq (۲m+۱)\frac{b}{d}$$

حال اگر مقدار i را به صورت زیر بنویسیم

$$i = \sin^{-۱}\{\sqrt{۲}\sin(\tan^{-۱}(\tan r))\}$$

و توجه کنیم که هر کدام از توابعی که در رابطه‌ی بالا دیده می‌شود، صعودی است؛ به راحتی می‌توانیم بنویسیم

$$\sin^{-۱}\left\{\sqrt{۲}\sin\left(\tan^{-۱}\left(۲m\frac{b}{d}\right)\right)\right\} \leq i \leq \sin^{-۱}\left\{\sqrt{۲}\sin\left(\tan^{-۱}\left((۲m+۱)\frac{b}{d}\right)\right)\right\}$$

پس جواب مسئله برای حالت $۰ \leq i \leq \frac{\pi}{۲}$ بدست می‌آید.

حال فرض کنید $-\frac{\pi}{۲} \leq i \leq ۰$ باشد. به راحتی و دقیقن با روشی مشابه روش بالا می‌توان نشان داد که

$$\sin^{-۱}\left\{\sqrt{۲}\sin\left(\tan^{-۱}\left((۲m+۱)\frac{b}{d}\right)\right)\right\} \leq -i \leq \sin^{-۱}\left\{\sqrt{۲}\sin\left(\tan^{-۱}\left(۲(m+۱)\frac{b}{d}\right)\right)\right\}$$

ی)

رابطه‌ی بین ضریب شکست و تغییرات دما را به صورت زیر می‌توانیم بازنویسی کنیم.

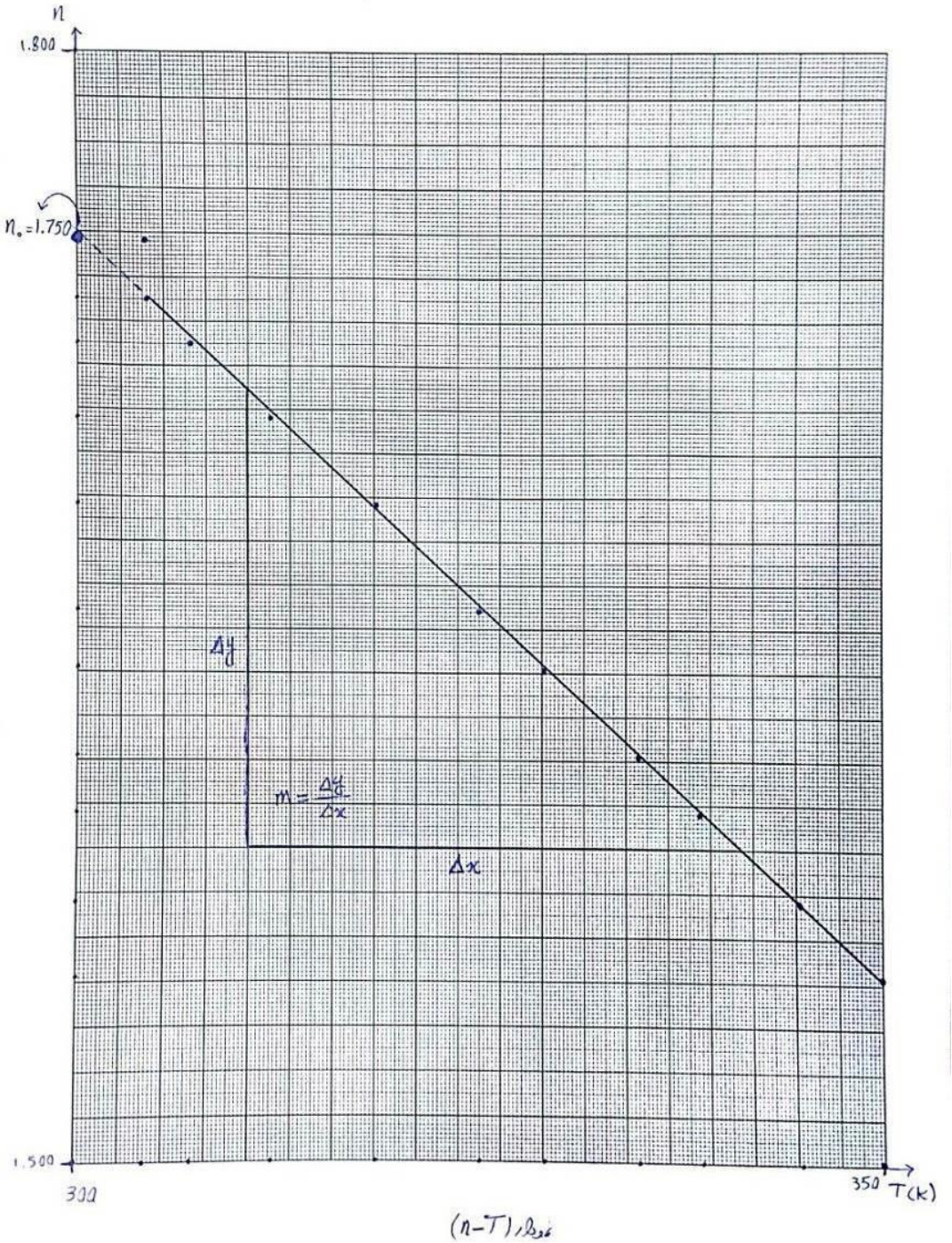
$$n = n_{.}\beta T + n_{.}(۱ - \beta T_{.})$$

حال اگر نمودار خواسته شده در صورت مسئله را رسم کنیم، درمی‌یابیم که می‌توانیم مقدار شیب و عرض از مبدا آن را به راحتی بدست آوریم. (به نمودار پیوست شده دقت کنید.)

$$m = -۰.۰۰۴\ \frac{۱}{K} \qquad \text{و} \qquad n_{.} = ۱.۷۵۰$$

با داشتن m و $n_{.}$، β نیز به راحتی بدست می‌آید.

$$\beta = \frac{m}{n_{.}} = -۰.۰۰۲۳\ \frac{۱}{K}$$


n
1.800
$n_o = 1.750$
Δy
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Δx
1.500
300
350
T(k)

(n-T), Bab