



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۶۰

محمد رضا خدابخشى t.me/@riazi_khodabakhshi

۱. کدام گزینه صحیح است؟

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \right\} \quad (1)$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} \quad (3)$$

$$\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, b = 1 \right\} \quad (2)$$

$$\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q} \quad (4)$$

۲. اگر $\{y \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid y \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $A = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ باشد، آن گاه کدام گزینه در مورد A صحیح است؟

$$\mathbb{Q} \subseteq A \quad (4) \quad A = \mathbb{Q} \quad (3) \quad A \subseteq \mathbb{Q} \quad (2) \quad A \subseteq \mathbb{Z} \quad (1)$$

۳. اگر $A = \left\{ x \mid x = \frac{1}{K}, x \in \mathbb{N}, K \in \mathbb{Z} \right\}$ ، آن گاه A چند عضو دارد؟

$$(1) \text{ بی شمار} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{x}{2} \in \mathbb{R} \right\} \quad (1)$$

$$B = \left\{ \sqrt{-x} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (2)$$

$$C = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 0 \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, -x \in |\mathbb{N}| \right\} \quad (4)$$

۵. اگر $0 < x < 1$ ، حاصل $\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) \cup \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2}\right)$ کدام است؟

$$\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) \quad (1) \quad \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2}\right) \quad (2) \quad \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right) \quad (3) \quad \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}\right) \quad (4)$$

۶. اگر $m > 1$ ، آن گاه $(m^2, m^4) \cap (m^3, m^4)$ کدام است؟

$$(m^3, m^2) \quad (1) \quad (m^2, m^3) \quad (2) \quad (m, m^2) \quad (3) \quad (m, m^3) \quad (4)$$

۷. اگر دوبازه $(2a - 2, 6)$ ، $(-2, a + 1)$ هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، محدوده a کدام است؟

$$-2 < a < 4 \quad (1) \quad -2 < a \leq 4 \quad (2) \quad 3 \leq a \leq 4 \quad (3) \quad 3 < a \leq 4 \quad (4)$$

۸. اگر $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ ، حاصل $(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ کدام است؟

$$\left(\frac{1}{5}, 1\right) \quad (1) \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (2) \quad \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right] \quad (3) \quad \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

۹. عدد ۱۱ عضوی از بازه‌ی $\left[\frac{4a-3}{3}, 2a+13\right)$ باشد، محدوده‌ی a کدام است؟

- (۱) $[-1, 9]$ (۲) $[-1, 13]$ (۳) $(0, 13)$ (۴) $(-1, 2]$

۱۰. اگر $(-\infty, a) \cup [a+1, +\infty) = \mathbb{R}$ ، محدوده‌ی a کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) \emptyset (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $(-\infty, 1)$

۱۱. کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

- (۱) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 \leq x\}$ (۲) $B = \{1, 2, \{1, 2, 3, \dots\}\}$
 (۳) $C = \{\frac{1}{x} | \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $D = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$

۱۲. اگر U مجموعه‌ی مرجع باشد، کدام یک نادرست است؟

- (۱) $U \cup U' = U$ (۲) $U \cap U' = \emptyset$
 (۳) $U - U' = U$ (۴) $U' - U = U$

۱۳. اگر $A = \{\text{مضارب دو رقمی و طبیعی } 6\}$ و $B = \{\text{مضارب دو رقمی و طبیعی } 4\}$ ، مجموعه‌ی $A - B$ چند عضو دارد؟

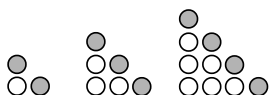
- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۴. دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. اگر اجتماع آن‌ها ۲۷ عضو و اشتراکشان ۸ عضو داشته باشد، مجموعه‌ی $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۱ (۳) ۲۷ (۴) ۳۵

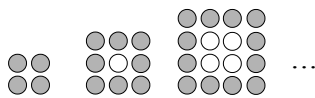
۱۵. اگر $n(A \cup B) = 17$ ، $n(A \cap B) = 1$ ، $n(B \cap A') = 9$ ، آن‌گاه $n(A - B)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹



۱۶. تعداد دایره‌های رنگ نشده در شکل بیستم از الگوی زیر چند تا است؟

- (۱) $n+1$ (۲) $n^2 - n - 1$
 (۳) $\frac{n^2 + n}{2}$ (۴) $\frac{n^2}{2}$



۱۷. در الگوی زیر، تعداد دایره‌های رنگی در شکل سی‌ام چند تا است؟

- (۱) ۱۲۰
(۲) ۱۳۰
(۳) ۱۴۰
(۴) ۱۵۰

۱۸. در الگوی عددی ۳, ۵, ۸, ۱۲, ۱۷, ۰۰۰ مجموع جملات نهم و دهم کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۷۴
(۲) ۸۴
(۳) ۹۴
(۴) ۱۰۴

۱۹. در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم برابر با ۱۱- و جمله‌ی دهم آن ۷ است. کدام جمله از این الگو، ۱۹ است؟

- (۱) دوازدهم
(۲) سیزدهم
(۳) چهاردهم
(۴) پانزدهم

۲۰. در یک الگو، از جمله‌ی دوم به بعد، هر جمله یک واحد از نصف مربع شماره همان جمله بیش تر است. جمله‌ی چهاردهم این الگو کدام است؟

- (۱) ۹۳
(۲) ۹۵
(۳) ۹۷
(۴) ۹۹

۲۱. در دنباله اعداد طبیعی زوج، کدام یک از روابط زیر مجموع جملات n ام و $n+1$ ام را نشان می‌دهد؟

- (۱) $2n$
(۲) $n+2$
(۳) $4n$
(۴) $4n+2$

۲۲. چندمین جمله از دنباله‌ی $tn = \frac{2^{2n-7} - 1}{n+3}$ برابر با صفر است؟

- (۱) دوم
(۲) چهارم
(۳) فاقد جمله صفر است
(۴) هیچ کدام

۲۳. دنباله‌ی $tn = \frac{n-2}{3n+1}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) بی شمار

۲۴. اگر جمله‌ی $n+1$ ام یک دنباله به صورت $\frac{n+2}{n+4}$ باشد، جمله‌ی پانزدهم این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$
(۲) $\frac{5}{7}$
(۳) $\frac{7}{9}$
(۴) $\frac{9}{11}$

۲۵. مجموع پانزده جمله‌ی اول از دنباله‌ی $tn = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{16}$
(۲) $\frac{16}{25}$
(۳) $\frac{5}{16}$
(۴) $\frac{16}{5}$

۲۶. دنباله‌ی $t_n = \frac{23}{2n+1}$ چند جمله‌ی صحیح دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۲۷. مقدار جمله‌ی مشترک دو دنباله‌ی $a_n = \frac{n-3}{n+1}$ ، $b_n = \frac{n-2}{n+6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۸. رابطه‌ی $t_n = (m-2)n^2 + \frac{m}{2}n + 1$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۹. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۲- است و از جمله‌ی دوم به بعد، هر جمله از رابطه‌ی $a_n = a_{n-1} + 4$ به دست می‌آید. جمله‌ی یازدهم این دنباله، چند برابر قدرنسبت است؟

- (۱) $۸٫۵$ (۲) $۹٫۵$ (۳) $۱۰٫۵$ (۴) $۱۲٫۵$

۳۰. در یک دنباله‌ی حسابی $a_4 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 75$ ، حاصل $a_7 + a_8$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۲۷

۳۱. در دنباله‌ی $-3, x, 5, y, z, \dots$ حاصل $x + y + z$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۳ (۴) ۲۵

۳۲. اگر قدرنسبت دنباله‌ی حسابی $t_n = dn + 1$ را ۲ برابر کنیم، جمله‌ی پانزدهم آن چقدر افزایش می‌یابد؟

- (۱) $2d$ (۲) $3d$ (۳) $14d$ (۴) $15d$

۳۳. بین دو عدد ۳۲ و ۸۴ سه عدد به گونه‌ای قرار می‌دهیم که یک دنباله‌ی حسابی ساخته شود. مجموع این سه عدد کدام است؟

- (۱) ۱۵۴ (۲) ۱۷۴ (۳) ۱۹۴ (۴) ۲۱۴

۳۴. در یک دنباله‌ی حسابی $a_{20} = 43$ ، $a_4 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{10} = 24$ ، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۵. در یک دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی $5t_1 + 75d = 125$ برقرار است. جمله‌ی شانزدهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۳۶. اشتراک بازه‌های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر $(-\frac{2}{3}, 1)$ است. اجتماع بازه‌های $(-2a - 1, b)$ و (b, a) کدام است؟

(۱) $(-3, 1)$ (۲) $(-1, \frac{2}{3})$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$

۳۷. اگر $n(A) = 20$ و $n(B) = 10$ و $2n(A \cap B) = n(B)$ باشد، حاصل $n(A' \cap B)$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۳۰

۳۸. حاصل $A = ([-6, 4] \cap (-\infty, 1]) - [0, 2]$ کدام است؟

(۱) $[-6, 0]$ (۲) $[-6, 0]$ (۳) $[-6, 2]$ (۴) $[2, 4]$

۳۹. $\frac{1}{3}$ از تعداد اعضای مجموعه A با مجموعه B و $\frac{2}{5}$ از تعداد اعضای B با A مشترک هستند. اگر $n(A \cup B) = 45$ باشد، در این صورت $n(A \cap B)$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۴۰. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه $A' - B$ برابر کدام مجموعه زیر است؟

(۱) $A - B'$ (۲) $A \cap B'$ (۳) $A' \cap B$ (۴) $B' - A$

۴۱. اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح باشد، $A' = \{5, 6, 7, 8\}$ و $B' = \{7, 8, 9, 10\}$ باشد، آنگاه مجموعه $(A \cup B)'$ چندعضوی است؟

(۱) ۲ عضو (۲) ۵ عضو (۳) ۷ عضو (۴) ۸ عضو

۴۲. مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B ، کدام است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

۴۳. در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت، حاصل ضرب سه جمله‌ی متوالی ۶۴ است. حاصل ضرب اولین و سومین جمله‌ها از این سه جمله کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴۴. اگر حاصل ضرب پانزده جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی هندسی ۱۰۰ باشد، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

(۱) $\sqrt[15]{100}$ (۲) $\frac{100}{15}$ (۳) 100^{15} (۴) 15×100

۴۵. بین دو عدد ۲ و ۲۰۰ نوزده عدد مثبت چنان قرار داده ایم که یک دنباله ی هندسی تولید شود جمله ی وسط این دنباله کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

۴۶. دنباله ی هندسی $\frac{1}{4}, x, 2$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله ی اول آن کدام است؟

- $\frac{41}{32}$ (۱) $\frac{21}{16}$ (۲) $\frac{11}{8}$ (۳) $\frac{23}{16}$ (۴)

۴۷. در الگوی زیر، هر شکل از به هم وصل شدن وسط های اضلاع مثلث داخلی تشکیل می شود. اگر مساحت شکل اول S باشد، مساحت قسمت رنگی شکل n ام کدام است؟

- $\frac{S}{4^{n-1}}$ (۱) $\frac{S}{3^n}$ (۲) $\frac{S}{2^{n-1}}$ (۳) $\frac{S}{2}$ (۴)

۴۸. بین اعداد $\frac{3}{4}, 48$ چهار عدد به گونه ای قرار می دهیم که یک دنباله ی هندسی تشکیل شود. جمله ی سوم این دنباله کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۲ (۴)

۴۹. اعداد $b, 9, 3\sqrt{3}, 3^a$ جملات متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. واسطه ی هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}$ و bb کدام است؟

- $3\sqrt{3}$ (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴)

۵۰. در یک دنباله ی هندسی، مجموع سه جمله ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله ی اول آن ۱۵۳ است. جمله ی اول چند برابر جمله ی پنجم است؟

- $\frac{81}{16}$ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

۵۱. در یک دنباله ی هندسی مجموع هشت جمله ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله ی اول آن است. جمله ی هفتم چند برابر جمله ی اول است؟ (سراسری - ریاضی ۸۵)

- $\frac{1}{16}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{5}{32}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۵۲. در یک دنباله ی هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله ی اول آن ۳ است. مجموع ۶ جمله ی اول کدام است؟

- $10,8$ (۱) $11,2$ (۲) $12,6$ (۳) $13,4$ (۴)

۵۳. تویی را از ارتفاع ۴۰ متری زمین رها می کنیم. توپ هر بار که زمین می خورد به اندازه‌ی نصف ارتفاع قبلی بالا می آید. توپ بعد از چهارمین بار که زمین می خورد تا چه ارتفاعی اوج می گیرد؟

- ۲/۵ (۱) ۵ (۲) ۷/۵ (۳) ۱۶ (۴)

۵۴. در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی، باشند چندمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی صفر است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

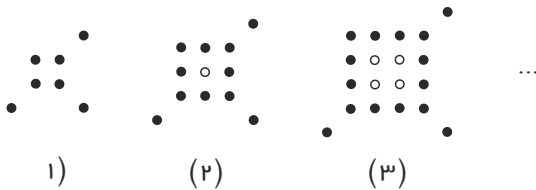
۵۵. در یک دنباله‌ی حسابی، جملات اول، نهم و چهل و نهم به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۵۶. اگر a عضوی از مجموعه‌ی $(A \cup B) - (C - D)$ باشد، کدام گزینه حتماً درست است؟

- $a \in A$ (۱) $a \in B$ (۲) $a \in C$ (۳) $a \notin C$ یا $a \in D$ (۴)

۵۷. در چه مرحله‌ای از الگوی زیر، تعداد دایره‌های مشکی برابر ۱۰۳ است؟

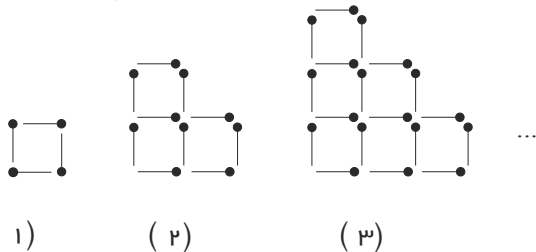


- ۱۵ (۱)
۲۵ (۲)
۳۰ (۳)
۳۲ (۴)

۵۸. در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر از دانش آموزان دارای برادر و ۱۴ نفر دارای خواهر هستند. اگر تعداد دانش آموزان تک فرزند را با x نمایش دهیم، محدوده‌ی حسابی x کدام است؟

- $0 \leq x \leq 16$ (۱) $4 \leq x \leq 16$ (۲) $4 \leq x \leq 18$ (۳) $0 \leq x \leq 18$ (۴)

۵۹. با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحله‌ی هفتم کدام است؟



- ۵۳ (۱)
۵۴ (۲)
۶۹ (۳)
۷۰ (۴)

۶۰. دنباله‌ی هندسی $\left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}, \dots, \frac{1}{125}, \frac{1}{5}$ چند جمله دارد؟ (k زوج است.)

(۴) $3k^2$

(۳) $3k$

(۲) $\frac{k^2}{2}$

(۱) $\frac{k}{2}$

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۶۰ محمدرضا خدابخش t.me/@riazi_khodabakhshi

موضوع ریاضی سال دهم (* مجموعه، الگو و دنباله * مثلثات)

۱. گزینه ۲ بررسی گزینه ها:

(۱) مجموعه $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ همان $\mathbb{Z} - \{0\}$ است. با مقایسه با تعریف مجموعه \mathbb{Q} درمی یابیم که b باید عضو $\mathbb{Z} - \{0\}$ باشد اما a نمی تواند! چون $a = 0$ نیز که منجر به $\frac{a}{b} = 0$ می شود نیز عددی گویا است و تعریف فوق آن را رد می کند.

(۲) مجموعه \mathbb{Q} اعداد گویایی که مخرج آن ها ۱ باشد، عدد صحیح اند. پس گزینه ی صحیح همین است.

(۳) مجموعه \mathbb{N} اعداد طبیعی زیر مجموعه ای از اعداد صحیح است. بنابراین اشتراک آن دو برابر با مجموعه \mathbb{N} کوچک تر (یعنی \mathbb{N}) خواهد بود و نه مجموعه \mathbb{Q} صحیح.

(۴) این مجموعه را با اعضایش تشکیل می دهیم:

$$\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots\}$$

در این مجموعه اعداد گویایی مثل $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$ و اعداد گنگی مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ هم زمان حضور دارند. پس این مجموعه نمی تواند زیر مجموعه ای از اعداد گویا باشد.

۲. گزینه ۲ اعضای A همگی کسرهایی به شکل $\frac{\text{عدد طبیعی فرد}}{\text{عدد صحیح غیر صفر}}$ هستند. پس کسرهایی مثل $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{-6}$ در این مجموعه

حضور دارند؛ پس A نمی تواند زیرمجموعه \mathbb{Z} باشد (یعنی اعضایش غیر صحیح نیز هستند). از طرفی کسرهایی با صورت زوج مثل $\frac{4}{7}$

در این مجموعه نیست. پس A نمی تواند برابر با \mathbb{Q} باشد. $(Q \subseteq A)$ نیز به همین ترتیب نقض می شود. پس تنها گزینه ی صحیح ۲ است.

۳. گزینه ۲ را این گونه ترجمه می کنیم: اعضای A باید اعداد طبیعی باشند؛ از طرفی، هر یک از آن ها می بایست برابر با معکوس یک عدد هم نیز باشند. تنها عدد صحیح که معکوس آن یک عدد طبیعی است، $K = 1$ است که معکوسش نیز ۱ می شود و عددی طبیعی است. پس: $A = \{1\}$ و یک عضو دارد.

۴. گزینه ۳ بررسی گزینه ها:

(۱) A شامل x هایی است که خود حقیقی هستند و هم نصف آن ها و می دانیم که نصف هر عدد حقیقی، خودش نیز حقیقی است. پس A شامل همه اعداد حقیقی است و تهی نیست.

(۲) مجموعه B مجموعه ای است که در آن، قرینه اعداد حقیقی، زیرا رادیکال می روند. از آن جا که از اعداد منفی نمی توان جذر گرفت، فقط $-x$ هایی در این مجموعه قرار می گیرند که نامنفی باشند و این یعنی x ها می تواند مثبت یا صفر باشد. پس $\sqrt{-x}$ ساختن غیر ممکن نیست و این مجموعه تهی نخواهد بود.

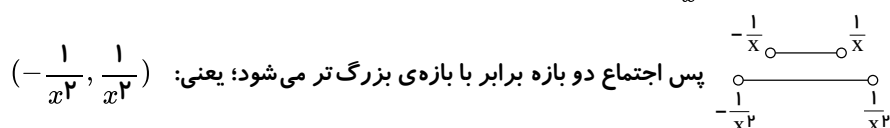
(۳) مجموعه C تلاش می کند x^2 هایی بسازد که کوچک تر یا مساوی با صفر باشند. از آن جا که x^2 حتماً عددی نامنفی است، تنها حالت ممکن برای آن $x^2 = 0$ خواهد بود و از آن جا $x = 0$ به دست می آید. از طرفی قرار بوده که x عدد طبیعی باشد و $x = 0$ عضو مجموعه C اعداد طبیعی نیست. بنابراین C عضوی نخواهد داشت.

(۴) D شامل اعضایی است که خودشان صحیح هستند و قرینه شان عددی طبیعی است.

و این یعنی: $D = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ پس D بی شمار عضو دارد.

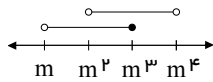
۵. گزینه ۱ چون x عددی بین ۰ و ۱ است، وقتی به توان ۲ می رسد کوچک تر می شود، یعنی: $x^2 < x$

و در نتیجه: $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ (کسری که مخرجش بزرگ تر است، خودش کوچک تر است) بنابراین بازه ها به صورت زیر خواهند بود.



۶. گزینه ۲ اعداد بزرگ تر از ۱ هرچه توان شان بزرگ تر باشد، بزرگ تر می شوند پس داریم:

$$m < m^2 < m^3 < m^4$$

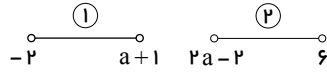


و بازه‌های بالا به این شکل خواهند بود.

اشتراک دو بازه می‌شود: $(m^2, m^3]$

۷. گزینه ۳

بازه‌ها به این شکل باشند تا عضو مشترکی نداشته باشند:



پس باید: (۱) بازه سمت راست از جایی که بازه اول و پایین می‌پذیرد (به بعد) آغاز شود. یعنی:

$$a + 1 \leq 2a - 2 \Rightarrow 1 + 2 \leq 2a - a \Rightarrow 3 \leq a$$

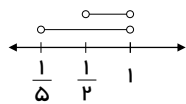
(۲) در بازه دوم، شروع بازه از پایان آن کوچک تر باشد یا حداکثر با آن مساوی باشد:

$$2a - 2 \leq 6 \Rightarrow 2a \leq 8 \Rightarrow a \leq 4$$

$$3 \leq a \leq 4 \text{ در نتیجه:}$$

۸. گزینه ۳ بازه‌های A_2 تا A_5 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), A_3 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), A_4 = \left(\frac{1}{4}, 1\right), A_5 = \left(\frac{1}{5}, 1\right)$$



اجتماع این بازه‌ها برابر با $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ و اشتراکشان $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ است؛ این دو مجموعه را روی نمودار ببینید:

حاصل تفاضل این دو بازه عبارت است از: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$

دقت: $x = \frac{1}{2}$ از بازه $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ حذف نمی‌شوند. بنابراین، بازه‌ی حاصل از سمت $x = \frac{1}{2}$ بسته باقی می‌ماند.

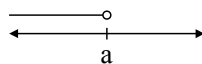
۹. گزینه ۱ برای آن که ۱۱ عضو این بازه باشد، باید نامساوی‌های $\frac{4a-3}{3} \leq 11 < 2a+13$ هم‌زمان برقرار باشند:

$$\frac{4a-3}{3} \leq 11 \xrightarrow{\times 3} 4a-3 \leq 33 \Rightarrow 4a \leq 36 \xrightarrow{\div 4} a \leq 9$$

$$11 < 2a+13 \Rightarrow 11-13 < 2a \Rightarrow -2 < 2a \xrightarrow{\div 2} -1 < a$$

و اشتراک این دو پاسخ عبارت است از: $-1 < a \leq 9$

۱۰. گزینه ۲



بازه‌ی $(-\infty, a)$ روی محور به صورت مقابل است:

بازه‌ی $[a+1, +\infty)$ باید از $x = a$ یا مقادیر سمت چپ آن آغاز شود تا اجتماع هر دو بازه بتواند کل محور را بپوشاند؛ یعنی آغاز آن باید کوچک‌تر یا مساوی با ۲ باشد:

$$a + 1 \leq a \xrightarrow{\times 3} 1 \leq a - a \Rightarrow 1 \leq 0 \text{ و این غیرممکن است}$$

یعنی هیچ یک از مقادیر a نمی‌توانند این شرایط را به وجود آورند.

۱۱. گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) می‌دانیم که اعداد بازه‌ی $(0, 1)$ مربعشان از خودشان کوچک‌تر است. از آن‌جا که x باید عدد طبیعی باشد، در بازه‌ی $(0, 1)$ پاسخی نخواهد داشت؛ فقط می‌ماند حالت $x^2 = x$ که فقط به ازاء $x = 0$ و $x = 1$ برقرار است؛ و باز چون x عدد طبیعی است، تنها جواب قابل قبول $x = 1$ خواهد بود. پس:

$$A = \{1\} \rightarrow \text{متناهی است}$$

(۲) مجموعه‌ی B سه عضوی است. پس متناهی است.

دقت: در B عضوی به صورت $\{1, 2, 3, \dots\}$ وجود دارد که خودش یک مجموعه‌ی نامتناهی است، اما برای B فقط یک عضو محسوب می‌شود.

(۳) $\frac{1}{x}$ هایی که مخرجشان عددی صحیح باشد و خود $\frac{1}{x}$ هم عدد صحیح باشد، فقط $\frac{1}{1}$ و $\frac{1}{-1}$ هستند. پس $C = \{-1, 1\}$ و متناهی است.

(۴) مجموعه‌ای بی‌پایان از یک سلسله عدد طبیعی است که هر عضو از قبلی، یک عضو بیش‌تر دارد. پس این مجموعه نامتناهی است.

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_4 = a \times 4 + b = -11 \Rightarrow 4a + b = -11 \\ t_{10} = a \times 10 + b = 7 \Rightarrow 10a + b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - b = 11 \\ 10a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{6} = 3$$

$$4a + b = -11 \xrightarrow{a=3} 4 \times 3 + b = -11 \Rightarrow b = -12 - 11 = -23 \Rightarrow t_n = 3n - 23$$

$$t_n = 19 \Rightarrow 3n - 23 = 19 \Rightarrow 3n = 23 + 19 \Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow n = \frac{42}{3} = 14$$

پس t_{14} برابر با ۱۹ است.

۲۰. گزینه ۴ جمله‌ی عمومی این الگو عبارت است از $t_n = \frac{n^2}{2} + 1$ بنابراین:

$$t_{14} = \frac{14^2}{2} + 1 = \frac{196}{2} + 1 = 98 + 1 = 99$$

۲۱. گزینه ۴ دنباله‌ی اعداد طبیعی زوج به صورت $2, 4, 6, 8, \dots$ بوده و جمله عمومی آن $t_n = 2n$ است. بنابراین:

$$t_n + t_{n+1} = 2n + 2(n+1) = 2n + 2n + 2 = 4n + 2$$

۲۲. گزینه ۳

$$t_n = \frac{2^{2n-7} - 1}{n+3} = 0 \Rightarrow 2^{2n-7} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{2n-7} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{2n-7} = 2^0 \Rightarrow 2n - 7 = 0 \Rightarrow 2n = 7 \Rightarrow n = \frac{7}{2}$$

و این جواب قابل قبول نیست؛ چرا که n شماره‌ی جمله است و باید عددی طبیعی باشد. بنابراین این دنباله جمله‌ای با مقدار صفر ندارد. دقت: کسری که حاصل آن صفر است، قطعاً صورت آن برابر با صفر بوده است.

۲۳. گزینه ۲ چند جمله از این دنباله را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = \frac{1-2}{3+1} = \frac{-1}{4}$$

$$t_2 = \frac{2-2}{3 \times 2 + 1} = 0$$

و از $n = 3$ به بعد صورت، عددی مثبت می‌شود.

$$t_3 = \frac{3-2}{3 \times 3 + 1} = \frac{1}{10}$$

و حاصل تقسیم آن بر مخرج (که آن هم عددی مثبت است) مثبت خواهد شد. پس این دنباله فقط یک جمله منفی دارد.

۲۴. گزینه ۴

$$t_{2n+1} = \frac{n+3}{n+4} \Rightarrow \text{باید } t_n \text{ را به دست آوریم}$$

$$2n+1 = a \Rightarrow 2n = a-1 \Rightarrow n = \frac{a-1}{2}$$

$$t_a = \frac{\frac{a-1}{2} + 3}{\frac{a-1}{2} + 4} \Rightarrow t_{15} = \frac{\frac{15-1}{2} + 3}{\frac{15-1}{2} + 4} = \frac{9}{11}$$

۲۵. گزینه ۱

دنباله‌ی فوق به صورت مقابل است:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots$$

مجموع جملات آن تا جمله پانزدهم عبارت است از:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{16} = \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$$

۲۶. گزینه ۲ t_n زمانی عدد صحیح است که صورت آن بر مخرج آن بخش پذیر باشد. از آن جا که ۲۳ عددی اول است، فقط دو شمارنده طبیعی ۱ و ۲۳ را دارد و می دانیم که $-۲۳, -۱$ نیز شمارنده های صحیح آن هستند. پس $۲n+۱$ اگر چهار مقدار $۱, ۲۳, -۱, ۲۳$ را اختیار کند، حاصل t_n عددی صحیح خواهد بود:

عددی طبیعی نیست. غیر قابل قبول است. $۲n+۱=۱ \Rightarrow ۲n=۰ \Rightarrow n=۰$

$۲n+۱=۲۳ \Rightarrow ۲n=۲۲ \Rightarrow n=۱۱$

عددی طبیعی نیست. غیر قابل قبول است. $۲n+۱=-۱ \Rightarrow ۲n=-۲ \Rightarrow n=-۱$

عددی طبیعی نیست. غیر قابل قبول است. $۲n+۱=-۲۳ \Rightarrow ۲n=-۲۴ \Rightarrow n=-۱۲$

پس فقط ۱ جمله صحیح دارد و آن هم جمله ۱۱ ام آن است.

۲۷. گزینه ۳ جمله مشترک یعنی جمله ای که در معادله $a_n = b_n$ صدق کند.

$$\Rightarrow \frac{n-۳}{n+۱} = \frac{n-۲}{n+۶}$$

طرفین وسطین

$$\rightarrow n^2 + 3n - 18 = n^2 - n - 2 \Rightarrow 3n + n = 18 - 2 \Rightarrow 4n = 16 \Rightarrow n = 4$$

حال با استفاده از $n = 4$ مقدار جمله مشترک را محاسبه می کنیم:

$$a_4 = \frac{4-3}{4+1} = \frac{1}{5}$$

۲۸. گزینه ۲ از آن جا که دنباله ی حسابی یک الگوی خطی است، جمله ی عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است؛ یعنی بر حسب

متغیر n از درجه ی اول است. بنابراین ضریب جمله ی n^2 باید صفر باشد:

$$n^2 \text{ ضریب } = m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$t_n = \frac{2}{2}n + 1 \Rightarrow t_n = n + 1$$

پس t_n برابر است با:

حال جمله ی هفتم را به دست می آوریم:

$$t_7 = 7 + 1 = 8$$

۲۹. گزینه ۱ معنی رابطه ی $a_n = a_{n-1} + 4$ آن است که هر جمله از اضافه شدن ۴ به جمله قبلی به دست می آید. پس قدر نسبت برابر ۴ است؛ جمله ی اول هم برابر ۲ است، پس می توانیم جمله ی عمومی را تشکیل دهیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \times 4 = -2 + 4n - 4 = 4n - 6$$

$$t_{10} = 4 \times 10 - 6 = 34$$

جمله ی دهم برابر است با:

و نسبت جمله ی دهم و قدر نسبت عبارت است از:

$$\frac{t_{10}}{d} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$

۳۰. گزینه ۲ از قانون اندیس ها در دنباله ی حسابی استفاده می کنیم که می گوید:

$$m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p = a_q$$

بنابراین:

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 75$$

$$\Rightarrow (a_7 + a_8) + (a_7 + a_8) + (a_7 + a_8) = 75 \Rightarrow 3(a_7 + a_8) = 75$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 = \frac{75}{3} = 25$$

۳۱. گزینه ۳ در دنباله ی حسابی، هر جمله (غیر از جمله اول) میانگین جملات طرفین خود است:

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$5 = \frac{x+y}{2} \xrightarrow{x=1} 5 = \frac{1+y}{2} \Rightarrow 10 = 1+y \Rightarrow y = 9$$

$$y = \frac{5+z}{2} \xrightarrow{y=9} 9 = \frac{5+z}{2} \Rightarrow 18 = 5+z \Rightarrow z = 13$$

$$\Rightarrow x+y+z = 1+9+13 = 23$$

۳۲. گزینه ۴ نکته: در هر دنباله ی حسابی، ضریب n در جمله ی عمومی، قدر نسبت دنباله است.

جمله ی پانزدهم در این دنباله عبارت است از:

$$t_{15} = d \times 15 + 1 = 15d + 1$$

اگر قدرنسبت را دو برابر کنیم، دنباله‌ی جدیدی به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$t'_n = (2d)n + 1$$

و در این دنباله‌ی جدید، جمله‌ی پانزدهم برابر است با:

$$t'_{15} = (2d)15 + 1 = 30d + 1$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با:

$$t'_{15} - t_{15} = (30d + 1) - (15d + 1) = 15d$$

۳۳. گزینه ۲

دنباله‌ی حسابی به فرم مقابل خواهد بود:

$$32 \overset{+d}{\curvearrowright}, \dots, \overset{+d}{\curvearrowright}, \dots, \overset{+d}{\curvearrowright}, \dots, \overset{+d}{\curvearrowright}, 84$$

$$\Rightarrow 32 + 4d = 84 \Rightarrow 4d = 52 \Rightarrow d = \frac{52}{4} = 13$$

$$\Rightarrow 32 \overset{+13}{\curvearrowright}, \underbrace{45, 58, 71, 84}$$

$$\text{مجموع} = 45 + 58 + 71 = 174$$

۳۴. گزینه ۲ نکته: قدرنسبت دنباله‌ای با جملات a_n, a_m از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

نکته: قانون اندیس‌ها $m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{10} = 24$$

از قانون اندیس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a_6 + a_8 = 2a_7, \quad a_5 + a_9 = 2a_7$$

$$\frac{a_4 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{10}}{a_6 + a_8 = 2a_7} \rightarrow 2a_7 + 2a_7 + 2a_7 = 24 \Rightarrow 6a_7 = 24 \Rightarrow a_7 = 4$$

با معلوم بودن a_7, a_{20} ، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_{20} - a_7}{20 - 7} = \frac{43 - 4}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

۳۵. گزینه ۳

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی عبارت است از:

$$t_{16} = t_1 + (15)d$$

پس جمله‌ی شانزدهم عبارت است از:

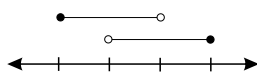
از فرض مسئله داریم:

$$5t_1 + 75d = 125 \Rightarrow 5(t_1 + 15d) = 125$$

$$\Rightarrow \underbrace{t_1 + 15d}_{t_{16}} = \frac{125}{5} = 25 \Rightarrow t_{16} = 25$$

۳۶. گزینه ۴ برای آنکه اشتراک بازه‌های $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر با $(-\frac{2}{3}, 1)$ باشد، باید روی محور چنین وضعیتی داشته

باشند:



بنابراین اشتراک آنها (b, a) است:

$$(b, a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(-2a - 1, b) = (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}) = (-3, -\frac{2}{3})$$

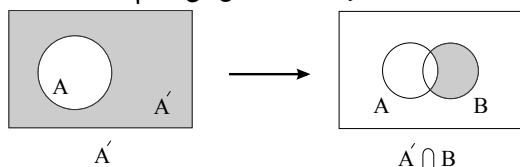
$$(b - a) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

پس:

$$(-2a - 1, b) \cup (b, a) = (-3, -\frac{2}{3}) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$= (-3, 1) - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

۳۷. گزینه ۳ مسئله $n(A' \cap B)$ یعنی تعداد اعضای $A' \cap B$ را خواسته است. آن را روی نمودار ون نمایش می دهیم:



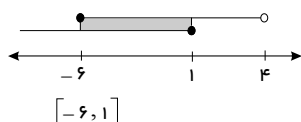
پس تعداد اعضای $A' \cap B$ عبارتست از:

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$$

فرض های مسئله را ببینید:

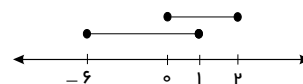
$$\left. \begin{aligned} n(B) &= 10 \\ 2n(A \cap B) &= 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A' \cap B) = 10 - 5 = 5$$

۳۸. گزینه ۱ ابتدا حاصل $[-6, 4) \cap (-\infty, 1]$ را با استفاده از محور بدست می آوریم:



حال، اعضای بازه $[0, 2)$ را از این بازه کم می کنیم:

$$[-6, 1] - [0, 2) = [-6, 0)$$



باز هم استفاده از محور، بهترین راه حل است.

دقت: چون خود صفر را از بازه $[-6, 1]$ خارج کرده ایم، جای خالی آن باقیمانده و انتهای بازه، باز است.

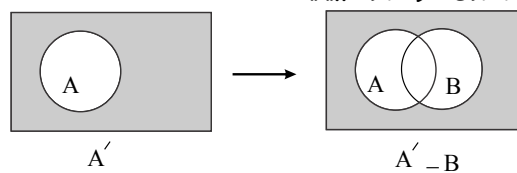
۳۹. گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n(A) = n(A \cap B) \xrightarrow{\times 3} n(A) = 3n(A \cap B) \\ \frac{2}{5}n(B) = n(A \cap B) \xrightarrow{\times \frac{5}{2}} n(B) = \frac{5}{2}n(A \cap B) \\ n(A \cup B) = 45 \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 45 \end{cases}$$

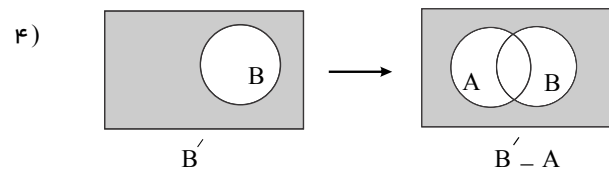
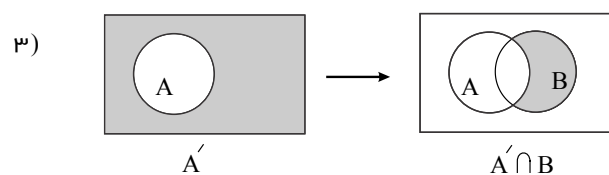
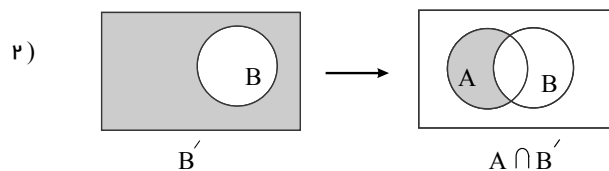
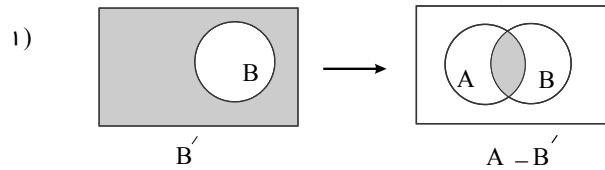
$$\Rightarrow 3n(A \cap B) + \frac{5}{2}n(A \cap B) - n(A \cap B) = 45$$

$$\Rightarrow (3 + \frac{5}{2} - 1) \times n(A \cap B) = 45 \Rightarrow \frac{9}{2}n(A \cap B) = 45 \xrightarrow{\times \frac{2}{9}} n(A \cap B) = \frac{2}{9} \times 45 = 10$$

۴۰. گزینه ۴ مجموعه $A' - B$ را روی نمودار ون ببینید:



حالا گزینه ها را روی نمودار ون بررسی می کنیم:



۴۱. گزینه ۱ می دانیم: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

بنابراین:

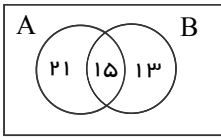
$$n((A \cup B)') = n(A' \cap B')$$

حال $A' \cap B'$ را بدست می آوریم:

$$A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{7, 8, 9, 10\} = \{7, 8\}$$

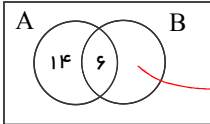
$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = 2$$

۴۲. گزینه ۳ طبق فرض، پیش از تغییر، اعضا به صورت زیر توزیع شده بودند:



۱۶ عضو از A برداشته ایم که ۹ عضو آن در اشتراک دو مجموعه حضور داشته اند، پس ۹ عضو از اشتراک کم می شود و ۷ عضو هم از باقیمانده A :

$$۱۳ + ۹ = ۲۲$$



دقت: از B چیزی حذف نشده. بنابراین تعداد آن نباید تغییر کند.

حال تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را در وضعیت جدید محاسبه می کنیم:

$$n(A \cup B) = ۱۴ + ۶ + ۲۲ = ۴۲$$

۴۳. گزینه ۳ وقتی در دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات متوالی مورد سؤال قرار می گیرد، ترجیحاً آن سه جمله را به صورت xr و x و $\frac{x}{r}$ در نظر می گیریم تا جمله ی وسط به سادگی به دست آید:

$$\text{جمله سه جمله} = \frac{x}{r} \times x \times xr = x^3 = ۶۴ \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x = ۴$$

$$\text{جمله ی طرفین} = \frac{x}{r} \times xr = x^2 = ۱۶$$

۴۴. گزینه ۱ چون صحبت از حاصل ضرب جملات متوالی به میان آمده جملات را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{x}{r^7} & \frac{x}{r^6} & \frac{x}{r^5} & \frac{x}{r^4} & \frac{x}{r^3} & \frac{x}{r^2} & \frac{x}{r} & x & xr & xr^2 & xr^3 & xr^4 & xr^5 & xr^6 & xr^7 \\ \uparrow & & & & & & & \text{جمله ی وسط} & & & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{جمله ی هشتم} = \frac{x}{r^7} \times \dots \times x \times \dots \times xr^7 = x^{15} = ۱۰۰ \xrightarrow{\sqrt[15]{100}} = \text{جمله ی هشتم}$$

۴۵. گزینه ۴ دنباله ی حاصل به صورت زیر است: $۲, \dots, \dots, \dots, \dots, ۲۰۰$ ، جمله ی وسط، جمله ۹

در هر دنباله ی هندسی، مربع جمله ی وسط، برابر با حاصل ضرب حالت متساوی الفاصله از طرفین خود است:

$$(\text{جمله ی وسط})^2 = ۲ \times ۲۰۰ = ۴۰۰ \Rightarrow \text{جمله ی وسط} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

۴۶. گزینه ۲ مربع جمله ی دوم باید برابر با حاصل ضرب جملات اول و سوم باشد: $x^2 = ۲ \times \frac{1}{4} = ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

از آن جا که دنباله ی نزولی نیست، x نمی تواند ۱ باشد پس $x = -1$ را برمی گزینیم که یک دنباله یک در میان مثبت و منفی داشته باشیم:

در این صورت قدر نسبت $-\frac{1}{4}$ خواهد بود. حال دنباله را تکمیل می کنیم:

$$۲, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{256}, \dots \Rightarrow \text{مجموع جمله ی اول} = ۲ + (-1) + \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{8} + (-\frac{1}{8}) = \frac{21}{16}$$

۴۷. گزینه ۱ نکته: از به هم وصل شدن وسط های اضلاع هر چند ضلعی، شکلی تشکیل می شود که محیط آن نصف محیط و مساحت

آن $\frac{1}{4}$ مساحت شکل اصلی است.

پس مساحت قسمت رنگی در هر مرحله $\frac{1}{4}$ می شود. دنباله ی مساحت ها به صورت زیر است:

$$S, \frac{S}{4}, \frac{S}{16}, \dots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = S \\ r = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow t_n = \text{مساحت شکل } n\text{م} = S \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = S \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{S}{4^{n-1}}$$

۴۸. گزینه ۲

$$\begin{array}{ccccccc} \times r & \times r & \times r & \times r & \times r & & \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & \\ \frac{3}{2} & & & & & & \end{array}$$

دنباله‌ی حاصل به صورت مقابل است: $\frac{3}{2}, \dots, \dots, \dots, \dots, 48$

$$48 = \frac{3}{2} \times r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{48}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \times 48}{3} = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\text{سوم جمله‌ی سوم} = t_3 = t_1 r^2 = \frac{3}{2} \times 2^2 = 3 \times 2 = 6$$

۴۹. گزینه ۱

قدرنسبت این دنباله عبارت است از:

$$r = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$b = 9r = 9\sqrt{3}$$

از طرفی b از ضرب شدن r در ۹ به دست آمده:

3^a نیز وقتی در r ضرب شده، $3\sqrt{3}$ را ساخته است:

$$3^a \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^a = 3 \Rightarrow a = 1$$

پس $a\sqrt{3}$ برابر است با $\sqrt{3}$ و واسطه‌ی هندسی $\sqrt{3}$ و $9\sqrt{3}$ عبارت است از:

$$\text{واسطه‌ی هندسی} = \sqrt{a\sqrt{3} \times b} = \sqrt{\sqrt{3} \times 9\sqrt{3}} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

دقت: واسطه‌ی هندسی دو عدد هم علامت، برابر است با جذر حاصل ضرب آن‌ها.

۵۰. گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 153 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 136 \end{array} \right\} \Rightarrow 136 + t_4 + t_5 + t_6 = 153$$

$$\Rightarrow t_4 + t_5 + t_6 = 153 - 136 = 17$$

$$\frac{t_4 + t_5 + t_6}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{t_1 r^3 + t_1 r^4 + t_1 r^5}{t_1 + t_1 r + t_1 r^2} = \frac{t_1 r^3 (1 + r + r^2)}{t_1 (1 + r + r^2)} = \frac{17}{136}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_1}{t_5} = \frac{t_1}{t_1 r^4} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{5}{4} \quad \text{۵۱. گزینه ۲}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} + \frac{t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{5}{4} \Rightarrow 1 + \frac{t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{t_1 r^4 + t_1 r^5 + t_1 r^6 + t_1 r^7}{t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1 r^4 (1 + r + r^2 + r^3)}{t_1 (1 + r + r^2 + r^3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt[4]{\quad}} r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_7}{t_1} = \frac{t_1 r^6}{t_1} = r^6 = (r^2)^3 = \left(d \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۵۲. گزینه ۳

$$\begin{aligned} t_1 + t_3 &= 1 \Rightarrow t_1 + t_1 r^2 = 1 \Rightarrow t_1 (1 + r^2) = 1 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &= t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3 = t_1 (1 + r + r^2 + r^3) \\ &= t_1 \left((1 + r^2) + (r + r^3) \right) = t_1 \left((1 + r^2) + r(1 + r^2) \right) \\ &= t_1 \underbrace{(1 + r^2)}_1 (1 + r) = 1 + r = 3 \Rightarrow r = 2 \end{aligned}$$

$$t_1 + t_3 = 1 \Rightarrow t_1 + t_1 \times r^2 = 1 \xrightarrow{r=2} t_1 + 4t_1 = 1 \Rightarrow 5t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5} + \frac{32}{5} = \frac{63}{5} = 12.6$$

۵۳. گزینه ۱

دنباله‌ی ارتفاع‌های توپ از زمین، یک دنباله‌ی هندسی است با $t_1 = 40$ ، $r = \frac{1}{2}$

$$40, 20, 10, 5, 2.5, \dots$$

بنابراین جمله‌ی پنجم این دنباله 2.5 است.

۵۴. گزینه ۳ در دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم و نهم را تشکیل می‌دهیم:

$$t_3 = t_1 + 2d$$

$$t_7 = t_1 + 6d$$

$$t_9 = t_1 + 8d$$

این جملات قرار است که جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، پس مربع جمله‌ی وسط برابر است با حاصل ضرب جملات طرفین:

$$t_7^2 = t_3 t_9 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 10t_1 d + 16d^2 \Rightarrow 20d^2 = -2t_1 d \xrightarrow{\div d}$$

$$20d = -2t_1 = d = -\frac{t_1}{10}$$

حال جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی را به دست می‌آوریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d = t_1 + (n-1) \times \frac{-t_1}{10} = t_1 \left(1 - \frac{n-1}{10}\right)$$

$$= t_1 \left(\frac{10-n+1}{10}\right) = t_1 \left(\frac{11-n}{10}\right)$$

باید ببینیم کدام جمله صفر است:

$$t_n = t_1 \left(\frac{11-n}{10}\right) = 0 \Rightarrow \frac{11-n}{10} = 0 \Rightarrow 11-n = 0 \Rightarrow n = 11$$

پس جمله‌ی یازدهم دنباله‌ی صفر است.

راه دوم:

نکته: اگر t_k, t_n, t_m جملاتی از یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت باشند و نیز به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند،

$$\frac{n^2 - mk}{2n - (m+k)} : \text{شماره‌ی جمله‌ای از دنباله‌ی حسابی که صفر می‌شود برابر است با:}$$

$$t_3, t_7, t_9 \Rightarrow \text{شماره‌ی جمله‌ی صفر شونده} = \frac{7^2 - 3 \times 9}{2 \times 7 - (3+9)} = \frac{49 - 27}{14 - 12} = \frac{22}{2} = 11$$

۵۵. گزینه ۲ جملات t_1, t_9, t_{49} از دنباله‌ی حسابی مورد نظر هستند و با هم یک دنباله‌ی هندسی تشکیل داده‌اند و می‌دانیم که

در هر دنباله‌ی هندسی، مربع جمله‌ی وسط برابر است با حاصل ضرب جملات طرفین:

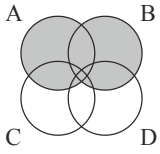
$$\begin{aligned}
t_9^2 &= t_1 \times t_{49} \Rightarrow (t_1 + 8d)^2 = t_1 \times (t_1 + 48d) \\
\Rightarrow t_1^2 + 16t_1d + 64d^2 &= t_1^2 + 48t_1d \Rightarrow 64d^2 = 32t_1d \\
\div 32d &\longrightarrow t_1 = 2d \Rightarrow \begin{cases} t_9 = t_1 + 8d = 2d + 8d = 10d \\ t_{49} = t_1 + 48d = 2d + 48d = 50d \end{cases}
\end{aligned}$$

پس جملات دنباله‌ی هندسی عبارتند از: t_1, t_9, t_{49}

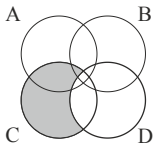
$$\Rightarrow 2d, 10d, 50d, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت دنباله‌ی هندسی} = \frac{10d}{2d} = \frac{50d}{10d} = 5$$

۵۶. گزینه ۴

چهار مجموعه A و B و C و D را به صورت زیر در نظر می گیریم و $A \cup B$ را هاشور می زنیم:

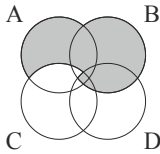


همچنین، $C - D$ نیز عبارتست از:



حالا، $C - D$ را از $A \cup B$ کم می کنیم:

قسمت هاشور خورده، برابر است با بخش هایی از A و B و D که در C نیستند. و $a \notin C$ فقط در گزینه ۴ وجود دارد.



۵۷. گزینه ۲ تعداد دایره های مشکی، دنباله ای به صورت زیر تشکیل می دهند:

$$+4 +4$$

$$7, 11, 15, \dots$$

چون اختلاف هر دو جمله متوالی ۴ است، یک الگوی خطی داریم و می دانیم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است. حال به کمک دنباله فوق، a و b را می یابیم:

$$t_1 = 7 \Rightarrow a \times 1 + b = 7 \Rightarrow a + b = 7$$

$$t_2 = 11 \Rightarrow a \times 2 + b = 11 \Rightarrow 2a + b = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ -2a - b = -11 \end{cases}$$

$$\underline{-a = -4 \Rightarrow a = 4}$$

$$a = 4$$

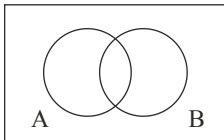
$$a + b = 7 \rightarrow 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow t_n = 4n + 3$$

حال ببینیم که در کدام مرحله، تعداد آن ها به 103 می رسد:

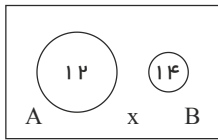
$$t_n = 103 \Rightarrow 4n + 3 = 103 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25$$

۵۸. گزینه ۲



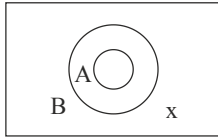
A را برابر با مجموعه دانش آموزان دارای برادر و B را برابر با مجموعه دانش آموزان دارای خواهر در نظر می گیریم. طبق اطلاعات مسئله داریم: $n(A) = 12$ و $n(B) = 14$ می توان اطلاعات زیر را روی نمودار ون در نظر گرفت.

مجموعه ی دانش آموزان تک فرزند، جایی است روی شکل بالا و خارج از A و B کم ترین مقدار برای تعداد دانش آموزان تک فرزند مربوط به موقعی است که در مجموعه ی فوق از هم جدا باشند:



$$x = 30 - (12 + 14) = 4$$

و بیشترین مقدار آن، مربوط به زمانی است که A درون B باشد:
 $x = 30 - 14 = 16$



پس محدوده x عبارتست از:

$$4 \leq x \leq 16$$

۵۹. گزینه ۴ دنباله t_n را برای تعداد چوب کبریت‌های هر مرحله می‌نویسیم:

$$t_n : 4, 10, 18, \dots$$

حال تلاش می‌کنیم که رابطه‌ای بین شماره مرحله و تعداد چوب کبریت‌ها بیابیم:

$$t_n =: 1 \times 4, 2 \times 5, 3 \times 6, 4 \times 7, \dots$$

در هر یک از حاصل ضرب‌های بالا، اختلاف دو عدد که در هم ضرب شده‌اند، ۳ است. پس:

$$t_n = n(n+3)$$

تعداد چوب کبریت‌های مرحله هفتم عبارتست از:

$$t_7 = 7 \times (7+3) = 7 \times 10 = 70$$

۶۰. گزینه ۲

قدر نسبت این دنباله عبارتست از:

$$a = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}$$

در هر دنباله هندسی، جمله عمومی به فرم $t_n = t_1 q^{n-1}$ است:

$$t_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$$

آن را برابر با $\left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$ قرار می‌دهیم تا n بدست آید:

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1} \Rightarrow \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1} \Rightarrow 2n-1 = k^2-1 \Rightarrow 2n = k^2 \Rightarrow n = \frac{k^2}{2}$$

۱ -۵	۳ -۴	۲ -۳	۲ -۲	۲ -۱
۲ -۱۰	۱ -۹	۳ -۸	۳ -۷	۲ -۶
۲ -۱۵	۱ -۱۴	۲ -۱۳	۴ -۱۲	۴ -۱۱
۴ -۲۰	۳ -۱۹	۴ -۱۸	۱ -۱۷	۳ -۱۶
۱ -۲۵	۴ -۲۴	۲ -۲۳	۳ -۲۲	۴ -۲۱
۲ -۳۰	۱ -۲۹	۲ -۲۸	۳ -۲۷	۲ -۲۶
۳ -۳۵	۲ -۳۴	۲ -۳۳	۴ -۳۲	۳ -۳۱
۴ -۴۰	۲ -۳۹	۱ -۳۸	۳ -۳۷	۴ -۳۶
۴ -۴۵	۱ -۴۴	۳ -۴۳	۳ -۴۲	۱ -۴۱
۴ -۵۰	۱ -۴۹	۲ -۴۸	۱ -۴۷	۲ -۴۶
۲ -۵۵	۳ -۵۴	۱ -۵۳	۳ -۵۲	۲ -۵۱
۲ -۶۰	۴ -۵۹	۲ -۵۸	۲ -۵۷	۴ -۵۶