حل معادلهٔ پواسن در یک بُعد به کمک تابع گرین

ابراهیم فولادوند

گروه فیزیک دانشگاه زنجان، ص پ ۳۱۳ foolad@iasbs.ac.ir

در این نوشته به روش تابع گرین، مسئلهٔ پواسن یک‌بعدی را برای یک توزیع بار دلخواه $\rho(x)$ در داخل یک بازهٔ دلخواه کران‌دار حل می‌کنیم.

1 مقدمه

یافتن پتانسیل الکتریکی در تمام فضا مهمترین هدف در الکترواستاتیک است. اگر توزیع بار الکتریکی در کل فضا معلوم باشد براحتی می‌توان پتانسیل را از روی رابطهٔ زیر حساب کرد.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{1}$$

در این جا $\rho(\vec{r})$ چگالی بار الکتریکی در فضا است و انتگرال روی تمام فضا گرفته می‌شود. در بیش‌تر اوقات توزیع بار تنها در بخشی از فضا معلوم است، ولی به جای آن مقدار پتانسیل در مرز ناحیه‌ای که در داخل آن توزیع بار معلوم است داده می‌شود. در این صورت باز هم می‌توانیم پتانسیل را در تمامی فضا پیدا کنیم. این نوع مسائل در زمره‌ی مسائل مقدار مرزی هستند. به بیان ریاضی باید معادله‌ی پواسن [a] را با شرایط مرزی که از نوع دیریشله [b]، نوی‌مان [c] و یا ترکیبی از این دو نوع هستند حل کنیم.

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \qquad V(\vec{r})\Big|_{\text{مرز}} = \text{معلوم} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\text{مرز}} = \text{معلوم} \tag{2}$$

در بیشتر کتابهای الکترومغناطیس دورهٔ کارشناسی مانند گریفیث [d]، ریتس [e] و میلفورد [f]، نایفه [g]، کورسون [h]، [1–4] و همچنین در کتاب پیشرفته‌تر الکترودینامیک جکسون [i] [5]، معادلهٔ پواسون در ابعاد دو و سه برای هندسه‌های گوناگون به تفصیل بررسی شده‌اند، امّا این معادله به ندرت در یک بُعد بررسی می‌شود. ممکن است به نظر رسد که در یک بُعد حل معادلهٔ پواسون کار ساده‌ای است. اگر چه نسبت به ابعاد دو و سه حل این معادله در یک بُعد ساده‌تر است، ولی نه به آن حد که اصلاً به آن

پرداخته نشود! در این نوشته می‌خواهیم حل کلی معادلهٔ پواسون در یک بُعد را به روش تابع گرین بیابیم. نخست بیائید از یک مثال ساده شروع کنیم.

2 یک مثال ساده

مسئله. بار نقطه‌ای q در نقطهٔ x_0، در داخل بازه $[a,b]$ است. پتانسیل در ابتدا و پایان بازه به ترتیب در مقادیر V_a و V_b ثابت نگه داشته شده است. پتانسیل را در داخل بازه پیدا کنید؟

مسئلهٔ بالا یک معادلهٔ پواسون یک بُعدی است که توزیع بار آن به صورت $\rho(x) = q\delta(x-x_0)$ است. برای بالا بردن جنبهٔ آموزشی مسئله سعی می‌کنیم آن را به ساده‌ترین روش ممکن حل کنیم. از لحاظ ریاضی شرایط مرزی از نوع دیریشله هستند و معادله به صورت زیر است.

$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-q}{\epsilon_0}\delta(x-x_0) \qquad a \le x \le b \tag{3}$$

$$V(a) = V_a, \quad V(b) = V_b \tag{4}$$

طبق (3) در تمامی نقاط بازهٔ $[a,b]$ تابع در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند بجز در $x = x_0$. تابع $V'(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ ناپیوسته است، زیرا اگر از دو طرف رابطهٔ (3) انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \frac{-q}{\epsilon_0}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0)\mathrm{d}x \to V'(x_0^+) - V'(x_0^-) = -\frac{q}{\epsilon_0}. \tag{5}$$

مقدار ناپیوستگی مشتق در $V(x)$ در $x = x_0$ برابر است با $\frac{-q}{\epsilon_0}$. از طرفی برای تمامی $x < x_0$ و نیز $x > x_0$ تابع $V(x)$ و مشتق آن $V'(x)$ پیوسته هستند. با توجه به این که در این دو بازه تابع $V(x)$ در معادلهٔ لاپلاس یعنی $\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$ صدق می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که $V(x)$ در این دو ناحیه باید خطی باشد. از طرف دیگر ناپیوستگی $V'(x)$ در $x = x_0$ ایجاب می‌کند که شیب $V(x)$ در $x = x_0$ می‌شکند. پس $V(x)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & a \le x \le x_0 \\ \gamma x + \delta & x_0 \le x \le b \end{cases} \tag{6}$$

و از این جا

$$V'(x) = \begin{cases} \alpha & a \le x < x_0 \\ \gamma & x_0 < x \le b \end{cases} \tag{7}$$

بنا بر این از (5) نتیجه می‌گیریم

$$\gamma - \alpha = -\frac{q}{\epsilon_0} \tag{8}$$

از طرف دیگر، شرط مرزی دیریشله در $x = a$ و $x = b$ می‌گوید:

$$V(a) = V_a \;\rightarrow\; \alpha a + \beta = V_a \tag{9}$$

$$V(b) = V_b \;\rightarrow\; \gamma b + \delta = V_b \tag{10}$$

پیوستگی پتانسیل در $x = x_0$ نیز نتیجه می‌دهد:

$$\alpha x_0 + \beta = \gamma x_0 + \delta \tag{11}$$

به کمک روابط (8 تا 11) می‌توان مجهول‌های δ و γ و β و α را بدست آورد. پیش از انجام این کار از آزادی عمل در تعیین نقطهٔ صفر پتانسیل بهره می‌گیریم و V_a را برابر صفر قرار می‌دهیم. در آن صورت از رابطهٔ (9) خواهیم داشت $\beta = -\alpha a$. همچنین بدون کاستن از عمومیت مسئله می‌توانیم a و b را به ترتیب برابر با صفر و یک بگیریم که در آن صورت $\beta = 0$ می‌شود و با کمک (10) خواهیم داشت:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha x & 0 \le x \le x_0 \\ \left(\alpha - \frac{q}{\epsilon_0}\right)(x-1) + V_b & x_0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{12}$$

حالا از پیوستگی V در x_0، یعنی از (11)، مقدار α بدست می آید.

$$\alpha = \frac{q}{\epsilon_0}(1 - x_0) + V_b \tag{13}$$

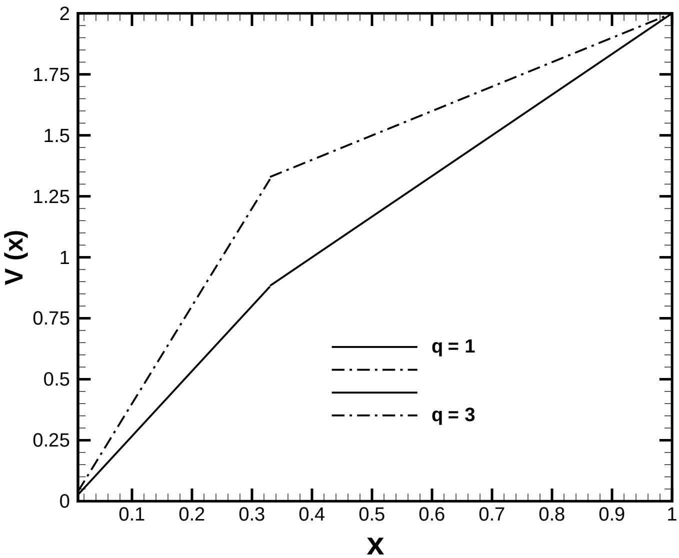
نمودار $V(x)$، به ازای $\frac{q}{\epsilon_0} = 1$، $x_0 = \frac{1}{3}$ و $V_b = 2$، در شکل ۱ کشیده شده است.

توجه داریم که مسئله به ازای هر مقدار از V_b، x_0 و q دارای جواب است. همچنین مطابق قضایای ریاضی، بیشینه و کمینهٔ $V(x)$ روی مرزها است.

3 حل معادلهٔ پواسُن یک‌بُعدی با یک توزیع بار دلخواه

اینک به بررسی حل مسئله کلی‌تر یعنی هنگامی که چگالی‌بار داخل ناحیه $[0, 1]$ به صورت دلخواه $\rho(x)$ باشد می‌پردازیم. در این حالت خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad x \in [0, 1] \quad V(0) = 0, \quad V(1) = 1 \tag{14}$$



شکل ۱: نمودار $V(x)$، به ازای $\frac{q}{\epsilon_0} = 1$، $x_0 = \frac{1}{3}$ و $V_b = 2$.

از اینجا به بعد برای راحتی از واحدهایی استفاده می‌کنیم که $\epsilon_0 = 1$ باشد. معادلهٔ (14) یک مسئله مقدارمرزی بظاهر ساده است ولی همین مسئله در کتابهای الکترومغناطیس معمولاً بررسی نمی‌شود. روشی که برای حل معادلهٔ این معادله ارائه می‌دهیم روش تابع گرین است [6]. این روش را می‌توان در مورد برخی مسائل مکانیک کلاسیک نظیر نوسانگر واداشته میرا که از نوع مقدار اولیه است نیز بکار برد. برای جزئیات بیشتر به فصل نوسانات کتاب ماریون [j] و تورونتون [k] مراجعه کنید [7].

بطور خلاصه اگر تابع $G(x,\xi)$ دارای یک سری ویژگی باشد (که در آن صورت تابع گرین نامیده می‌شود) حل (14) بصورت زیر خواهد بود

$$V(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + V_a H_1(x) + V_b H_2(x), \tag{15}$$

که در آن V_a و V_b مقادیر تابع $V(x)$ در مرزهای چپ و راست هستند. در انتخابی که انجام دادیم $V_a = 0$ و $V_b = 1$ گرفته شده است. توابع $H_1(x)$ و $H_2(x)$ به ترتیب در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_1(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad H_1(0) = 1, \quad H_1(1) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad H_2(0) = 0, \quad H_2(1) = 1 \tag{17}$$

شرایطی که باید بر $G(x,\xi)$ حاکم باشند بصورت زیراند:

۱) $G(x,\xi)$ در معادلهٔ زیر صدق کند.

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,\xi)}{\mathrm{d}x^2}=-\delta(x-\xi)\quad 0\leq x,\xi\leq 1 \tag{18}$$

۲) $G(x,\xi)$ به ازای هر $0\leq\xi\leq 1$ تابع پیوسته‌ای از x است از جمله در $x=\xi$

۳) مشتق $G(x,\xi)$ در $x=\xi$ دارای ناپیوستگی زیر است.

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi^-}^{x=\xi^+}=-\int_{\xi^-}^{\xi^+}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=-1 \tag{19}$$

۴) $G(x,\xi)$ در شرایط مرزی همگن زیر صدق کند.

$$G(0,\xi)=G(1,\xi)=0 \tag{20}$$

براحتی می‌توان نشان داد که با توجه به خطی بودن معادلهٔ پواسن، جواب (15) در آن صدق می‌کند، و نیز می‌توان نشان داد که این جواب یکتا است. برای دیدن جزئیات قضیه یکتائی در مورد مسائل مقدار مرزی به مرجع [6] مراجعه کنید.

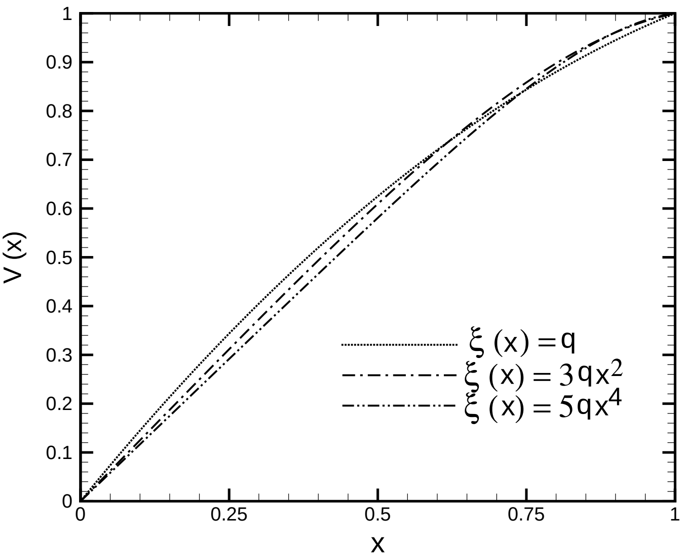
برای یافتن تابع گرین آن را به این شکل می‌گیریم:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi)=\alpha x+\beta & 0\leq x\leq\xi\\ G_2(x,\xi)=\gamma x+\delta & \xi\leq x\leq 1\end{cases} \tag{21}$$

در این فرمول ضرائب α و β و γ و δ تابع ξ هستند. از $G(0,\xi)=0$ نتیجه می‌گیریم $\beta=0$ است، و از شرط (19) نتیجه می‌گیریم $\gamma-\alpha=-1$ است. همچنین از $G(1,\xi)=0$ خواهیم داشت $\delta=-\gamma$. سرانجام از پیوستگی $G(x,\xi)$ در $x=\xi$ داریم $G_1(\xi,\xi)=G_2(\xi,\xi)$ که نتیجه می‌دهد $\alpha=1-\xi$. بنابراین داریم

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x & 0\leq x\leq\xi\\ \xi(1-x) & \xi\leq x\leq 1\end{cases} \tag{22}$$

با توجه به اینکه $V_a=0$ فرض شده کافیست $H_2(x)$ را بدست آوریم. با توجه به $\frac{\mathrm{d}^2H_2(x)}{\mathrm{d}x^2}=0$ داریم $H_2(x)=ux+v$ که طبق $H_2(0)=0$ و $H_2(1)=1$ خواهیم داشت $H_2(x)=x$. انتگرال $\int_0^1 G(x,\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi$ در رابطهٔ (15) نیز بصورت زیر محاسبه می‌شود



شکل ۲: شکل پتانسیل برای سه انتخاب چگالی بار که در متن آمده است.

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(x,\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_0^x G_2(x,\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_x^1 G_1(x,\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= (1-x)\int_0^x \xi\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + x\int_x^1 \rho(\xi)(1-\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{23}$$

مقدار انتگرال‌های بالا را برای سه انتخاب $\rho(\xi)$ محاسبه کرده‌ایم: الف) چگالی بار ثابت $\rho_1(\xi) = Q$، ب) چگالی بار $\rho_2(\xi) = 3\,Q\,\xi^2$، و پ) چگالی بار $\rho_3(\xi) = 5\,Q\,\xi^4$. در تمامی چگالی‌های بالا، Q بار کل در بازهٔ $[a,b]$ است. با اضافه کردن جملهٔ $V_1\,x$ و گرفتن انتگرال (23) مقدار پتانسیل برحسب x برای سه انتخاب چگالی بصورت زیر خواهد بود

$$\rho_1(\xi) = Q \qquad V_1(x) = \frac{Qx}{2}(1-x) + V_1\,x \tag{24}$$

$$\rho_2(\xi) = 3\,Q\,\xi^2 \qquad V_2(x) = \frac{Qx}{4}\left(1-x^3\right) + V_1\,x \tag{25}$$

$$\rho_3(\xi) = 5\,Q\,\xi^4 \qquad V_3(x) = \frac{Qx}{6}\left(1-x^5\right) + V_1\,x \tag{26}$$

$V_1(x)$، $V_2(x)$ و $V_3(x)$ در شکل ۲ کشیده شده اند.

4 مراجع

1. D. Griffith, *Introduction to Electrodynamics*, Benjamin Commings, England, 1999
2. J. R. Ritz, J. Milford, W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th Ed., Addison Wesley, 1992
3. M. H. Nayfeh, M.K. Brussel, *Electricity and Magnetism*, John Wiley, 1986
4. P. Lorrain, D.R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves* (3rd Eed.), Freeman and Company, 1988
5. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Ed., John Wiley, 1988
6. T. Mint U, *Partial differential equations of mathematical physics*, 2nd Ed., North-Holland, 1980.
7. J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Mechanics of Particles and Systems*, Holt Rinehart & Winston, 1995

   این کتاب ترجمه شده است: جری ماریون، استیفن تورونتون، دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم‌ها، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴، ص ۱۶۲.

نام‌ها

[a] Poisson, [b] Dirichlet, [c] Neumann, [d] Griffith, [e] Ritz, [f] Milford, [g] Nayfeh, [h] Corson, [i] Jackson, [j] Marion, [k] Thoronton