

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌ی اعداد

۱. مجموعه‌ی $W - N$ چند عضو دارد؟
۲. مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟
۳. اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

$$3, -2, 2/4, -3/2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, 2\sqrt{5}, \sqrt{17}$$

بازه‌ها

۴. جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	نمایش با نماد بازه	نمایش به صورت مجموعه	نمایش هندسی
باز	$(2, 5)$	$\{x x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$	
...	...	$\{x x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5\}$...
نیم باز	
...	$(2, 5]$
...	
...	...	$\{x x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$...
...	...	$\{x x \in \mathbb{R}, x < 5\}$...
...	$(-\infty, 5]$
...	$[2, +\infty)$
...	$(-\infty, 2)$
...	...	$\{x x \in \mathbb{R}, x > 2\}$...
...	...	$\{x x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$...
...	$(-\infty, +\infty)$

۵. حاصل مجموعه‌های زیر را از طریق نمایش هندسی به دست آورید.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| ۱) $(-2, 5] \cup (1, +\infty)$ | ۲) $(-2, 5] \cap (1, +\infty)$ |
| ۳) $(-\infty, 3) \cap [-2, +\infty)$ | ۴) $[-2, 4] \cup [1, 6)$ |
| ۵) $(-4, 2] - (-1, 3]$ | ۶) $(-1, 3] - (-4, 2]$ |
| ۷) $[-2, 4] \cap [1, 6)$ | |

۶. مجموعه $\mathbb{R} - \{2\}$ را روی محور نشان داده و آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۷. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی اعداد حسابی

ب) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲

پ) بازه $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 3\}$

ث) $B = \{x \in \mathbb{Q} | 2 < x < 3\}$

ج) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی

چ) مجموعه‌ی اعداد گویا

ح) مجموعه‌ی اعداد گنگ

۸. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
			مجموعه اعداد اول یک رقمی
			مجموعه انسان‌های روی زمین
			مجموعه اعداد طبیعی فرد
			مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
			مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
			مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما
			مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
			مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
			مجموعه کسره‌های مثبت با صورت یک
			مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
			بازه (۱, ۰)

۹. بین دو عدد گویای $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{3}$ ، سه عدد گویا بنویسید.

۱۰. چهار عدد گویا از بازه‌ی $(0, 1)$ بنویسید.

۱۱. اگر A دارای یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه‌ی خواهد بود.

۱۲. اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه‌ی خواهد بود.

درس دوم: متمم یک مجموعه

۱۳. اگر $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$ باشند، اعضای مجموعه‌های زیر را

بنویسید.

- | | | |
|------------------------|------------------------------|-----------------------|
| ۱) A' | ۲) B' | ۳) $A - B$ |
| ۴) $A \cap B$ | ۵) $A \cup B$ | ۶) $A - (A \cap B)$ |
| ۷) $(A \cup B) \cap A$ | ۸) $(A \cup B) - (A \cap B)$ | ۹) $A' \cup B$ |
| ۱۰) $A \cap B'$ | ۱۱) $(A - B)'$ | ۱۲) $(A \cup B)' - A$ |
| ۱۳) $(A)'$ | | |

۱۴. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$ باشد:

الف) اعضای مجموعه‌ی A را بنویسید.

ب) اعضای A' را بنویسید.

۱۵. اگر $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$ باشد:

الف) B را روی محور نشان دهید.

ب) B' را روی محور نشان داده و به صورت بازه بنویسید.

۱۶. اگر \mathbb{Z} به عنوان مجموعه‌ی مرجع باشد، \mathbb{N}' را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱۷. اگر \mathbb{R} به عنوان مجموعه‌ی مرجع باشد، \mathbb{N}' را روی محور نشان دهید.

تعداد عضوهای یک مجموعه

۱۸. اگر $n(A) = 10$ و $n(A \cap B) = 3$ و $n(A \cup B) = 17$ باشد، $n(B)$ را به دست آورید.

۱۹. اگر $n(U) = 50$ و $n(A) = 20$ و $n(B) = 25$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، مطلوب است:

- ۱) $n(A \cup B)$ ۲) $n(A' \cap B)$ ۳) $n(A \cap B')$ ۴) $n(A' \cap B')$

۲۰. در یک کلاس ۲۸ نفری، تعداد ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال هستند. اگر ۴ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، مشخص کنید چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند.

۲۱. در یک جشنواره فیلم ۲۵ فیلم شرکت کرده‌اند. در بین آن‌ها ۸ فیلم کارتونی و ۱۰ فیلم طنز وجود دارد. ۳ تا از فیلم‌های کارتونی نیز مضمون طنز دارند:

الف) تعداد فیلم‌هایی که کارتونی یا طنز هستند چقدر است؟

ب) تعداد فیلم‌هایی که نه کارتونی و نه طنز هستند چقدر است؟

۲۲. در یک کلاس ۳۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو گروه سرود و ۱۸ نفر عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۶ نفر از دانش‌آموزان عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است تعداد نانش‌آموزانی که:

الف) فقط عضو گروه سرودند.

ب) فقط عضو گروه تئاترند.

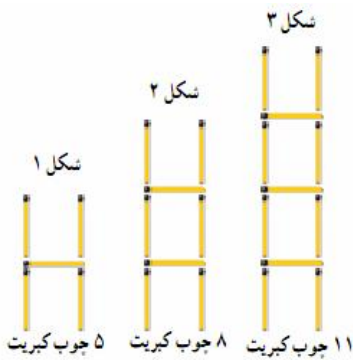
پ) عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

ت) حداقل عضو یک گروه هستند

ث) دقیقاً عضو یک گروه هستند.

درس سوم: الگو و دنباله

۲۳. با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید.



شماره شکل: n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
تعداد چوب‌کبریت‌ها: a_n	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a_n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	$a_n=...$...

الگوی خطی

۲۴. جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $a_n = -2n + 5$ می باشد:

الف) جملات دهم و پانزدهم الگو را به دست آورید.

ب) جمله‌ی چندم الگو برابر با -55 است؟

۲۵. در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

۲۶. با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید و الگویی برای یافتن تعداد مربع‌های رنگی در مراحل بعدی بیابید.

- شکل شماره ۲۰۰ دارای چند مربع رنگی است؟

- در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۷۲ است؟

شکل (۱)

۴ مربع رنگی

شکل (۲)

۸ مربع رنگی

شکل (۳)

شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی : b_n	۴	۸
رابطه بین n و b_n	$b_1=4$	$b_2=$

الگوهای غیر خطی

۲۷. با توجه به شکل زیر، جدول را کامل کنید و الگویی برای یافتن تعداد نقطه ها در مراحل بعدی بیابید.

- شکل شماره ۱۰ دارای چند نقطه است؟

- در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد نقطه ها برابر ۴۸۰ است؟

شکل (۱)

۵ نقطه

شکل (۲)

۱۰ نقطه

شکل (۳)

شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : t_n	۵	۱۰
رابطه بین n و t_n	$t_1=5$	$t_2=$

دنباله

۲۸. با توجه به شکل زیر، الگویی برای یافتن تعداد مربع ها در مراحل بعدی بیابید.

شکل (۱)

۱ مربع

شکل (۲)

۳ مربع

شکل (۳)

۶ مربع

شکل (۴)

۲۹. حاصل $1+2+3+...+n$ را به دست آورید.

۳۰. الگوی زیر را در نظر بگیرید.

۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

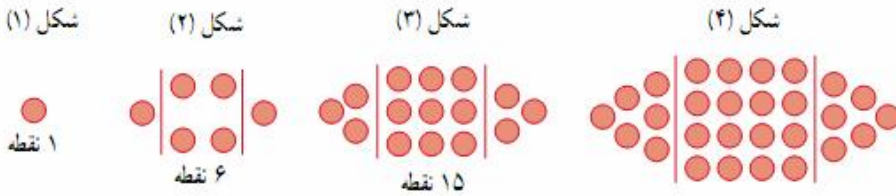
۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره ی آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است.
ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد، اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟
۳۱. الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

ب) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۳۲. جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

۱) $a_n = 4n$ ۲) $b_n = 3n + 1$ ۳) $c_n = n^2 + 2$ ۴) $d_n = n^2 + n$

۳۳. برای دنباله‌های درجه‌ی دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن، جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

۱) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

۲) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

۳۴. سه جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

۱) $a_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 + 3}$

۲) $u_n = \frac{4n - 3}{n^2 + n}$

۳) $a_n = \frac{3^n + 2n - 1}{n + 2}$

۴) $b_n = \frac{n(-1)^n}{3n - 2}$

۵) $c_n = 2n^2 - \frac{1}{n}$

۶) $d_n = 3^n - n^2$

۳۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{3(-2)^n}{n+1}$ است. جمله‌ی سوم این دنباله را بنویسید.

۳۶. کدام جمله از دنباله‌ی $b_n = \frac{2n - 4}{n + 1}$ برابر $\frac{11}{7}$ است؟

۳۷. جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = \frac{6n + 5}{n + 5}$ برابر ۵ است؟

۳۸. چندمین جمله از دنباله‌ی $c_n = \frac{n^2 + n}{3n - 1}$ برابر $\frac{3}{2}$ است؟

۳۹. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $u_n = n^2 + 4n - 3$ می‌باشد. تعیین کنید کدام جمله‌ی آن ۴۲ است.

درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌ی حسابی

۴۰. کدام یک از دنباله‌های زیر، حسابی است؟ در صورت حسابی بودن، قدر نسبت آن را بیابید.

۱) $3, 7, 11, 15, \dots$

۲) $2, 6, 12, 24, \dots$

۳) $8, 5, 2, -1, \dots$

۴) $2, 5, 9, 14, \dots$

۵) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$

۶) $4, 4, 4, \dots$

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی

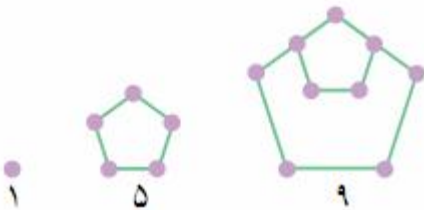
۴۱. جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

۱) $4, 7, 10, \dots$ ۲) $14, 10, 6, \dots$ ۳) $3, -\frac{1}{2}, 0, \dots$

۴۲. جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۲- و قدر نسبت آن ۳ است. جمله‌ی چندم آن ۵۸ است؟

۴۳. چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی $5, -1, 3, \dots$ برابر ۷۵ است؟

۴۴. با توجه به الگوی زیر:



الف) جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی چندم آن ۳۹۷ است؟

۴۵. ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

۴۶. اگر در یک دنباله‌ی حسابی، جملات دوم و هشتم به ترتیب ۲- و ۱۰ باشند، قدر نسبت را بیابید.

مثال: اگر جمله‌ی هفتم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۳۵ و جمله‌ی یازدهم آن برابر ۲۳ باشد، این دنباله را مشخص کنید. (a و d را بیابید)

۴۷. اگر جمله‌ی ششم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۷ و جمله‌ی دهم آن برابر ۳۷ باشد، جمله‌ی بیست و یکم این دنباله را بیابید.

۴۸. دنباله‌ای حسابی را مشخص کنید که جمله‌ی سوم آن برابر ۸- و جمله‌ی دهم آن ۱۸ واحد از جمله‌ی سیزدهم کوچک‌تر باشد.

۴۹. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۱۸ و مجموع جملات ششم و نهم برابر ۳۲ است. دنباله را مشخص کنید.

۵۰. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن برابر ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

واسطه‌ی حسابی

۵۱. مقدار x را چنان بیابید که $2x - 8, x - 1, 4x - 2$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند.

۵۲. اگر $4m - 11$ و $3m + 2$ و $m - 1$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، مقدار m را بیابید.

۵۳. واسطه‌ی حسابی بین $2x - 2$ و $3x - 1$ برابر ۱۱ است. مقدار x را به دست آورید.

۵۴. بین دو عدد ۳ و ۱۱ سه جمله چنان بنویسید که پنج جمله حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

۵۵. بین دو عدد ۸- و ۱۲ چهار عدد چنان بنویسید که شش جمله حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

دنباله‌ی هندسی

۵۶. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت هندسی بودن، قدر نسبت را بنویسید.

- ۱) ۷, ۱۴, ۲۸, ... ۲) $۳\sqrt{۷}, ۶\sqrt{۷}, ۱۲\sqrt{۷}, \dots$ ۳) $\sqrt{۳}, ۳, ۳\sqrt{۳}, \dots$ ۴) $۱, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
 ۵) ۳, ۳, ۳, ...

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی

۵۷. جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

- ۱) ۲, ۶, ۱۸, ... ۲) ۲۵, ۵, ۱, ... ۳) -۳, ۳, -۳, ...

۵۸. جمله‌ی یازدهم دنباله‌ی هندسی ۴, ۱۲, ۳۶, ... چند برابر جمله‌ی هشتم آن است؟

۵۹. اگر جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱۲ و جمله‌ی ششم آن برابر ۹۶ باشد، این دنباله را مشخص کنید.

۶۰. جملات سوم و هشتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۴ و $\frac{1}{8}$ است، جمله‌ی پنجم این دنباله را بیابید.

۶۱. جمله‌ی چندم دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{۲۷}, \frac{1}{۹}, \frac{1}{۳}, \dots$ برابر ۸۱ است؟

۶۲. اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_1 a_2 = ۴$ و $a_4 a_8 = ۱۶$ باشد، جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

۶۳. یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز، یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت ۵ روز، تقریباً چه مقدار آن باقی می‌ماند؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.

ب) حدود $\frac{1}{۳}$ آن باقی می‌ماند.

پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود.

ت) حدود $\frac{۲}{۳}$ آن باقی می‌ماند.

۶۴. علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۶۵. حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را به دست آورید. ۲, ۴, ۸, ...

واسطه‌ی هندسی

۶۶. مقدار m را چنان بیابید که $۵ + ۱۰m - ۱, ۴m - ۱, m - ۱$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند.

۶۷. مقدار x را چنان بیابید که $۱۰ + x, ۳x, x + ۱۰$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی شود.

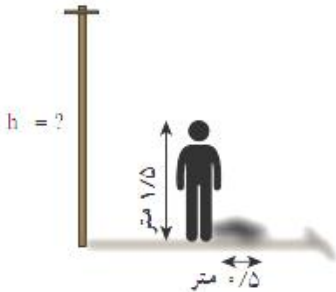
۶۸. واسطه‌ی هندسی دو عدد $۵^۳ \times ۷^۶$ و $۵^۷ \times ۷^۲$ را بیابید.

فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

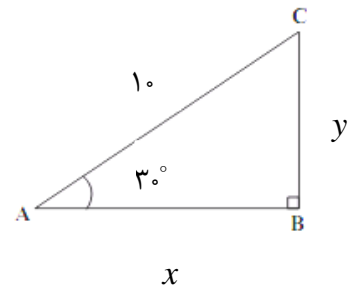
مثلث‌های متشابه

۱. دانش‌آموزی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد دانش‌آموز $1/5$ متر است و طول سایه‌ی او در همان لحظه $0/5$ متر است. ارتفاع تیر برق چه قدر است؟

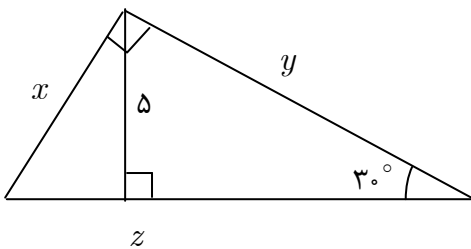


نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه

۲. با رسم یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60° را بیابید.
۳. با رسم یک مربع به ضلع ۱ واحد و رسم یکی از قطرهای آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 45° را بیابید.
۴. یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که یکی از زاویه‌های آن 50° باشد و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 50° را با استفاده از خط‌کش و به طور تقریبی به دست آورید.
۵. در شکل‌های زیر مقادیر x و y و z را به دست آورید.



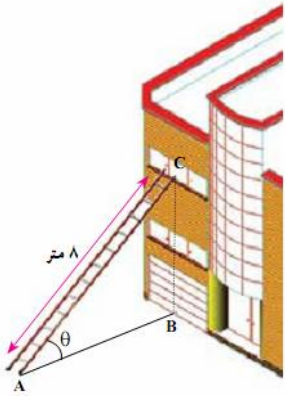
۶. در مثلث زیر مقادیر مجهول را به دست آورید.



۷. یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟ $\tan 13^\circ \approx 0/23$



۸. مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین $\theta = 3^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چه قدر است؟

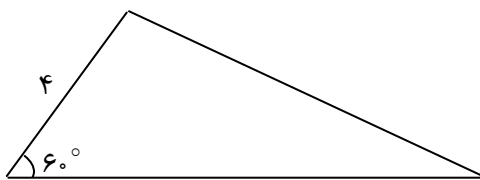


۹. یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟ $\tan 13^\circ \approx 0.23$

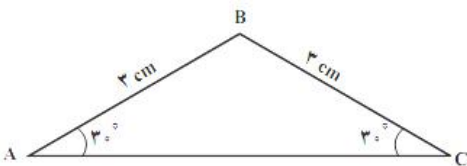


۱۰. یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی 3° پرتاب می‌شود. این موشک پس از طی 2000 متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

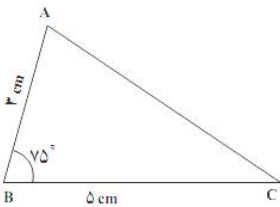
۱۰. مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



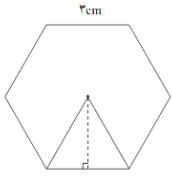
۱۱. مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



۱۲. فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



۱۳. مساحت شش ضلعی منتظم زیر را حساب کنید.



درس دوم: دایره ی مثلثاتی

۱۴. هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره ی مثلثاتی مشخص کنید.

$3^\circ, -3^\circ, 9^\circ, -9^\circ, 15^\circ, -12^\circ, 9^\circ, 18^\circ, -18^\circ$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر کدام از ناحیه‌ها

۱۵. اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم‌علامت باشند، آن‌گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۱۶. حدود زاویه ی θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

۱) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

۲) $\sin \alpha \times \cos \alpha > 0$

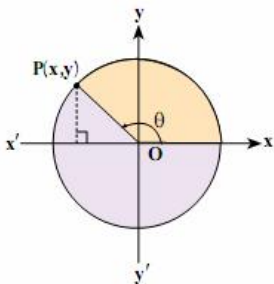
۱۷. زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$.

۱۸. زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\cot \alpha > \tan \alpha$.

۱۹. اگر نقطه‌ای در ربع دوم دایره ی مثلثاتی باشد و θ ، زاویه ی بین قسمت مثبت محور x ها و نیم‌خط

\vec{OP} باشد و داشته باشیم $\sin \theta = \frac{3}{4}$ ، مختصات نقطه ی P و همچنین سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی θ را به

دست آورید. (رابطه ی فیثاغورث)



۲۰. اگر نقطه‌ای در ربع سوم دایره ی مثلثاتی باشد و θ ، زاویه ی بین قسمت مثبت محور x ها و نیم‌خط

\vec{OP} باشد و داشته باشیم $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، مختصات نقطه ی P و همچنین سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی θ را به

دست آورید. (رابطه ی فیثاغورث)

۲۱. اگر $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ باشد، زاویه ی θ در چه ناحیه‌ای می‌تواند قرار بگیرد؟

رابطه ی شیب خط با تانزانت زاویه

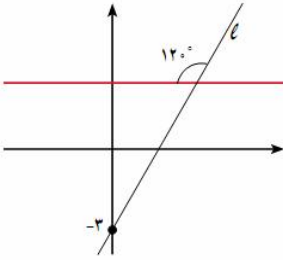
۲۲. خط $y - x = 3$ محور x ها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۲۳. اگر خط $2x + 3y = 5$ محور افقی را با زاویه ی α قطع کند، $\tan \alpha$ را بیابید.

۲۴. معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $(2, 1)$ بگذرد و زاویه ی آن با محور x ها 60° باشد.

۲۵. معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $(0, 2)$ بگذرد و زاویه ی آن با محور x ها 45° باشد.

۲۶. با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط l را بنویسید.



درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۲۷. فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

۲۸. فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

۲۹. اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی 135° را به دست آورید.

۳۰. اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی 24° را به دست آورید.

۳۱. فرض کنید $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

۳۲. اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

اتحادهای مثلثاتی

۳۳. درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

۲) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

۳) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

۴) $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$

۵) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

۶) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

۷) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

۸) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

۹) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

۱۰) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

۱. ریشه‌ی سوم عدد ۲۷ و ریشه‌های دوم عدد ۳۶ و همچنین رادیکال ۳۶ را مشخص کنید.

۲. ریشه‌ی پنجم اعداد ۳۲ و -۳۲ و ریشه‌ی سوم عدد $\frac{125}{1000}$ را به دست آورید.

۳. ابتدا مشخص کنید که اعداد رادیکالی زیر، بین کدام دو عدد صحیح متوالی هستند و سپس مقدار تقریبی آن‌ها را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

$\sqrt{10}$	$\sqrt[3]{25}$
$\sqrt[3]{7/25}$	$\sqrt[5]{16}$
$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{90}$

۴. کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

$\sqrt[4]{(-3)^2} = -3$	$\sqrt[5]{3^5} = 3$	$\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$
$\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$	$\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$	$\sqrt[6]{(-2)^6} = 2$

درس دوم: ریشه‌ی nام

۵. با یک مثال نشان دهید رابطه‌ی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همواره درست نیست.

۶. مقادیر a و b و n را طوری انتخاب کنید که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

۷. اگر $0 < a < 1$ باشد، در \square یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ را قرار دهید.

$\sqrt[n]{a} \square \sqrt[n]{a}$ $a^r \square a^r$

درس سوم: توان‌های گویا

۸. حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$	۲) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}$	۳) $\sqrt{\sqrt{81}}$
-------------------------	-----------------------------	-----------------------

درس چهارم: عبارات‌های جبری

۹. حاصل عبارات‌های زیر را با استفاده از اتحادها بنویسید.

۱) $(x-5)^2$	۲) $(2x+x^2)^2$
۳) $(x+\frac{1}{x})^2$	۴) $(x-\sqrt{x})^2$
۵) $(\frac{x}{2}+5x)^2$	۶) $(2x-3y)^2$
۷) $(2x-x^2+1)^2$	۸) $(\frac{x}{2}+2x^2-x^3)^2$

۹) $(5x - 2y)(5x + 2y)$

۱۱) $(4x^r + y^r)(4x^r - y^r)$

۱۳) $(x^r - 5)(x^r - 6)$

۱۵) $(x^r - 3)^r$

۱۷) $(x - \frac{1}{x})(x^r + 1 + \frac{1}{x^r})$

۱۹) 14×16

۲۱) $10 \cdot 7^r$

۱۰) $(1 - \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x})$

۱۲) $(3y + 5)(3y - 2)$

۱۴) $(2x + 1)^r$

۱۶) $(x + 2y)(x^r - 2xy + 4y^r)$

۱۸) $(\sqrt[r]{x} + 1)(\sqrt[r]{x^r} - \sqrt[r]{x} + 1)$

۲۰) $10 \cdot 5^r$

۲۲) 98^r

تجزیه

۱۰. عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^r + 6x$

۳) $\frac{x^r}{3} - 7x$

۵) $x^r - 10x + 25$

۷) $x^r - 2x + \frac{1}{x^r}$

۹) $9y^r - x^r$

۱۱) $a^r b^r - 1$

۱۳) $x^r - 9x$

۱۵) $x^r - 7x + 6$

۱۷) $x^r - 8$

۱۹) $1 - 27y^3$

۲۱) $a^r - 2ab + a^r b - 2b^r$

۲۳) $a^r - 2b^r + 2a^r b^r$

۲) $x(a + b) - 2(a + b)$

۴) $6a^r b^r - 8ab^r$

۶) $4x^r + 12xy + 9y^r$

۸) $x + 4\sqrt{x} + 4$

۱۰) $\frac{x^r}{y^r} - \frac{1}{x^r}$

۱۲) $x^r - 16$

۱۴) $x^r - 7x + 10$

۱۶) $y^r - 9y + 20$

۱۸) $y^r - x^r$

۲۰) $8x^r + 64y^r$

۲۲) $2x^r + 3x + 1$

شمارندهای یک عدد (مقسوم علیه‌های یک عدد)

۱۱. تمام شمارندهای مثبت عدد ۱۲ را بنویسید.

۱۲. شمارندهای عبارت $x^r - y^r$ را بنویسید.

۱۳. شمارندهای عبارت $x^r - 5x$ را بنویسید.

۱۴. شمارندهای عبارت $x^r + 125$ را بنویسید.

مضرب‌های یک عبارت جبری یا چندجمله‌ای

۱۵. عبارت $27a^r - 1$ مضرب کدام یک از عبارتهای زیر است؟

۱) $a - 1$

۲) $3a - 1$

۳) $9a^r + 3a + 1$

۴) $3a + 1$

۱۶. کدام یک از عبارتهای زیر گویاست؟

$$۱) \frac{x^r - 1}{x^r + 1}$$

$$۲) \frac{4x + \sqrt{5}}{x^r}$$

$$۳) \sqrt[5]{x} - 4$$

$$۴) \sqrt[3]{x^2} + 4x - 2$$

۱۷. عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$۱) \frac{2x}{x-3}$$

$$۲) \frac{-x+1}{(x-2)(2x-3)}$$

$$۳) \frac{-4}{x^2 + 5x}$$

$$۴) \frac{2x^r}{x^r - 6x + 5}$$

$$۵) \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+3}$$

$$۶) \frac{2x+1}{x} - \frac{3}{x^2-9}$$

$$۷) \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{x} + 5$$

$$۸) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

ساده کردن عبارتهای گویا

۱۸. عبارتهای زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{x^r - 4}{x^r + 2x}$$

$$۲) \frac{x^r - 5x - 14}{x^r - 49}$$

$$۳) \frac{12x^r y^r z}{18xy^5}$$

$$۴) \frac{x^r + 1}{x^r - 1}$$

$$۵) \frac{x^r - 8}{(x-2)^r}$$

$$۶) \frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$۷) \frac{y^5 - y}{y^r + y^r + y}$$

$$۸) \frac{y^5 - y^r - 12y}{8y^r + 16y}$$

گویا کردن مخرجهای گنگ

۱۹. مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$۲) \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$۳) \frac{2x+1}{5\sqrt{x}}$$

$$۴) \frac{2x}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$۵) \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$۶) \frac{2}{\sqrt{x+3}}$$

$$۷) \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$۸) \frac{x+y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$۹) \frac{3}{2\sqrt{x-1}}$$

$$۱۰) \frac{2y}{3\sqrt{y} + 2\sqrt{x}}$$

$$۱۱) \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

$$۱۲) \frac{x-1}{x-2\sqrt{x}}$$

$$۱۳) \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$۱۴) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}}$$

$$۱۵) \frac{x-y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

$$۱۶) \frac{1}{\sqrt{x+5}} - \frac{2}{3-\sqrt{x}}$$

$$۱۷) \frac{5}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$۱۸) \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

جمع و تفریق عبارتهای کسری

۲۰. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱) \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3}$$

$$۲) \frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$۳) \frac{2}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$$

$$۴) \frac{2}{x} - \frac{4}{x+3} + \frac{3}{x-1}$$

$$۵) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} - \frac{8}{x^2-4}$$

$$۶) \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1}$$

$$۷) \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} + \frac{1}{x-1}$$

$$۸) \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{3}{x-1}$$

فصل ۴: معادلات و نامعادلات

درس اول: معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

۱. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 ۱) x^2 - 5x = 0 & ۲) x^2 = -7x & ۳) 2x^2 - 6x = 0 & ۴) x^2 - 7x = -1 \\
 ۵) x^2 + x - 20 = 0 & ۶) 9 - 6z + z^2 = 0 & ۷) 4x^2 - 25 = 0 & ۸) x^2(x-5) - 4(x-5) = 0 \\
 ۹) x^2 + 4x^2 = 12x & ۱۰) x^2 = 81x & ۱۱) x^2 - \frac{x}{3} = 0 & ۱۲) \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \\
 ۱۳) 5t^2 = 20 & ۱۴) 4k^2 - 12k + 8 & ۱۵) 5a^2 - 7a = 2a(a-3)
 \end{array}$$

۲. معادلات زیر را به روش ریشه‌ی زوج حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 ۱) x^2 - 4 = 0 & ۲) 4x^2 - 25 = 0 & ۳) (x-1)^2 - 9 = 0 & ۴) (5x-4)^2 - 9 = 0 \\
 ۵) 5 - x^2 = 0 & ۶) x^2 + 5 = 0 & ۷) 5r^2 = 45 & ۸) (t-2)^2 = 16 \\
 ۹) 3 - 3a = 3a(2a-1) & ۱۰) n^2 - 226
 \end{array}$$

۳. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 ۱) x^2 - 8x = -12 & ۲) x^2 + 2x - 8 = 0 & ۳) x^2 + 6x = -8 & ۴) x^2 - 10x + 21 = 0 \\
 ۵) x^2 + 5x - 14 = 0 & ۶) -x^2 - 5x = -24 & ۷) 2t^2 + t - 2 = 0 & ۸) r^2 + 3r = 3 \\
 ۹) s^2 - 3s + 3 = 0 & ۱۰) 2a^2 + 5a - 3 = 0
 \end{array}$$

۴. معادلات زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 ۱) 2x^2 - 5x + 3 = 0 & ۲) x^2 - 6x = -9 & ۳) 4x^2 - 3x - 1 = 0 & ۴) -2x^2 + 7x - 3 = 0 \\
 ۵) 2x^2 - 7x + 5 = 0 & ۶) x^2 - x + 1 = 0 & ۷) -2x^2 + x + 3 = 0 & ۸) -x^2 + 4x - 4 = 0 \\
 ۹) r - r^2 = 3 & ۱۰) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 & ۱۱) \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0
 \end{array}$$

۵. طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۶. می‌خواهیم با استفاده از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

۷. اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چه قدر است؟

۸. یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

۹. مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

۱۰. در یک لیگ والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ، فقط یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این لیگ را به دست آورید.

درس دوم: سهمی

۱۱. مختصات راس و معادله‌ی محور تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را پیدا کرده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$۱) y = (x-2)^2 - 1 \quad ۲) y = (x-1)^2 + 3 \quad ۳) y = -(x+2)^2 - 3 \quad ۴) y = -(x+2)^2$$

$$۵) y = x^2 - 2 \quad ۶) y = x^2 - 4x + 5 \quad ۷) y = 2x^2 - 4x + 5 \quad ۸) y = -2x^2 + 1$$

$$۹) y = \frac{x^2}{2} + 1 \quad ۱۰) y = 3x^2 - 2 \quad ۱۱) y = x - x^2 \quad ۱۲) y = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

۱۲. اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۱۳. نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید.

۱۴. نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله‌ی این سهمی را بنویسید.

۱۵. در سهمی $y = ax^2 + bx - 2$ مقادیر a و b را چنان بیابید که نمودار سهمی از نقطه‌ی $(-1, 2)$ گذشته و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند.

۱۶. اگر $y = ax^2 + bx + c$ ، مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند و از نقطه‌ی $(3, 1)$ بگذرد.

۱۷. در سهمی $y = ax^2 + bx + 1$ ، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا نمودار سهمی از نقطه‌ی $(1, 1)$ گذشته و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.

۱۸. منحنی‌های به معادلات $y = -x + b$ و $y = x^2 + ax - 3b$ داده شده اند، a و b را محاسبه کنید به طوری که نمودارهای این دو تابع روی محور x در نقطه‌ای به طول ۱- همدیگر را قطع کنند.

۱۹. a و b را طوری محاسبه کنید که نمودار دو تابع $y = ax^2 + x + b$ و $y = x + 3a$ یکدیگر را روی محور عرضها به عرض ۱- قطع کنند.

۲۰. اگر $y = ax^2 + bx + c$ باشد، a ، b و c را طوری بیابید که سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه‌ی $A(2, 3)$ نیز بگذرد.

۲۱. دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه‌ی ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A ، زاویه‌ی α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید.

پرتابگر B ، نیز زاویه‌ی β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه‌ی $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه‌ی آن‌ها را مشخص کنید.

درس سوم: تعیین علامت

۲۲. در یک شرکت تولیدی، سود حاصل، از رابطه‌ی $p(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. مشخص کنید که این شرکت چه مقدار تولید کند سود می‌کند و چه مقدار تولید کند ضرر می‌کند و به ازای چه مقدار از تولید نه سود و نه زیان می‌کند.

۲۳. عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| ۱) $A = 2x - 6$ | ۲) $B = -4x + 5$ | ۳) $C = (4x + 1)(2 - x)$ |
| ۴) $D = \frac{x-1}{5-2x}$ | ۵) $E = \frac{(x-5)(-2x+1)}{x(x-1)^2}$ | ۶) $p = -2x(2x+3)(x^2-4)$ |
| ۷) $p = (x-2)^2(2x+9)^{1/2}$ | ۸) $p = \frac{ x-2 (-2x+6)}{x^2(x+1)}$ | ۹) $F = -x^2(5x-1)^3$ |
| ۱۰) $p = 2x^2 + 3x - 5$ | ۱۱) $p = -6x^2 + 4x - 1$ | ۱۲) $p = -x^2 + 6x - 9$ |
| ۱۳) $p = -x^2 + 10x - 9$ | ۱۴) $p(x) = \frac{x^2(x-3)^2}{x^2+x-2}$ | ۱۵) $P(x) = (x^2-9)(x^2+4)(3x-1)$ |
| ۱۶) $p(x) = \frac{-x^2+10x-25}{x^2+x+3}$ | | |

نامعادله

۲۴. معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

- | | | |
|-----------------------|-----------------|----------------------|
| ۱) $2x - 8 > -2$ | ۲) $x^2 \leq 4$ | ۳) $x^2 - 2x \leq 3$ |
| ۴) $3x^2 - x - 2 > 0$ | | |

۲۵. نامعادلات زیر را حل کنید.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---|
| ۱) $4x - 3 > 2$ | ۲) $5x - 1 \leq 3x - 7$ | ۳) $\begin{cases} 3x - 1 \leq 8 \\ 3x - 1 > -2 \end{cases}$ |
| ۴) $\frac{4-2x}{3} < 0$ | ۵) $-3 < \frac{3x+1}{2} < 2$ | ۶) $-1 < -3x+2 < 5$ |
| ۷) $-1 \leq \frac{x-1}{3} < 2$ | ۸) $-\frac{1}{2} < 2-2x < x-1$ | ۹) $0 < -x+1 \leq 2$ |
| ۱۰) $x(x^2+1) < 0$ | ۱۱) $x+1 \leq 5-x < 2x+3$ | |

۲۶. نامعادلات زیر را حل کنید.

- | | | |
|---|--|---|
| ۱) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ | ۲) $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ | ۳) $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x}{x+1}$ |
| ۴) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$ | ۵) $1 - \frac{1}{x} < x+1$ | ۶) $\frac{6-x^2}{x} > 1$ |
| ۷) $\frac{x^2-6x+12}{x+6} \leq 1$ | ۸) $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ | ۹) $\frac{x}{x-3} - \frac{6}{x+1} \geq \frac{14}{x^2-2x-3}$ |
| ۱۰) $x-2 \geq \frac{2x-1}{x+2}$ | ۱۱) $x < \frac{4x-3}{x} < x+2$ | ۱۲) $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2} < 0$ |

۲۷. یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی t ام از رابطه‌ی $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود. در چه فاصله‌ی زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۲۸. تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه‌ی $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

۲۹. به ازای چه مقادیری از m ، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

۳۰. حدود m را چنان بیابید که عبارت $2mx^2 + x + 1$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت باشد.

۳۱. حدود k را چنان بیابید که عبارت $2kx^2 + 5x - 1$ همواره منفی باشد.

۳۲. مقادیر m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^2 + 2mx + 4 = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

۳۳. حدود k را چنان بیابید که معادله‌ی $2x^2 + x + 2k = 0$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

۳۴. حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^2 + mx - m - \frac{3}{4} = 0$ همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

۳۵. حدود m را چنان بیابید که معادله‌ی $x^2 + (m+2)x + 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

نامعادلات قدر مطلق

۳۶. نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x| < 3$

۲) $|x - 3| \leq 2$

۳) $|-2x + 5| < 2$

۴) $|4x - 1| \leq -2$

۵) $|2x - 1| > 5$

۶) $|5 - 2x| \geq 1$

۷) $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$

۸) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

۹) $\left| \frac{1-x}{2x-5} \right| > 1$

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

۱. اگر $f(x) = 5x - 2$ باشد، مقادیر $f(3)$ و $f(-4)$ و $f(0)$ و $f(\frac{1}{5})$ را بیابید.

۲. برای اندازه‌گیری دما از واحدای سانتی‌گراد C و فارنهایت F استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F = \frac{9}{5}C + 32$ به

یکدیگر وابسته‌اند.

الف) -20 درجه‌ی سانتی‌گراد، چند درجه‌ی فارنهایت است؟

ب) 104 درجه‌ی فارنهایت، چند درجه‌ی سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد.

۳. کدام‌یک از رابطه‌های زیر، تابع هستند؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

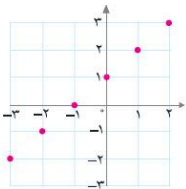
$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

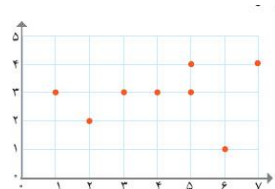
$$k = \{(2, 5)\}$$

$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$$

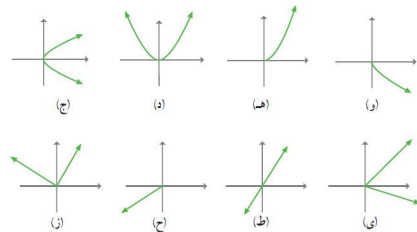
$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$



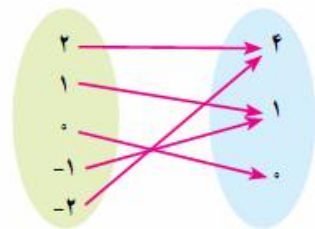
(الف)



(ب)



x	۱	۲	۳	۲
y	۸	۴	۶	۵



۴. آیا خطوط $x = 2$ و $y = 3$ تابع اند؟

۵. طول یک مستطیل ۵ برابر عرض آن است:

الف) تابعی بنویسید که مساحت این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

ب) تابعی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۶. تابعی بنویسید که طول قطر یک مربع را بر حسب طول ضلع آن بیان کند.

۷. یک تانکر گاز، از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30

متر مربع باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۷. اگر در تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$ ، $g(-2) = \frac{1}{3}$ ، $g(1) = 5$ ، $g(0) = 2$ ، g را به صورت مجموعه‌ای از

زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی $R = \{(3, a+b), (-1, 14), (3, -2), (-1, 2a-b)\}$ یک تابع باشد.

۹. اگر رابطه‌ی $f = \{(2, 4), (1, 5), (a-1, 1), (1, a^2-4)\}$ یک تابع باشد، مقدار a چقدر است؟

۱۰. اگر رابطه‌ی $R = \{(3, 2n-1), (3, 5), (4, 6-2m), (4, 2p)\}$ یک تابع باشد و $2p + m + n = 9$ ، مقدار p را به دست آورید.

۱۱. اگر در تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 2x^2 + ax + b$ ، $f(1) = 5$ و $f(-2) = -1$ باشد، مقدار $3a - 2b$ را بیابید.

درس دوم: دامنه و برد یک تابع

* اگر y تابعی از x باشد که به صورت ضابطه مشخص شده باشد، مجموعه‌ی مقادیری که متغیر x می‌تواند اختیار کند، دامنه و مجموعه‌ی مقادیری که متغیر y می‌تواند اختیار کند، برد تابع نامیده می‌شود.

۱۲. اگر تابعی با نمایش جبری $f(x) = 4x + 3$ داده شده باشد و دامنه‌ی آن $A = \{2, 3, 5\}$ باشد، برد تابع را بیابید.

۱۳. تابعی مثال بزنید که:

(الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.

(ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

(پ) دامنه‌ی آن تنها شامل یک عضو باشد.

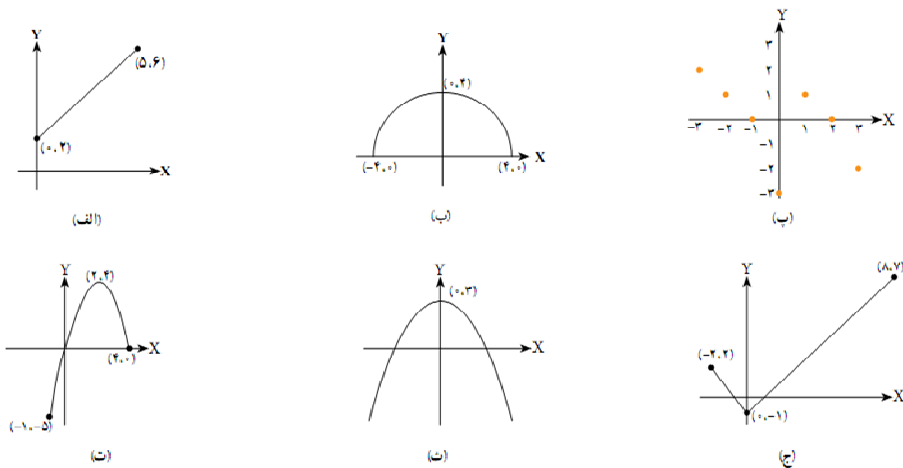
(ت) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

(ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۱۴. نمودار توابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

۱۵. دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن‌ها یکی باشد ولی هیچ دو زوج مشترکی نداشته باشند.

۱۶. نمودارهای زیر مربوط به چند تابع می‌باشد، دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.



۱۷. اگر $f = \{(2, x-1), (y-3, 3), (5, 3), (5, y-2)\}$ یک تابع باشد، دامنه و برد f را به دست آورید.

تابع خطی

۱۸. نمودار یک تابع خطی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. اگر داشته باشیم $f(-3) = 4$ ، معادله‌ی تابع را مشخص کنید.

۱۹. اگر $f(x) = ax^2 + (a+b-1)x + 2b$ تابعی خطی باشد و $f(0) = 2$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۲۰. نمودار تابع خطی از نقاط $(2, -1)$ و $(3, -2)$ عبور می‌کند. نمایش جبری تابع f را به دست آورید.

۲۱. برای یک تابع خطی داریم: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$ ، نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۲۲. نمودار یک تابع خطی از نقاط $(4, 3)$ و $(0, 3)$ می‌گذرد. مقادیر $f(-4)$ و $f(-1)$ را به دست آورید.

۲۳. نمایش جبری دو تابع خطی را بنویسید که دامنه‌ی آن بازه‌ی $[-3, 5]$ باشد.

درس سوم: انواع تابع

۲۴. نمودار توابع $f(x) = |x|$ و $f(x) = -|x|$ را رسم کنید.

۲۵. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۲۶. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ 1 + \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و سپس $f(4)$ و $f(-6)$ را به دست آورید.

۲۷. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ x - 3 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۲۸. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع f را به دست آورید.

۲۹. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع را بنویسید.

پ) مقادیر $f(4)$ و $f(\sqrt{3})$ و $f(-5)$ را به دست آورید. ۳۱۰. نمودار تابع

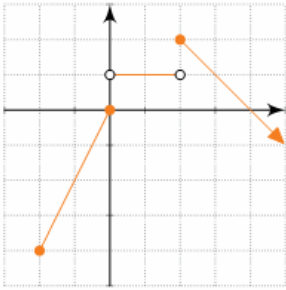
$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۳۱. کدام یک از نمودارهای زیر، یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

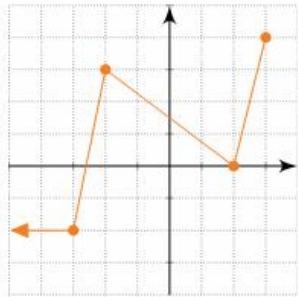
$$۱) f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$۲) g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۳۲. نمودار تابع قطعه‌ای f داده شد است. ضابطه‌ی آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



۳۳. نمودار تابع f به صورت زیر داده شد است. ضابطه‌ی آن را نوشته و مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



- ۱) $f(6)$ ۲) $f(\sqrt{5})$ ۳) $f(3)$ ۴) $f(\frac{1}{2})$ ۵) $f(0)$ ۶) $f(-\frac{5}{2})$

رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال

۳۴. ابتدا نمودار توابع $y = x^2$ و $y = -x^2$ و $y = |x|$ و $y = -|x|$ را رسم کنید و سپس نمودار توابع زیر را به کمک انتقال توابع فوق رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

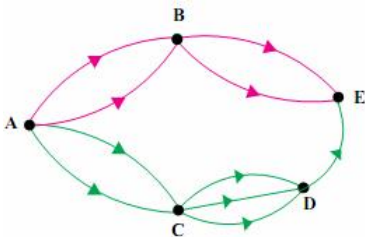
- | | | |
|---|--------------------------|-----------------------------------|
| ۱) $f(x) = (x-2)^2 + 3$ | ۲) $f(x) = (x+3)^2 + 1$ | ۳) $f(x) = (x-1)^2 - 2$ |
| ۴) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ | ۵) $f(x) = -(x-3)^2 + 1$ | ۶) $f(x) = x^2 - 3$ |
| ۷) $f(x) = (x+2)^2$ | ۸) $f(x) = -x^2 - 2$ | ۹) $f(x) = x-2 + 2$ |
| ۱۰) $f(x) = \left x + \frac{1}{2}\right $ | ۱۱) $f(x) = - x + 2$ | ۱۲) $f(x) = - x+1 - \frac{1}{2}$ |

فصل ۶: ترکیبیات

درس اول: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

۱. دانش آموزی ۴ کتاب رمان و ۳ کتاب علمی دارد، اگر قرار باشد یک کتاب از بین آنها انتخاب کرده و به دوستش هدیه بدهد، چند انتخاب می‌تواند داشته باشد؟
۲. فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم نیز عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشد، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان برود؟
۳. از بین ۳ نوع سوپ، ۵ نوع ساندویچ و ۲ نوع نوشابه، چند ناهار مختلف که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ و یک نوع نوشابه باشد می‌توان انتخاب کرد؟
۴. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد؛ به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه‌ی آنها را باهم بپوشد؟
۵. در یک آزمون چهار گزینه‌ای با ۳ سوال، چند راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سوالات وجود دارد در صورتی که به تمام سوالات پاسخ داده شود؟
۶. به چند طریق می‌توان به ۵ سوال ۲ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سوالی بی پاسخ نماند؟
۷. یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سوال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:
 - (الف) مجبور باشد به همه‌ی سوال‌ها جواب دهد؟
 - (ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟
۸. رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌تواند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشد. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟
۹. اگر شکل زیر نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



۱۰. با حروف a, b, c, d, e و بدون تکرار:
 - (الف) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟
 - (ب) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که تکرار مجاز باشد؟
 - (پ) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که شامل حرف c نباشد؟
 - (ت) چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت که حرف اول آنها b و حرف آخر آنها a باشد؟
 - (ث) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف d باشند؟
۱۱. با حروف کلمه‌ی (هندسه) و بدون تکرار حروف:
 - (الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت که با حرف (ن) شروع نشود؟
 - (ب) چند کلمه‌ی دو حرفی می‌توان نوشت که با حرف (س) شروع شود؟

۱۲. با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ چند عدد:

(الف) سه رقمی می توان نوشت که تکرار ارقام مجاز نباشد؟

(ب) سه رقمی می توان نوشت که تکرار ارقام مجاز باشد؟

(پ) چهار رقمی زوج می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

(ت) سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

(ث) سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت که تکرار مجاز نباشد؟

۱۳. با ارقام ۵ و ۳ و ۸ و ۲ و ۷ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی ساخت به طوری که:

(الف) این عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

(ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

۱۴. با ارقام ۳ و ۷ و ۵ و ۶ و ۸ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی بدون تکرار ساخت به طوری که:

(الف) آن عدد زوج باشد.

(ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.

۱۵. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و بدون تکرار:

(الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

(ب) چند عدد چهار رقمی مضرب پنج می توان نوشت؟

(پ) چند عدد چهار رقمی فرد می توان نوشت؟

(ت) چند عدد چهار رقمی زوج می توان نوشت؟

(ث) چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۴۰۰ می توان نوشت؟

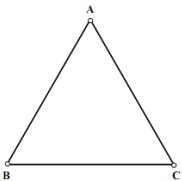
(ج) چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می توان نوشت؟

۱۶. می خواهیم راس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

(الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به طوری که راس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

(پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.



۱۷. با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن ها از مجموعه A و سایر ارقام از مجموعه B

انتخاب می شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب می شود، چند ماشین را می توان شماره گیری کرد؟



$$A = \{1, 2, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{\text{ی، ه، و، ن، م، ل، ق، ط، ص، س، د، ج، ب}\}$$

۱۸. در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک)

تولید می شود.

(الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

(ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

(پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده ای اتوماتیک دارند؟

۱۹. مساله‌ی زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مساله: چند عدد زوج دو رقمی می‌توان نوشت به طوری که؟

حل: تعداد راه‌حل‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد ره‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۲۰. مساله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آن‌ها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$

درس دوم: جایگشت

فاکتوریل

۲۱. کدام یک از موارد زیر دست و کدام یک نادرست است؟

۱) $6! = 3! + 3!$	۲) $6! = 6 \times 5!$	۳) $8! = 4! \times 2!$	۴) $2 \times 3! = 6!$
۵) $(3!)^2 = 9!$	۶) $\frac{8!}{2!} = 4!$		

۲۲. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\frac{7!}{5!}$	۲) $\frac{10!}{9!}$	۳) $\frac{9!}{6! \times 3!}$	۴) $\frac{100!}{2! \times 98!}$
۵) $\frac{n!}{(n-1)!}$	۶) $\frac{n!}{(n-2)!}$	۷) $\frac{n!}{(n-3)!}$	۸) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
۹) $\frac{n!}{(n-k)!}$			

جایگشت

۲۳. تعداد جایگشت‌های ۶ شی متمایز چندتاست؟

۲۴. به چند حالت مختلف می‌توان حروف e, d, c, b, a را کنار هم قرار داد؟

۲۵. با کنار م قرار دادن اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

۲۶. تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ شی متمایز را به دست آورید.

۲۷. چهار نفر به چند طریق می‌توانند روی پنج صندلی که در یک ردیف چیده شده است، بنشینند؟

۲۸. در یک شرکت که ۲۰ عضو دارد، قرار است یک رئیس، یک معاون و یک خزانه دار انتخاب شوند؛ اگر هر عضو فقط

حداکثر در یکی از این سمت‌ها بتواند باشد، به چند طریق می‌توان انتخاب آن‌ها را انجام داد؟

۲۹. در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ، تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند

مشخص شوند؟

۳۰. یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

۳۱. در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص، باید سه کلید با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدامند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۳۲. از بین تعدادی کتاب می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم، اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

۳۳. به چند طریق می‌توان ۷ کتاب مختلف را در یک قفسه چید به طوری که ۳ کتاب مشخص همواره کنار هم باشند؟

۳۴. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب فیزیک سالهای اول تا چهارم دبیرستان تا را کنار هم در یک قفسه چید به طوری که:

الف) هیچ محدودیتی در چیدن کتابها وجود نداشته باشد.

ب) کتاب سال دوم در خانه‌ی اول از سمت چپ قرار بگیرد.

پ) کتابهای سال دوم و چهارم همواره کنار هم باشند.

ت) کتابهای سالهای اول و دوم، کنار هم و کتابهای سالهای سوم و چهارم نیز کنار هم باشند.

۳۵. به چند طریق می‌توان ۳ کتاب شیمی مختلف و ۵ کتاب ریاضی مختلف را در کنار هم در یک قفسه قرار داد به طوری که:

الف) هیچ تفاوتی در هنگام چیدن بین کتابها قائل نشویم.

ب) همه‌ی کتابهای ریاضی کنار هم قرار گیرند.

پ) همه‌ی کتابهای شیمی کنار هم قرار گیرند.

ت) کتابهای ریاضی در کنار هم و کتابهای شیمی نیز در کنار هم قرار گیرند.

۳۶. ۲ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به طوری که:

الف) هیچ شرطی در چیدن کتابها اعمال نشود.

ب) هر دو کتاب ریاضی کنار هم قرار بگیرند.

پ) کتاب های ریاضی کنار هم قرار نگیرند.

ت) کتاب های ریاضی در ابتدا و انتهای قفسه قرار گیرند.

ث) کتاب های فیزیک کنار هم و کتاب های ریاضی نیز کنار هم قرار گیرند.

ج) هیچ دو کتاب ریاضی یا فیزیک کنار هم قرار نگیرد.

۳۷. با حروف کلمه‌ی (جهانگردی) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که به حرف (ی) ختم شود؟

پ) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف (ی) و (د) کنار هم قرار داشته باشند؟

ت) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که به (گردی) ختم شوند؟

ث) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه‌ی (جهان) چهار حرف اول باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی (جهان) کنار هم باشند؟

چ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

درس سوم: ترکیب

۳۸. به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر، یک تیم ۴ نفره برای کوهنوردی انتخاب کرد؟

۳۹. کدام یک از سوالات زیر از طریق جای‌گشت و کدام یک از طریق ترکیب حل می‌شوند؟ جواب هر کدام را به دست آورید.

الف) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

- (ب) به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ کتاب، ۴ کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟
- (پ) به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟
- (ت) به چند طریق ممکن می‌توان از بین ۷ دانش‌آموز، ۳ نفر را برای اعزام به یک اردوی فرهنگی انتخاب کرد؟
۴۰. گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخ گل متمایز می‌تواند قرار دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟
۴۱. یک نقاش، قوطی‌هایی از چهار رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند رنگ جدیدی به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟
۴۲. یک فروشنده‌ی تنقلات، در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل، حداقل باید ۵ نوع از این تنقلات وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟
۴۳. در یک کلاس، تعدادی دانش‌آموز که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این ۲ نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟
۴۴. در یک کیسه ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی آبی متمایز وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۴ مهره خارج کرد به طوری که:
- (الف) سه مهره سفید و یک مهره آبی باشد.
- (ب) فقط سه مهره آبی باشد.
- (پ) حداقل دو مهره سفید باشد.
- (ت) هر چهار مهره هم‌رنگ باشند.
۴۵. برای تشکیل تیمی ۶ دانش‌آموز سال سوم و ۵ دانش‌آموز سال اول داوطلب شده‌اند، به تصادف سه دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:
- (الف) دو دانش‌آموز از سال سوم و یک دانش‌آموز از سال اول باشد.
- (ب) هر سه دانش‌آموز از یک کلاس باشند.
- (پ) حداکثر ۲ دانش‌آموز از سال اول باشد.
۴۶. به چند طریق می‌توان ۳ لامپ باهم و به تصادف از بین ۱۲ لامپ متمایز که ۸ عدد از آنها معیوب است انتخاب کرد به طوری که:
- (الف) هر سه لامپ سالم باشد.
- (ب) حداقل دو لامپ معیوب باشد.
- (پ) یکی از لامپ‌ها معیوب باشد.
۴۷. در کیسه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره سفید متمایز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از میان آنها سه مهره به طور تصادفی انتخاب کرد به طوری که:
- (الف) ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.
- (ب) تمام مهره‌ها سفید باشند.
- (پ) هیچ مهره‌ای سفید نباشد.
- (ت) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.
- (ث) تعداد مهره‌های آبی از سفید بیشتر باشد.
- (ج) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

چ) حد اکثر ۱ مهره سفید باشد.

۴۸. از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان، قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

۴۹. کیسه ای شامل ۲ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی زرد متمایز است. به چند طریق می‌توان ۳ مهره خارج کرد به طوری که:

الف) حتماً دو مهره زرد باشد.

ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

پ) هر سه مهره از رنگهای متفاوت باشند.

۵۰. از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی سیاه می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف) فقط ۲ مهره سفید باشد.

ب) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

۵۱. در یک دوره مسابقات کشتی، از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد.

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک کشور، یک نفر در کمیته باشد.

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی باشد.

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی باشند.

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد.

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی باشد.

۵۲. یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

۵۳. دانش‌آموزی در امتحانی از بین ۱۰ سوال باید حتماً به ۸ سوال پاسخ دهد:

الف) او این سوالات را به چند طریق می‌تواند انتخاب کند؟

ب) اگر او بخواهد حتماً به سه سوال اول پاسخ دهد، انتخاب او به چند طریق خواهد بود؟

۵۴. یک آشپز، ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که باهم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه باهم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به دو دسته‌ی ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ کدام از ادویه‌های دسته‌ی اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته‌ی دوم سازگاری ندارند؟

۵۵. در مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ مطلوب است:

الف) تعداد کل زیر مجموعه‌ها.

ب) تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی.

پ) تعداد زیر مجموعه‌های هشت عضوی.

ت) تعداد زیر مجموعه‌های پنج عضوی.

ث) تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی.

ج) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در تمام آنها موجود باشد.

چ) تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی که عدد ۸ در هیچ کدام از آنها موجود نباشد.

ح) تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی که در هیچ کدام از آنها اعداد ۵ و ۹ نباشد.

۵۶. ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند:

الف) چند وتر می‌توان با نقاط یاد شده رسم کرد؟

ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس مثلث از نقاط مذکور باشند.

۵۷. مساله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

$$\text{الف) } \binom{5}{3} \times \binom{6}{2}$$

$$\text{ب) } \binom{5}{3} + \binom{6}{2}$$

$$P(5, 3) = 6C(5, 2)$$

۵۸. درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

۵۹. در تساویهای زیر مقدار n را تعیین کنید.

$$۱) p(n, 2) = ۷۲$$

$$۲) c(n+1, 3) = 3p(n, 2)$$

$$۳) p(n, 2) + 4 = c(5, 2)$$

$$۴) p(n, 4) = 3p(n, 3)$$

۶۰. مقادیر n و r را در دستگاه زیر محاسبه کنید.

$$\begin{cases} c(n, r) = ۱۰ \\ p(n, r) = ۶۰ \end{cases}$$

فصل ۷: آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

پدیده‌ی تصادفی (آزمایش تصادفی)

فضای نمونه‌ای

۱. ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، طبق اصل ضرب مشخص کنید و سپس اعضای فضای نمونه‌ای را در هر یک از آزمایش‌های تصادفی، بنویسید.
پرتاب یک سکه - پرتاب هم‌زمان دو سکه - پرتاب سه سکه - پرتاب یک تاس - پرتاب دو تاس - پرتاب یک تاس و یک سکه

پیشامد

۲. فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد که از تعداد جنسیت فرزندان اطلاعی در دست نیست:
الف) فضای نمونه‌ای تعداد فرزندان چند عضو دارد؟ اعضای فضای نمونه‌ای را بنویسید.
ب) پیشامد A را بنویسید که در آن یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.
پ) پیشامد B را بنویسید که در آن حداکثر یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.
ت) پیشامد C را بنویسید که در آن حداقل یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.
ث) پیشامد D را بنویسید که در آن تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد.
ج) پیشامد E را بنویسید که در آن تعداد فرزندان پسر از تعداد فرزندان دختر بیشتر باشد.
چ) پیشامد F را بنویسید که در آن فرزند اول و آخر پسر باشند.
ح) پیشامد G را بنویسید که در آن فرزند پسر در خانواده متولد نشده باشند.
۳. دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای.
ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.
پ) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب سه باشد.
ت) پیشامد C که در آن هر دو عدد رو شده اول باشد.
ث) پیشامد D که در آن عدد روی تاس اول زوج و عدد روی تاس دوم بیشتر از ۵ باشد.
ج) پیشامد E که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب ۵ و عدد روی تاس اول مضرب ۳ باشد.
۴. در کیسه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره سفید متمایز وجود دارد. از میان آنها سه مهره به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعداد اعضای:

الف) پیشامد A که در آن ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شود.
ب) پیشامد B که در آن تمام مهره‌ها سفید باشند.
پ) پیشامد C که در آن هیچ مهره‌ای سفید نباشد.
ت) پیشامد D که در آن هر سه مهره هم‌رنگ باشند.
ث) پیشامد E که در آن تعداد مهره‌های آبی از سفید بیشتر باشد.
ج) پیشامد F که در آن حداقل ۲ مهره آبی باشد.
چ) پیشامد G که در آن حد اکثر ۱ مهره سفید باشد.

۵. دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای.

ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.

پ) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب سه باشد.

ت) پیشامد C که در آن هر دو عدد رو شده اول باشد.

ج) پیشامد D که در آن عدد روی تاس اول زوج و عدد روی تاس دوم بیشتر از ۵ باشد.

چ) پیشامد E که در آن مجموع اعداد رو شده مضرب ۵ و عدد روی تاس اول مضرب ۳ باشد.

۶. هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچکتر از ۱۱ را روی یک کارت نوشته و یکی را به تصادف برمی داریم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی روی این فضای نمونه ای می توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن عدد روی کارت بر ۵ بخش پذیر باشد مشخص کنید.

ت) پیشامد B را که در آن عدد روی کارت اول یا فرد باشد مشخص کنید.

ث) پیشامد C که در آن عدد کارت مضرب ۳ و زوج باشد.

ج) پیشامد D که در آن عدد کارت مضرب ۳ یا اول باشد.

۷. هر یک از اعداد دو رقمی را که با اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ می توان نوشت، روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن

کارت ها، یکی را به تصادف بر می داریم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

ت) پیشامد C که در آن عدد روی کارت زوج و یا مضرب ۳ باشد.

۸. تمام ترکیبات دو رقمی بدون تکرار مجموعه ای اعداد $\{1, 2, 3\}$ را روی کارت های مختلف نوشته ایم (هر ترکیب روی

یک کارت)، یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم؛ مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای

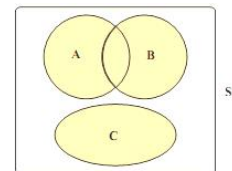
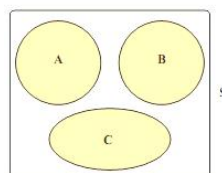
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت زوج باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

اعمال روی پیشامدها

پیشامدهای ناسازگار

۹. کدام یک از پیشامدهای زیر دو به دو ناسازگارند؟



۱۰. در پرتاب یک تاس، هرگاه پیشامد A رو شدن عدد کمتر از ۳ و پیشامد B رو شدن عدد اول باشد، آیا A و B

ناسازگارند؟ چرا؟

۱۱. دو تاس مختلف را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که حداقل یکی ۵ بیاید و B پیشامد آن باشد که شماره‌های رو شده برابر باشند، آیا A و B ناسازگارند؟
۱۲. خانواده‌ای دارای سه فرزند است. اگر A پیشامد هم‌جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد:
- الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
- ب) پیشامد A و B را مشخص کنید.
- پ) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟
۱۳. سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟ چرا؟
۱۴. اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای (رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۴)، (رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳) و (رو شدن عدد ۳ یا ۴) را به ترتیب A ، B و C تعریف کنیم، در این صورت، پیشامدهای A ، B و C دو به دو ناسازگارند.
۱۵. تاسی را می‌اندازیم. روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A ، B و C را طوری تعریف کنید که:
- الف) A و B ناسازگار باشند.
- ب) A ، B و C دو به دو ناسازگار باشند.
- پ) $(A \cap B)$ و C ناسازگار باشند.
۱۶. یک تاس را دو بار به هوا می‌اندازیم، مطلوب است:
- الف) تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای.
- ب) پیشامد A که در آن عددهای برآمده فرد باشند.
- پ) پیشامد B که در آن مجموع عددهای برآمده ۸ باشد.
- ت) پیشامد $A \cap B$.
۱۷. تاسی را یک بار می‌اندازیم مطلوب است تعیین:
- الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.
- ب) پیشامد A که در آن عدد تاس زوج باشد.
- پ) پیشامد B که در آن عدد تاس مضرب ۳ باشد.
- ت) پیشامد $A - B'$.
۱۸. یک سکه و یک تاس سالم را باهم می‌اندازیم مطلوب است تعیین:
- الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی.
- ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.
- پ) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.
- ت) $A' \cup B'$.
۱۹. یک سکه‌ی سالم را سه بار می‌اندازیم مطلوب است:
- الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.
- ب) پیشامد A که در آن اقل‌اً دو بار رو بیاید.
- پ) پیشامد B که در آن فقط ۲ بار پشت بیاید.
- ت) پیشامد C که در آن هر سه بار سکه به یک رو ظاهر شود.
- ج) پیشامد $A \cap B'$.

۲۰. یک سکه را سه بار می اندازیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای.

ب) پیشامدی A که در آن حداقل ۲ بار رو بیاید.

پ) پیشامد B که در آن هر سه بار به یک طرف ظاهر شود.

۲۱. سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم؛ اگر پشت بیاید آنگاه تاس را می ریزیم و اگر رو بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید.

پ) پیشامد B که در آن دقیقاً دو بار سکه رو بیاید.

ت) پیشامد $A' \cup B$.

۲۲. در یک خانواده‌ی سه فرزندی پیشامدی را که در آن فرزند اول دختر باشد A و پیشامدی را که در آن فرزند سوم پسر باشد B می نامیم.

الف) پیشامدهای A و B را بنویسید.

ب) پیشامد $A \cap B'$ را بنویسید.

۲۳. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد "تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد" را نمایش دهید.

۲۴. اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد " A و B هر دو باهم اتفاق بیفتد" را با یک عبارت مجموعه‌ای مناسب بنویسید و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

۲۵. اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد "فقط پیشامد A اتفاق بیفتد" را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

۲۶. اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. ر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نشان دهید:

الف) پیشامدهای A و C رخ دهند ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ دهد.

پ) پیشامد B رخ دهد و C رخ ندهد.

۲۷. سکه‌ای را یک بار پرتاب می کنیم. اگر سکه رو ظاهر شد، آنگاه تاس را می ریزیم در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا بنویسید.

۲۸. سکه‌ای را یک بار پرتاب می کنیم. اگر سکه پشت ظاهر شد، آنگاه یک تاس می اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه‌ی دیگر می اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد آن را که تاس زوج بیاید بنویسید.

پ) پیشامد آن را که حداقل ۲ سکه رو بیاید مشخص کنید.

۲۹. چنانچه در پرتاب یک تاس عددی کمتر از ۲ بیاید یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم و اگر عددی کمتر از ۲ نیاید سکه را یک بار پرتاب می کنیم؛ فضای نمونه ای این تجربه‌ی تصادفی را بنویسید.

۳۰. سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم که برای اولین بار رو بیاید. پیشامدی از این آزمایش تصادفی را بنویسید که در کمتر از ۶ بار پرتاب به این منظور برسیم.
۳۱. سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم که رو بیاید. فرض کنید A پیشامد آن باشد که در پرتاب دوم یا سوم به این نتیجه برسیم. فضای نمونه ای این آزمایش و پیشامد A را بنویسید.

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

۳۲. دو تاس را باهم می اندازیم. مطلوب است احتمال آن که:

- الف) هر دو تاس زوج بیایند.
 ب) مجموع دو تاس ۵ باشد.
 پ) مجموع دو تاس ۸ و تاس اول فرد باشد.
 ت) مجموع دو تاس ۸ و تاس اول مضرب ۳ باشد.
 ث) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند.
 ج) مجموع دو تاس ۷ و هر دو تاس فرد باشند.
 چ) مجموع دو تاس بیشتر از ۱۰ باشد.
 ح) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد.
 خ) حاصل ضرب ر دو عدد رو شده ۱۲ باشد.
۳۳. یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که:

- الف) عدد روی تاس بزرگتر از ۵ باشد.
 ب) سکه پشت و تاس ۴ بیاید.
 پ) سکه پشت یا تاس ۴ بیاید.
 ت) سکه رو و تاس فرد بیاید.

۳۴. برای تشکیل تیمی ۶ دانش آموز سال سوم و ۵ دانش آموز سال اول داوطلب شده اند، به تصادف سه دانش آموز انتخاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که:

- الف) دو دانش آموز از سال سوم و یک دانش آموز از سال اول باشد.
 ب) هر سه دانش آموز از یک کلاس باشند.
 پ) حداکثر ۲ دانش آموز از سال اول باشد.

۳۵. از جعبه ای که شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سبز و ۲ مهره سیاه می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، مطلوب است احتمال آن که:

- الف) فقط ۲ مهره سفید باشد.
 ب) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

۳۶. اگر حروف کلمه ی (جهانگردی) را به تصادف کنار هم قرار دیم، چقدر احتمال دارد:

الف) حرف (ی) آخر باشد؟

ب) دو حرف (ی) و (د) کنار هم باشند؟

پ) با حرف (ج) شروع و به حرف (ی) ختم شود؟

۳۷. اگر ۷ نفر که دو نفر آن ها باهم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر باشند؟

ب) یکی از آن ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

قوانین احتمال:

۳۸. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $P(A) \leq P(B)$.

۳۹. اگر $P(A') = 0/3$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cup B) = 0/9$ باشد، آن گاه حاصل $P(A \cap B)$ را به دست آورید.

۴۰. اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشد، مطلوب است محاسبه $P(B)$.

۴۱. اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B') = \frac{3}{4}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

۴۲. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ، A ، B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(B')$ را تعیین کنید.

۴۳. احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود $0/7$ و احتمال آن که در درس شیمی قبول شود $0/85$ و احتمال آن که در هر دو درس قبول شود $0/6$ است. مطلوب است احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس ریاضی و شیمی قبول شود.

۴۴. احتمال آن که دانش آموزی در درس ریاضی قبول شود 55% و در درس شیمی قبول شود 60% درصد است، اگر احتمال آن که حداقل در یکی از این دو درس قبول شود 75% باشد، احتمال آن را بیابید که در هر دو درس قبول شود

۴۵. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند ثابت کنید: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامع و نمونه

آمار، علم آمار، جامعه، اندازه جامعه (حجم جامعه) نمونه، اندازه‌ی نمونه (حجم نمونه)

۴۶. در هر یک از موارد زیر، جامعه را مشخص کرده و یک نمونه‌ی مناسب انتخاب کنید.

(۱) تعیین میزان ساعت مطالعه‌ی روزانه‌ی دانش‌آموزان بیرستان توحید.

(۲) تعیین اندازه‌ی قند خون افراد بالای ۳۰ سال شهر دامغان.

(۳) تعیین درصد لامپ‌های معیوب یک شرکت تولیدی لامپ.

درس سوم: متغیر و انواع آن

متغیرهای کمی، متغیر پیوسته، متغیر گسسته، متغیرهای کیفی، ترتیبی، متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

۴۷. نوع متغیرها را در نمودار زیر مشخص کنید.

نوع متغیر	متغیر
	۱- میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر
	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
	۴- میزان دمای هوا
	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

۴۸. جدول زیر، متغیرهای دانش آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی مشخص کنید.

متغیرهای دانش آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	X			X		
نمره ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		X			X	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص توده بدن						

۴۹. شاخص توده بدن از حاصل تقسیم وزن برحسب کیلوگرم بر مربع قد بر حسب متر به دست می‌آید. اگر وزن شخصی، ۹۵ کیلو گرم و قد او $1/60$ متر باشد:

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی است؟

شهریور	پایانی دوم	پایانی اول	
			فصل ۱
			فصل ۲
			فصل ۳
			فصل ۴
			فصل ۵
			فصل ۶
			فصل ۷
۲۰	۲۰	۲۰	جمع