

بسم الله الرحمن الرحيم

## درس کنترل دیجیتال Digital Control Systems

دکتر محمدرضا رضانی

### مراجع

1. K. Ogata, Discrete-time control systems, Prentice Hall, 1995
- 2- اسلایدهای درس کنترل دیجیتال دانشگاه علم و صنعت دکتر بلندی و دکتر اسمعیل زاده

• سرفصل مطالب

- طراحی سیستم های زمان-گسسته پیوسته با روشهای تبدیل
- اصول طراحی بر اساس معادل زمان-گسسته یک کنترل کننده آنالوگ
- تحلیل های پاسخ گذرا و حالت دائمی

### فصل 4 کتاب اوگاتا

#### طراحی سیستم های زمان - گسسته با روشهای تبدیل

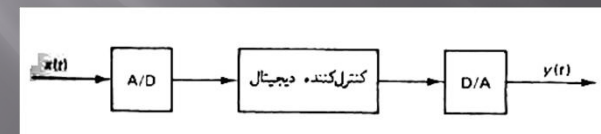
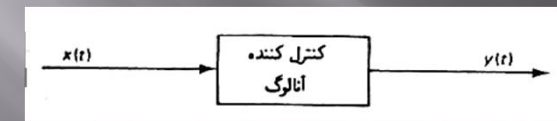
در این فصل چهار روش طراحی متفاوت برای سیستم های کنترل زمان - گسسته تک ورودی - تک خروجی را ارائه می دهیم :

- 1- معادل های گسسته کنترل کننده های آنالوگ
- 2- روش مکان ریشه ها با استفاده از تشکیلات قطب - صفر در صفحه Z
- 3- روش پاسخ فرکانسی در صفحه W
- 4- دستکاری کردن تابع تبدیل پالسی کنترل کننده دیجیتال به منظور بدست آوردن رفتار مطلوبی از سیستم حلقه - بسته

□ روش اول یک روش غیر مستقیم است. در این روش ما یک طراحی زمان پیوسته مرسوم را انجام می دهیم و کنترل کننده حاصل را گسسته می کنیم.

□ سه روش دیگر روشهای مستقیم خوانده می شوند. در اینجا ما مدل دستگاه را گسسته کرده و طراحی را در صفحه Z با استفاده از روشهای گسسته انجام می دهیم.

#### بدست آوردن معادل های زمان - گسسته فیلترهای زمان - پیوسته



### روشهای گسسته کردن

- 1- روش تفاضل معکوس (یک روش انتگرال گیری عددی)
- 2- روش تفاضل مستقیم (یک روش انتگرال گیری عددی).
- این روش ممکن است به یک سیستم ناپایدار منجر شود و بنابراین در عمل نمی تواند بکار رود.
- 3- روش تبدیل دوخطی (یک روش انتگرال گیری عددی بر اساس قاعده انتگرال گیری ذوزنقه ای)
- 4- روش تبدیل دوخطی با پیش تاب دادن فرکانسی (صورت اصلاح شده ای از روش تبدیل دوخطی)
- 5- روش تغییر ناپذیری ضربه (روش تبدیل Z)

6- روش تغییر ناپذیری پله

روش تغییر ناپذیری ضربه با نمونه بردار و نگهدار - روش تبدیل Z توام شده با یک نمونه بردار و نگهدار ساختگی

7- روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته

	$H(s)$	$H(z)$
FW rule	$\frac{a}{s+a}$	$\frac{a}{\left(\frac{z-1}{T}\right)+a}$
BW rule	$\frac{a}{s+a}$	$\frac{a}{\left(\frac{z-1}{Tz}\right)+a}$
Trapezoid rule	$\frac{a}{s+a}$	$\frac{a}{\left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+a}$

### روش تفاضل معکوس

معادله نگاشت از صفحه S به صفحه Z :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

$$\text{Re}(s) < 0$$

ناحیه پایداری در صفحه S

ناحیه پایداری در صفحه Z

$$\text{Re}\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) = \text{Re}\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$$

$$z = \sigma + j\omega \quad \longrightarrow \quad \text{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right)$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)}\right]$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2 + j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}\right) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

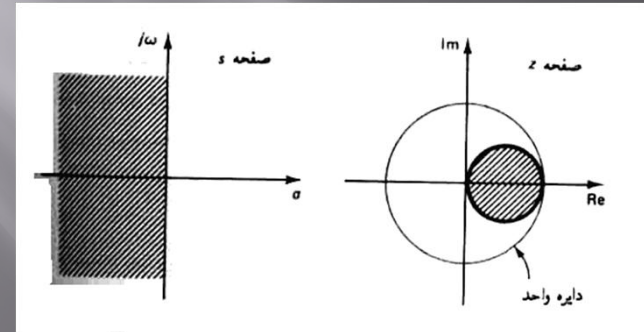
$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

**ناحیه پایداری:**

دایره ای به مرکز  $\sigma = \frac{1}{2}$  ، و به شعاع مساوی  $\frac{1}{2}$  .

□ روش تفاضل معکوس ساده است و برای یک فیلتر زمان پیوسته پایدار یک فیلتر زمان گسسته پایدار بوجود می آورد.

□ ممکن است برخی فیلترهای زمان - پیوسته ناپایدار به فیلترهای زمان - گسسته پایدار نگاشته شوند .



□ در این نگاشت، به علت اینکه ناحیه پایدار به دایره ای در درون دایره واحد نگاشته می شود، اعوجاج قابل ملاحظه ای در مشخصه های پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی فیلتر زمان - گسسته در مقایسه با مشخصه های فیلتر زمان - پیوسته اصلی وجود دارد.

□ برای کاهش اعوجاج لازم است فرکانس نمونه برداری سریعتر، یعنی دوره نمونه برداری  $T$  کوچکتر را بکار ببریم.

**روش تفاضل مستقیم**

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

معادله نگاشت از صفحه  $S$  به صفحه  $Z$ :

$$\operatorname{Re}(s) < 0$$

ناحیه پایداری در صفحه  $S$ :

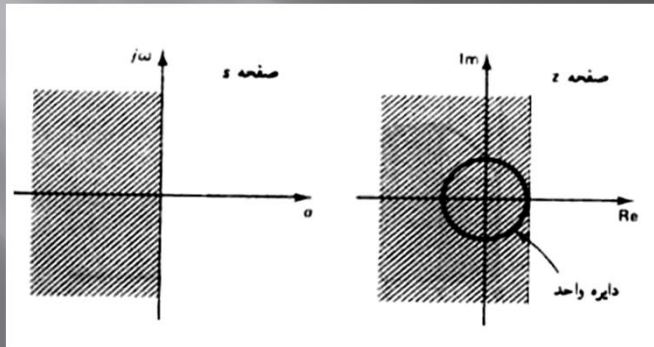
ناحیه پایداری در صفحه  $Z$ :

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}\right] = \operatorname{Re}[(z - 1)/T] < 0$$

$$\operatorname{Re}(z) < 1$$

این نگاشت نشان می دهد که قطبهای سمت چپ صفحه S ممکن است به بیرون از دایره واحد در صفحه Z نگاشته شوند. از این رو فیلتر زمان - گسسته بدست آمده با این روش ممکن است ناپایدار شود.

روش تفاضل مستقیم به عنوان یک روش گسسته کردن، قابل قبول نیست و نمی تواند در عمل بکار برده شود.



### روش تبدیل دوخطی (توستین)

معادله نگاشت از صفحه S به صفحه Z :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$G_D(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

تعداد قطبها و تعداد صفرها در فیلتر گسسته شده فوق برابر می گردد.

مرتبه فیلتر زمان - گسسته (تعداد قطبهای فیلتر زمان - گسسته) با مرتبه فیلتر زمان - پیوسته اصلی یکسان می باشد.

$$\text{Re}(s) < 0$$

ناحیه پایداری در صفحه S :

$$\text{Re}\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \text{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

ناحیه پایداری در صفحه Z :

$$\text{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) &= \text{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) \\ &= \text{Re}\left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + 2j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}\right] < 0 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1^2$$

درون دایره واحد در صفحه Z :

از طریق تبدیل دو خطی، تمامی محور موهومی صفحه S به یک دور کامل دایره واحد در صفحه Z نگاشته می شود. این بدان معنی است که تا شدن فرکانسی وجود ندارد.

تبدیل دو خطی برای یک فیلتر زمان - پیوسته پایدار یک فیلتر زمان - گسسته پایدار بوجود می آورد.

این نگاشت با نگاشت بدست آمده از  $z = e^{Ts}$  که تمامی محور موهومی صفحه S را به تعداد بینهایت دور دایره واحد می نگارد منطبق است.

اگرچه تبدیل دوخطی و تبدیل Z از این نظر با هم شبیه هستند، لیکن اختلافهای قابل توجهی میان اثرات آنها بر مشخصه های پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی فیلتر زمان - گسسته وجود دارد.

### روش تغییر ناپذیری ضربه (روش تبدیل Z)

فیلتر زمان-گسسته معادل، فیلتری است که پاسخ ضربه آن مساوی T برابر پاسخ ضربه متناظر فیلتر زمان پیوسته در لحظه‌های نمونه‌برداری است.

$$G_D(z) = TG(s)$$

مثال:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad \longrightarrow \quad G_D(z) = \frac{Ta}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

□ از نظر پایداری، چون تبدیل Z همیشه یک G(s) پایدار را به یک  $G_D(z)$  پایدار می‌نگارد، اگر برای بدست آوردن فیلتر زمان گسسته معادل یک فیلتر زمان پیوسته پایدار از این روش استفاده شود، هیچ مسئله پایداری وجود ندارد. لیکن تعیین فیلتر زمان - گسسته معادل با این روش از دیدگاه محاسباتی ساده نمی‌باشد.

### روش تغییر ناپذیری پله (تبدیل Z با نمونه‌بردار و نگهدار)

فیلتر زمان-گسسته معادل، فیلتری است که پاسخ پله آن با پاسخ پله متناظر فیلتر زمان پیوسته در لحظه‌های نمونه‌برداری یکسان باشد.

$$G_D(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

مثال:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad \longrightarrow \quad G_D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

□ از نظر پایداری، فیلتر زمان - گسسته معادل بدست آمده وقتی پایدار است که فیلتر زمان - پیوسته اصلی پایدار باشد.

### روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته

1- ابتدا  $G(s)$  را به صورت تجزیه شده در می‌آوریم. سپس قطبهای  $G(s)$  به قطبهای صفحه Z بر طبق رابطه  $z = e^{sT}$  نگاشته می‌شوند. مثلاً قطبی از  $G(s)$  در  $s = -a$  به قطبی در  $z = e^{-aT}$  نگاشته می‌شود.

$$s = -a \quad \longrightarrow \quad z = e^{-aT}$$

2- صفرهای  $G(s)$  به صفرهای صفحه Z بر طبق رابطه  $z = e^{sT}$  نگاشته می‌شوند. مثلاً صفر پایانداری از  $G(s)$  در  $s = -b$  به صفری در  $z = e^{-bT}$  نگاشته می‌شود.

$$s = -b \quad \longrightarrow \quad z = e^{-bT}$$

3-1 صفرهای بی پایان (صفرها در بینهایت) به نقطه  $z = -1$  نگاشته می‌شوند. از این رو برای هر صفر بی پایان ما عاملی به صورت  $z+1$  در صورت فیلتر زمان - گسسته داریم.  
تعداد چنین صفرهای بی پایان برابر تعداد قطبهای اضافی تابع تبدیل فیلتر زمان - پیوسته است.

3-2 قطبهای بی پایان (قطبها در بینهایت) به نقطه  $z = -1$  نگاشته می‌شوند. از این رو برای هر قطب بی پایان ما عاملی به صورت  $z+1$  در مخرج فیلتر زمان - گسسته داریم.

4- بهره فیلتر زمان - گسسته را چنان تنظیم می‌کنیم که با بهره فیلتر زمان - پیوسته تطبیق داشته باشد. برای فیلترهای پایین گذر، بهره فیلتر زمان - گسسته در  $z = 1$  باید با بهره فیلتر زمان - پیوسته در  $s = 0$  یکسان باشد. به طریق مشابه، برای فیلترهای بالا گذر بهره ها باید به ترتیب در  $z = -1$  و  $s = \infty$  تطبیق کنند.

**نکته:**

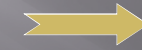
اگر  $G(s)$  شامل قطبها یا صفرهای مختلط مزدوج باشد، معمولاً سودمند خواهد بود که یک دسته قطب یا صفر مختلط مزدوج را به عنوان یک جفت باهم منظور کنیم. نه اینکه آنها را جداگانه در نظر بگیریم.

**مثال:** معادل زمان - گسسته فیلتر پایین گذر داده شده زیر را با استفاده از روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته بدست آورید:

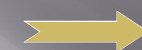
$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

**حل:** توجه کنید که تابع تبدیل فوق صفر پایاندار ندارد اما یک صفر در بینهایت دارد.

صفر در بی نهایت



$$z = -1$$

قطب پایاندار در  
 $S = -a$ 

$$G_D(z) = K \frac{a(z+1)}{z - e^{-aT}}$$

محاسبه بهره:

$$G_D(1) = K \frac{2a}{1 - e^{-aT}} = G(0) = 1$$

$$K = \frac{1 - e^{-aT}}{2a}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})(z+1)}{2(z - e^{-aT})} = \frac{(1 - e^{-aT})(1 + z^{-1})}{2(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

توجه کنید درجه چند جمله ای های صورت و مخرج یکسان است (مفهوم؟).

**مفهوم:** خروجی  $y(kT)$  در زمان  $kT$ ، ورودی نمونه برداری شده در زمان  $kT$  یا  $x(kT)$  را لازم خواهد داشت.

**مثال:** معادل گسسته فیلتر زمان - پیوسته زیر را با استفاده از روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته بدست آورید:

$$G(s) = \frac{s+b}{s+a}$$

$$s = -b \xrightarrow{\text{صفر}} z = e^{-bT}$$

$$s = -a \xrightarrow{\text{قطب}} z = e^{-aT}$$

**حل:**

$$G_D(z) = K \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

**محاسبه بهره :**

$$G_D(1) = K \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} = G(0) = \frac{b}{a}$$

$$K = \frac{b(1 - e^{-aT})}{a(1 - e^{-bT})}$$

**مدل گسسته فیلتر :**

$$G_D(z) = \frac{b(1 - e^{-bT})}{a(1 - e^{-aT})} \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

$$= \frac{b(1 - e^{-bT})}{a(1 - e^{-aT})} \frac{1 - e^{-bT}z^{-1}}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

**مثال :** معادل گسسته فیلتر زمان - پیوسته زیر را با استفاده از روش نگاشت قطب - صفر تطبیق یافته بدست آورید :

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$$

توجه کنید که قطبهای مزدوج صفحه s به قطبهای مزدوج صفحه z نگاشته می شوند.

در فیلتر فوق ، صفر پایانداری وجود ندارد، اما دو صفر بینهایت وجود دارد.

$$G_D(s) = K \frac{(z+1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$$

**محاسبه بهره :**

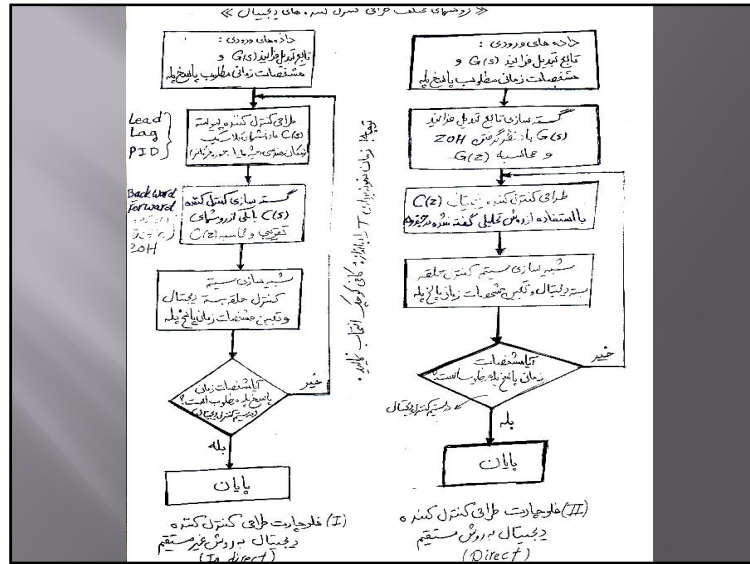
$$G_D(1) = G(0)$$

$$K = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

**مدل گسسته فیلتر :**

$$G_D(z) = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)} \frac{(1 + z^{-1})}{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT} z^{-2}}$$

روش نگاشت	معادله نگاشت	فیلتر زمان-گسسته معادل برای
روش تقاضل معکوس	$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$	$G(s) = \frac{a}{s+a}$
روش تقاضل مستقیم	$s = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$	این روش توصیه نمی شود. زیرا معادل زمان گسسته آن ممکن است ناپایدار شود.
روش تبدیل دوخطی	$s = \frac{T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$G(s) = \frac{a}{\frac{T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a}$
روش تبدیل دوخطی با پیش-تایم‌دادن فرکانس	$s = \frac{T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ $(\omega_s = \frac{T}{2} \tan \frac{\omega_d T}{2})$	$G(s) = \frac{\tan \frac{\omega_d T}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan \frac{\omega_d T}{2}}$
روش تبدیل بیزی-جری	$G_D(s) = Tz[C(s)]$	$G_D(s) = \frac{Ts}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$
روش تبدیل بیزی-بند	$G_D(s) = Tz \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} C(s) \right]$	$G_D(s) = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$
روش نگاشت قطب-صفر تطبیق یافته	یک قطب یا صفر در $s = -a$ به $s = e^{-aT}$ نگاشته می شود. قطب یا صفر در $s = j\omega$ به $s = -1$ نگاشته می شود.	$G_D(s) = \frac{1 - e^{-aT}}{T} \frac{1 + z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$



### اصول طراحی بر اساس معادل زمان - گسسته یک کنترل کننده آنالوگ

مدار نگهدار یک عقب افتادگی زمانی در سیستم بوجود می‌آورد.

عقب افتادگی زمانی، عقب افتادگی فازی بوجود آورده و حاشیه پایداری را در سیستم حلقه بسته کاهش می‌دهد.

شکل ۱-۴-۲ سیستم کنترل دیجیتال.

فرض می‌کنیم که در سیستم کنترل دیجیتال خود از نگهدار مرتبه - صفر استفاده شود:

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

می‌دانیم:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \dots} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$$

بنابراین می‌توان نگهدار مرتبه صفر را بصورت زیر تقریب زد:

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{Ts}{2} \right) = \frac{T}{2} \frac{1}{s + 1/T}$$

عقب افتادگی زمانی که توسط نگهدار مرتبه - صفر در حلقه بسته معرفی خواهد شد را می‌توان با عقب افتادگی زمانی زیر تقریب زد:

$$\frac{T}{0.5Ts + 1}$$

از آنجایی که کل بهره  $Q$  سیستم در مرحله آخر طراحی تعیین خواهد شد، لذا میتوان تابع تبدیل زیر را در نظر گرفت:

$$G_r(s) = \frac{1}{0.5Ts + 1}$$

صورت اصلاح شده سیستم زمان پیوسته برای منظور کردن عقب افتادگی زمانی:

شکل ۱-۴-۱۱ سیستم زمان پیوسته نشان داده شده در شکل ۱-۴-۲ اصلاح شده برای منظور کردن افتادگی زمانی.



□ وقتی که کنترل کننده آنالوگ سیستم بطور مناسب طراحی شود، آن وقت با استفاده از یکی از روشهای مطرح شده، کنترل کننده آنالوگ را گسسته کرده و یک کنترل کننده دیجیتال معادل بدست می آوریم و سپس بر اساس بلوک دیاگرام زیر عملکرد آنرا بر اساس ورودیهای مختلف تحلیل نمود تا رفتار مطلوب ارزیابی شود در نهایت کنترل کننده را به صورت چند جمله ای از Z و نهایتا الگوریتم عددی تبدیل کرده و در یک کامپیوتر دیجیتال حل می نمایم :

□ سیستم کنترل زمان پیوسته زیر را در نظر می گیریم.

شکل ۱۳-۴ سیستم کنترل در نظر گرفته شده در مثال ۷-۲.

$$\xi = 0.5$$

$$T_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = 2$$

$$M_p = 16.3\%$$

$$\omega_n = 4$$

□ دوره نمونه برداری T را برای سیستم کنترل دیجیتال باید قبل از اینکه فرآیند طراحی کنونی را شروع کنیم ، انتخاب نمایم :

$$\omega_n = \omega_c \sqrt{1 - \xi^2} = 4\sqrt{1 - 0.5^2} = 3.464 \text{ rad/s}$$

□ بنابراین پاسخ سیستم کنترل زمان پیوسته به ورودی پله واحد با یک نوسان میرانده با دوره تناوب 1.814 ثانیه خواهد داد:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.814$$

□ مطلوب آنست که در هر دوره تناوب حداقل 8 نمونه داشته باشیم. در بعضی سیستم ها ممکن است یک دوره تناوب T تقریباً برابر 1/10 تا 1/2 کوچکترین ثابت زمانی مهم موجود در سیستم انتخاب می کنیم. البته بالاترین فرکانس موج ورودی و نویزهایی که ممکن است در معرض آن قرار گیرند مهم است

$$F = 0.2$$

□ عقب انداختگی زمانی ناشی از مدار نگهدارنده:

$$G_h(s) = \frac{1}{0.1s + 1} = \frac{10}{s + 10}$$

شکل ۱۴-۴ سیستم کنترل تغییر داده شده شکل ۱۳-۴ برای منظور کردن تاخیر فاز پیش بینی شده ناشی از دستگاه نگهدارنده وقتی که کنترل کننده آنالوگ به کنترل کننده دیجیتال تبدیل شود.

□ با استفاده از یکی از روشهای مرسوم کنترل کننده آنالوگ مناسب را بصورت زیر تعیین می نمایم :

$$G_c(s) = 20.25 \left( \frac{s+2}{s+6.66} \right)$$

□ با استفاده از روش نگاهت قطب صفر تطبیق یافته :

$$G_D(z) = K \left( \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644} \right)$$

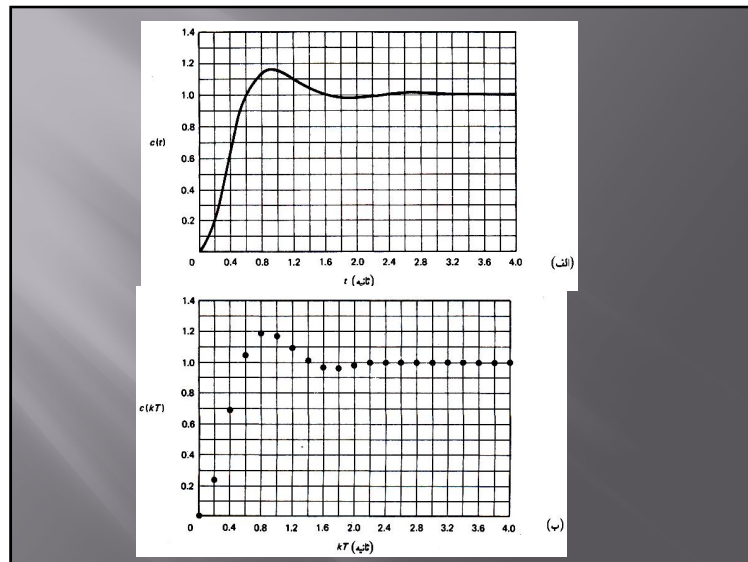
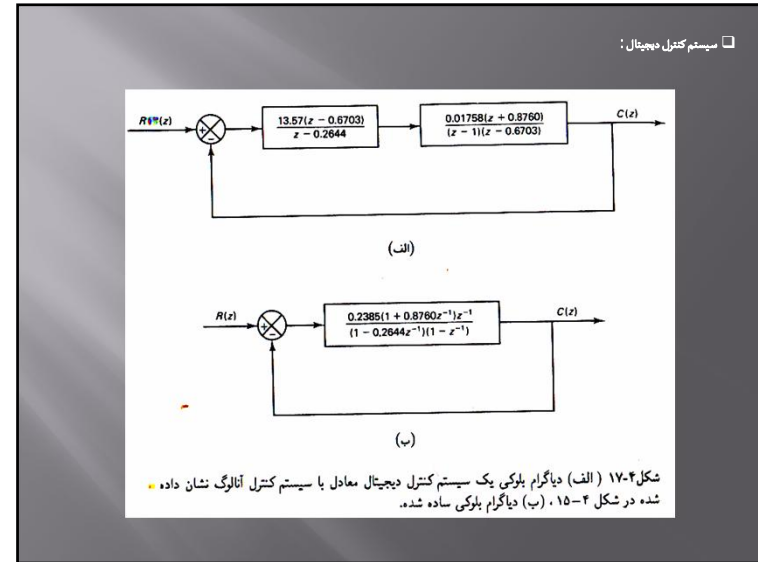
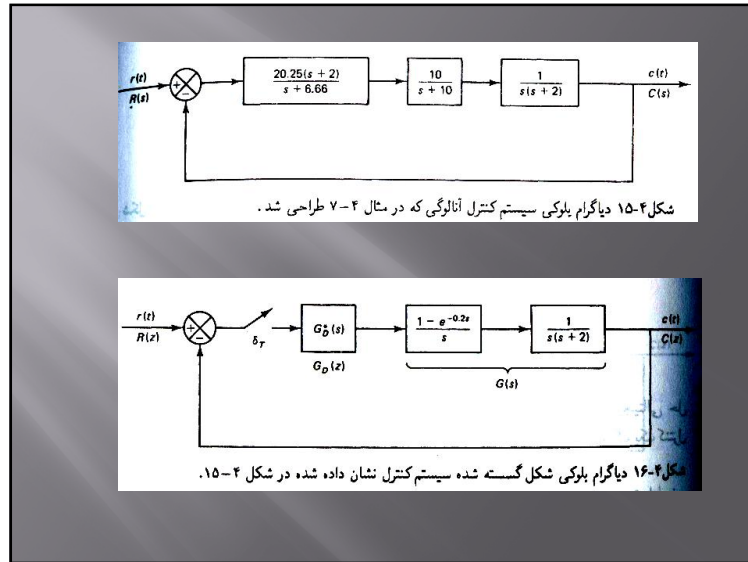
□ محاسبه بهره K:

$$G_D(1) = K \left( \frac{1 - 0.6703}{1 - 0.2644} \right) = G_c(0) = 20.25 \left( \frac{0+2}{0+6.66} \right)$$

$$K = 13.57$$

□ کنترل کننده دیجیتال :

$$G_D(z) = 13.57 \left( \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644} \right)$$



**نکات**

- 1- برای سیستم کنترل آنالوگ و سیستم کنترل دیجیتال معادل آن، ثابت‌های خطا باید با هم مطابقت داشته باشند. در صورتیکه مطابقت نداشته باشند، باید در فرآیند گسسته‌سازی و/یا محاسبات اشتباهاتی وجود داشته باشد.
- 2- مشخصه‌های پاسخ گذرای سیستم کنترل زمان گسسته به دوره تناوب نمونه‌برداری T بستگی دارد.
- 3- اگر سیستم میرایی ضعیف باشد، یک قاعده سرانگشتی آنست که در طول نوسانات سیستمی میرا شده 8 تا 10 بار باید از خروجی سیستم حلقه بسته نمونه‌برداری شود. برای سیستم‌های میرایی شدید، 8 تا 10 بار در طول زمان صعود پاسخ پله نمونه‌برداری کنید.