

به نام خداوند مهربان  
مدرسه علوم کامپیوتر و ریاضی یزد  
کلاس ۹ دی ۱۳۹۵

## گراف

### خلاصه‌ی مطالب گفته شده در کلاس

۱. تعریف تطابق، تطابق ماکسیمم، تطابق کامل و تطابق ماکسیمال
۲. تعریف مسیر افزایشی
۳. تعریف  $H\Delta H'$
۴. لم: اگر  $M$  و  $M'$  دو تطابق از گراف  $G$  باشند، هر مولفه از  $M\Delta M'$  یا دوری به طول زوج است یا مسیر است.
۵. قضیه: یک تطابق کامل است اگر و تنها اگر مسیر افزایشی نداشته باشد.\*
۶. معرفی برخی نمادها:
  - (آ)  $\alpha$ : بزرگترین مجموعه مستقل در گراف
  - (ب)  $\alpha'$ : بزرگترین تطابق در گراف
  - (ج)  $\beta$ : کوچک‌ترین پوشش راسی در گراف
  - (د)  $\beta'$ : کوچک‌ترین پوشش یالی در گراف
۷. معرفی قضیه‌ی هال و اثبات آن
۸. گراف  $k$ -منتظم غیرتهی تطابق کامل دارد.

### مشق

۱. ثابت کنید یک گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرگراف از آن مانند  $H$ ، داشته باشیم:  $\alpha(H) \geq |H|$

۲. ثابت کنید اگر  $a$  عددی طبیعی و گراف  $G(X, Y)$  گرافی دو بخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  باشد، داشته باشیم:

$$\forall x \in X : \deg(x) \geq a$$

$$\forall y \in Y : \deg(y) \leq a$$

آنگاه ثابت کنید  $G$  تطابقی به طول  $|X|$  دارد.

۳. ثابت کنید اگر گراف  $G(X, Y)$  گرافی دو بخشی با دو بخش  $X$  و  $Y$  باشد و کمینه درجه برابر با  $S$  باشد:

اگر  $S \leq |X|$  آنگاه دست کم  $S!$

اگر  $S > |X|$  آنگاه دست کم  $(S - |X| + 1) \times (S - |X| + 2) \times \dots \times (S - 1) \times S$  تطابق به طول  $|X|$  دارد.

۴. قضیه ی konig: در هر گراف دو بخشی ما کسیمم تطابق با کمینه پوشش راسی برابر است.

۵. یک جدول  $n \times m$  داریم که در هر خانه از آن یک عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله می توانیم دو خانه ی مجاور ضلعی را انتخاب کنیم و از هر دو مقدار دلخواه  $k > 0$  تا کم کنیم. به طوری که مقدار هیچ کدام از خانه ها منفی نشود. شرط لازم و کافی روی جدول داده شده را بیابید به طوری که بتوانیم با حرکات مجاز همه ی خانه های جدول را صفر کنیم.

۶. ثابت کنید در هر گراف  $\alpha \geq \frac{n}{\Delta+1}$  است.

۷. مربع لاتین مطالعه شود.

۸. ثابت کنید در هر گراف  $\alpha' + \beta' = n$

۹. ثابت کنید گراف  $G$  که هیچ راس ایزوله ای ندارد (راس درجه ۰)، دو بخشی است اگر و تنها اگر برای هر زیرگراف از آن مثل  $H$ :

$$\alpha(H) = \beta'(H)$$

## ترکیبیات

### خلاصه‌ی مطالب گفته شده در کلاس

#### مستانی

۱. ۱۹۹۷ عدد حقیقی دور یک دایره نوشته شده‌اند که مجموع آن‌ها برابر با ۱ است، ثابت کنید عددی وجود دارد که می‌توان از آن به صورت پادساعتگرد شروع کرد و  $i$  امین حرکت، جمع اعدادی که از آنها عبور کرده‌است را  $b_i$  نامید به طوری که  $b_1, b_2, \dots, b_{1997} > 0$  باشد.
۲.  $n$  نفر داریم که هر نفر خبری متمایز دارد. در هر مرحله، دو نفر می‌توانند به هم تلفن کنند و کل اخباری که می‌دانند را با هم مبادله کنند. با استقرا ثابت کنید با کمتر از  $2n - 4$  مرحله نمی‌توان به جایی رسید که هر نفر تمام اخبار را بداند. ( $n \geq 4$ )

#### حاتمی

۱. دو نفر در حال بازی هستند. در هر مرحله نفر اول حرف  $A$  یا  $B$  را در سمت راست رشته می‌نویسد و نفر دوم جای دو حرف را با هم عوض می‌کند یا کاری نمی‌کند. ثابت کنید در مرحله‌ی  $2n - 1$  ام نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که رشته پالیندرم شود.

#### ابویی

۱. ثابت کنید مجموع اعداد ۱ تا  $n$  برابر با  $\frac{n \times (n+1)}{2}$  است.
۲. ثابت کنید در یک دایره به شعاع  $3^n$ ، می‌توان  $7^n$  دایره به شعاع یک قرار داد.
۳.  $n$  نفر داریم که هر نفر خبری متمایز دارد. در هر مرحله، دو نفر می‌توانند به هم تلفن کنند و کل اخباری که می‌دانند را با هم مبادله کنند. با استقرا ثابت کنید با  $2n - 4$  مرحله می‌توان به جایی رسید که هر نفر تمام اخبار را بداند. ( $n \geq 4$ )

## توسلی و حاتمی

۱. توضیح کنید روش دوگونه شماری

۲. اثبات اتحادهای ترکیبیاتی:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad (\text{آ})$$

$$\sum_{i=0}^n i \times \binom{n}{i} = n \times 2^{n-2} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k}^2 = n \times \binom{2n-1}{n-1} \quad (\text{د})$$

۳. مجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_6$  از اعداد ۱ تا ۸ داریم. می‌دانیم هر مجموعه دارای دقیقاً ۴ عضو و هر یک از اعداد ۱ تا ۸ دقیقاً در  $m$  مجموعه آمده‌اند.  $m$  چند است؟

۴. یک مسابقه تنیس بین ۱۰ تیم برگزار می‌شود و هر دو تیم دقیقاً یک بار باهم بازی می‌کنند. در هر بازی تیم برنده ۱ امتیاز، تیم بازنده ۰ امتیاز و در صورت مساوی هر دو تیم ۰,۵ امتیاز می‌گیرند. اگر امتیاز تیم  $i$  ام برابر با  $x_i$  باشد، ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{10} i \times x_i \geq 165$$

مشق

ابویی

۱. اتحادهای ترکیبیاتی زیر را ثابت کنید:

الف -

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

ب -

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}$$

۲. ثابت کنید عدد  $111\dots111$  (۲۴۳ تا ۱) بر ۲۴۳ بخش پذیر است.

۳. یک جدول  $2^n \times 2^n$  در نظر بگیرید که یک گوشه‌ی آن حذف شده است. ثابت کنید می‌توان با کاشی‌های  $L$ -شکل (با ۳ خانه) جدول مذکور را پوشاند.

۴. فصل ۶ ترکیبیات زرد علی‌پور مطالعه شود.

### توسلی و حاتمی

۱. یک مسابقه تنیس بین  $n$  تیم برگزار می‌شود و هر دو تیم دقیقاً یک بار باهم بازی می‌کنند. در هر بازی تیم برنده ۱ امتیاز، تیم بازنده ۰ امتیاز و در صورت مساوی هر دو تیم ۰,۵ امتیاز می‌گیرند.

هر نفر نصف امتیازش را در بازی از ۱۰ نفری که کمترین امتیاز را کسب کرده‌اند به دست آورده و همچنین خود این ۱۰ نفر نیز نیمی از امتیازشان را با بازی با ۹ نفر دیگرشان به دست آورده‌اند.  $n$  چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۲. سوالات فصل شمارش مضاعف (۱) روش‌های ترکیبیات ۲ حل شود.