درس ششم کاربرد انتگرال

۱) انتگرال معین

وقتی تابع اولیه‌ی یک تابع را محاسبه می‌کنیم می‌توانیم انتگرال معین آن را نیز حساب کنیم.

مثال ۹۴. انتگرال معین $\int_1^e \ln x \, dx$ را محاسبه کنید.

حل: بنابر مثال ۸۳ داریم $\int_1^e \ln x \, dx = x\ln x - x$ پس می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= x\ln x - x|_1^e = (e\ln e - e) - (1 \times \ln 1 - 1) = -(e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)\\ &= (e - e) - (-1) = 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

وقتی از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم باید اعداد انتگرال معین را نیز طبق متغیر جدید تغییر دهیم. مثال زیر را ببینید.

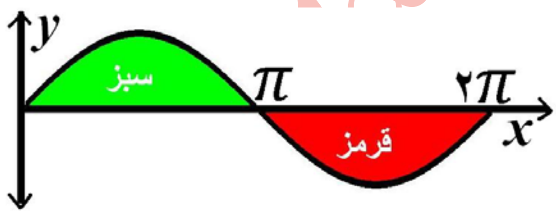
مثال ۹۵. انتگرال معین $\int_3^8 x\sqrt{x+1}\, dx$ را محاسبه کنید.

حل: قرار می‌دهیم $t = \sqrt{x+1}$ وقتی $x = 3$ آنگاه $t = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ و وقتی $x = 7$ آنگاه $t = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$ یعنی اعداد انتگرال معین به ۲ و ۳ تبدیل می‌شوند. تغییر متغیر به این شکل است. $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow t^2 - 1 = x \Rightarrow 2t\, dt = dx$

انتگرال معین به این صورت می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_3^8 x\sqrt{x+1}\, dx &= \int_2^3 (t^2-1)t2t\, dt = 2\int t^4 - t^2 = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_2^3 = 2\left(\left(\frac{3^5}{5} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3}\right)\right)\\ &= 2\left(\left(\frac{243}{5} - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3}\right) = \frac{1076}{15}\end{aligned}$$

۲) مساحت بین نمودار و محور xها



در انتگرال معین مساحت قسمت‌های زیر نمودار اعداد منفی می‌شود. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \sin x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ نمایش داده شده است. در انتگرال معین مساحت قسمت سبز رنگ بالای محور xها عددی مثبت محاسبه می‌شود و مساحت قسمت قرمز پایین محور xها عددی منفی محاسبه می‌شود. و چون این دو عدد هر دو برابرند در نهایت مساحت عدد صفر به دست می‌آید. یعنی

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

برای حل این مشکل باید نقاطی که تابع برابر صفر می‌شود را بدست آوریم سپس در بازه‌های مختلف مساحت را حساب کنیم و در آخر قدرمطلق مساحت‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال ۹۶. مساحت بین نمودار تابع $f(x)=\sin x$ و محور xها را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم $\sin x=۰$ و می‌دانیم که تابع سینوس در نقاط $x=۰$، $x=\pi$ و $x=۲\pi$ برابر صفر می‌شود پس باید مساحت را در بازه‌های $[۰,\pi]$ و $[\pi,۲\pi]$ محاسبه کنیم. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin x$ برابر $F(x)=-\cos x$ است و می‌نویسیم

$$\left.\begin{aligned} s_۱&=F(\pi)-F(۰)=(-\cos\pi)-(-\cos ۰)=(۱)-(-۱)=۲\\ s_۲&=F(۲\pi)-F(\pi)=(-\cos ۲\pi)-(-\cos\pi)=(-۱)-(۱)=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow s=|s_۱|+|s_۲|=|۲|+|-۲|=۴$$

مثال ۹۷. مساحت بین نمودار تابع $f(x)=x^۳-x$ و محور xها را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ بیابید.

حل: ابتدا ریشه‌های $x^۳-x=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$x^۳-x=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x(x+۱)(x-۱)=۰\left\{\begin{array}{l} x=۰\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{array}\right.$$

سه ریشه به دست آمده است. بنابراین با نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[-۲,۳]$ جمعا پنج نقطه‌ی $\{-۲,-۱,۰,۱,۳\}$ وجود دارد می‌نویسیم

$$F(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۲}{۲}\qquad F(-۲)=\frac{(-۲)^۴}{۴}-\frac{(-۲)^۲}{۲}=۴-۲=۲$$

$$F(-۱)=\frac{(-۱)^۴}{۴}-\frac{(۱)^۲}{۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\qquad F(۰)=\frac{۰^۴}{۴}-\frac{۰^۲}{۲}=۰-۰=۰$$

$$F(۱)=\frac{۱^۴}{۴}-\frac{۱^۲}{۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\qquad F(۳)=\frac{۳^۴}{۴}-\frac{۳^۲}{۲}=\frac{۸۱}{۴}-\frac{۹}{۲}=\frac{۸۱-۱۸}{۴}=\frac{۶۳}{۴}$$

در آخر چهار مساحت را به دست می‌آوریم و قدرمطلق آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} s_۱&=F(-۱)-F(-۲)=-\frac{۱}{۴}-۲=-\frac{۹}{۴}\\ s_۲&=F(۰)-F(-۱)=۰-(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}\\ s_۳&=F(۱)-F(۰)=-\frac{۱}{۴}-۰=-\frac{۱}{۴}\\ s_۴&=F(۳)-F(۱)=\frac{۶۳}{۴}-(-\frac{۱}{۴})=\frac{۶۴}{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow s=|s_۱|+|s_۲|+|s_۳|+|s_۴|=\left|-\frac{۹}{۴}\right|+\left|\frac{۱}{۴}\right|+\left|-\frac{۱}{۴}\right|+\left|\frac{۶۴}{۴}\right|=\frac{۷۵}{۴}$$

مثال ۹۸. مساحت بین نمودار تابع $f(x)=۳x^۲+۵$ و محور xها را در بازه‌ی $[۱,۴]$ بیابید.

حل: ابتدا ریشه‌های $۳x^۲+۵=۰$ را به دست می‌آوریم. این معادله ریشه ندارد چون $\Delta<۰$ بنابراین فقط دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=۴$ را داریم. فقط باید $|F(۴)-F(۱)|$ را محاسبه کنیم.

$$F(x)=x^۳+۵x\Rightarrow|F(۴)-F(۱)|=|(۴^۳+۵\times۴)-(۱^۳+۵\times۱)|=(۶۴+۲۰)-(۱+۵)=۸۴-۶=۷۸$$

مثال ۹۹. مساحت بین نمودار تابع $f(x)=۳x^۲+۴x$ و محور xها را در بازه‌ی $[۱,۴]$ بیابید.

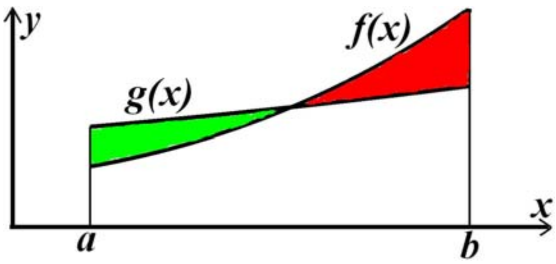
حل: ابتدا ریشه‌های $۳x^۲+۴x=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$۳x^۲+۴x=۰\Rightarrow x(۳x+۴)=۰\left\{\begin{array}{l} x=۰\\ ۳x+۴=۰\Rightarrow ۳x=-۴\Rightarrow x=\dfrac{-۴}{۳}\end{array}\right.$$

هیچ‌کدام از دو ریشه در بازه‌ی $[۱,۴]$ قرار ندارند بنابراین فقط دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=۴$ را داریم. فقط باید $|F(۴)-F(۱)|$ را محاسبه کنیم.

$$F(x)=x^۳+۲x^۲ \Rightarrow |F(۴)-F(۱)|=|(۴^۳+۲\times ۴^۲)-(۱^۳+۲\times ۱^۲)|=(۶۴+۳۲)-(۱+۲)=۹۶-۳=۹۳$$

۳) مساحت بین دو تابع



دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مطابق شکل روبه‌رو داده شده است. می‌خواهیم مساحت بین این دو نمودار را در بازه‌ی $[a,b]$ محاسبه کنیم یعنی در شکل مقابل مساحت قسمت سبز را با قرمز جمع کنیم. برای این منظور ابتدا تابع $f-g(x)$ را حساب می‌کنیم یعنی دو تابع را از هم کم می‌کنیم سپس مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم.

مثال ۱۰۰. مساحت بین نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[۰,۴]$ به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $h(x)=f-g(x)=x-\sqrt{x}$ حالا ریشه‌های $x-\sqrt{x}=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$x-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow x=\sqrt{x} \Rightarrow x^۲=x \Rightarrow x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

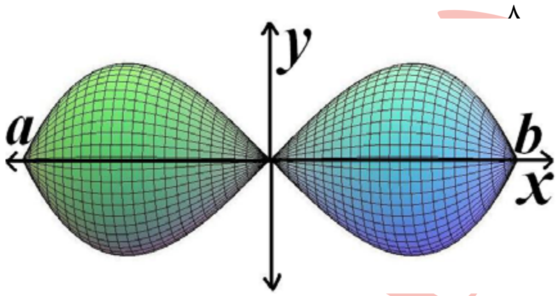
دو ریشه به دست آمده است. بنابراین با نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[۰,۴]$ جمعا سه نقطه‌ی $\{۰,۱,۴\}$ وجود دارد توجه داشته باشید که عدد صفر یک بار ابتدای بازه و یک بار ریشه‌ی معادله‌ی $x-\sqrt{x}=۰$ بنابراین یکبار در نظر گرفته می‌شود. تابع اولیه‌ی تابع $h(x)=f-g(x)=x-\sqrt{x}$ تابع $H(x)=\frac{x^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{x^۳}}{۳}$ است. می‌نویسیم

$$H(۴)=\frac{۴^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۴^۳}}{۳}=۸-\frac{۱۶}{۳}=\frac{۸}{۳} \quad H(۱)=\frac{۱^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۱^۳}}{۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۱}{۶} \quad H(۰)=\frac{۰^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۰^۳}}{۳}=۰$$

در آخر برای سه نقطه دو مساحت به دست می‌آید که با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} s_۱=H(۱)-H(۰)=-\frac{۱}{۶}-۰=-\frac{۱}{۶} \\ s_۲=H(۴)-H(۱)=\frac{۸}{۳}-\left(-\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۱۷}{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow s=|s_۱|+|s_۲|=\left|-\frac{۱}{۶}\right|+\left|\frac{۱۷}{۶}\right|=\frac{۱۸}{۶}=۳$$

۴) حجم حاصل از دوران تابع



مطابق شکل اگر یک تابع مانند $f(x)$ حول محور xها دوران داده شود شکل مخروط مانندی به وجود می‌آید که حجم آن با فرمول $\pi\int_a^b (f(x))^۲dx$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱۰۱. حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=x^۳$ را حول محور xها و در بازه‌ی $[-۱,۲]$ بیابید.

حل: $$\pi\int_{-۱}^{۲}(x^۳)^۲\,dx=\pi\int_{-۱}^{۲}x^۶dx=\pi\times\frac{x^۷}{۷}\Big|_{-۱}^{۲}=\pi\left(\frac{۲^۷-(-۱)^۷}{۷}\right)=\pi\left(\frac{۱۲۸-(-۱)}{۷}\right)=\frac{۱۲۹\pi}{۷}$$

مثال ۱۰۲. حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=\sin x$ را حول محور xها و در بازه‌ی $[۰,\pi]$ بیابید.

حل:
$$\begin{aligned}\pi\int_۰^{\pi}(\sin x)^۲\,dx=\pi\int_۰^{\pi}\sin^۲ x dx &= \pi\left(\frac{x}{۲}-\frac{\sin ۲x}{۴}\Big|_۰^{\pi}\right)=\pi\left((\frac{\pi}{۲}-\frac{\sin ۲\pi}{۴})-(\frac{۰}{۲}-\frac{\sin(۲\times ۰)}{۴})\right) \\ &= \pi\left((\frac{\pi}{۲}-\frac{۰}{۴})-(\frac{۰}{۲}-\frac{۰}{۴})\right)=\pi\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi^۲}{۲}\end{aligned}$$

۵) طول تابع

طول تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ با فرمول $\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx$ به دست می‌آید که در آن $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ است.

مثال ۱۰۳. طول منحنی $f(x)=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳}$ را در بازه‌ی $[۳,۸]$ بیابید.

حل: با مشتق‌گیری داریم $f'(x)=\sqrt{x}$ و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx &= \int_۳^۸ \sqrt{۱+(\sqrt{x})^۲}\,dx=\int_۳^۸ \sqrt{۱+x}\,dx=\frac{۲}{۳}\sqrt{(x+۱)^۳}\Big|_۳^۸\\ &= \frac{۲}{۳}\left(\sqrt{(۸+۱)^۳}-\sqrt{(۳+۱)^۳}\right)=\frac{۲}{۳}(۲۷-۸)=\frac{۲}{۳}\times ۱۹=\frac{۳۸}{۳}\end{aligned}$$

تمرینات

۱) مساحت بین تابع $f(x)=x^۲-۳x$ و محور xها را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ بیابید.

۲) مساحت بین دو تابع $f(x)=۴$ و $g(x)=x^۲$ را در بازه‌ی $[-۳,۳]$ بیابید.

۳) حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=\tan x$ را حول محور xها در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}\right]$ بیابید.

۴) طول منحنی $f(x)=۳x+۵$ را در بازه‌ی $[۰,۷]$ بیابید.