۱۰۱ $A=\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right) \longrightarrow A^۲=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}$

$\longrightarrow A^۲=۴+۲\sqrt{۴-۳}=۶ \longrightarrow A=\sqrt{۶}$ گزینه ④

عبارت $=\sqrt{۶}\times\sqrt[۳]{۲^{۳}\times۲}=\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲\sqrt{۳}$

۱۰۲ $f(x)=۲x-۵ \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۵}{۲}$ گزینه ④

$D_{f^{-1}og}=\{x\in D_g \mid g\in D_{f^{-1}}\}$

$f^{-1}og(x)=\{(۲,\frac{۵+۵}{۲}),(۳,\frac{۶+۵}{۲}),(۱,\frac{۷+۵}{۲}),(۴,\frac{۷+۵}{۲}),(۸,\frac{۱+۵}{۲})\}$

$f^{-1}og(x)=\{(۲,۵),(۳,\frac{۹}{۲}),(۱,\frac{۱۱}{۲}),(۴,۶),(۸,۳)\} \longrightarrow \boxed{a=۴}$

۱۰۳ $f(x)=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$

مجانب افقی $y=۱$

$xf(x)\geq ۰ \longrightarrow \begin{cases} x\geq ۰, f(x)\geq ۰ \longrightarrow x\in[۰,+\infty) \\ x\leq ۰, f(x)\leq ۰ \longrightarrow x\in(-\infty,۰] \end{cases}$

$\longrightarrow \boxed{D_y=(-\infty,+\infty)}$ گزینه ③

۱۰۴ $P=۷+۹+۱۲=۲۸$ قضیه هرون: $S=\sqrt{P(P-۷)(P-۹)(P-۱۲)}$

$P=\frac{P}{۲}=\frac{۲۸}{۲}=۱۴$ $=\sqrt{۱۴\times۷\times۵\times۲}=۱۴\sqrt{۵}$ گزینه ④

۱۰۵ عبارت $=\frac{\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}}{\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^{۴}}}=\frac{۱-t^{۴}}{۱-t}=\frac{(۱-t)(۱+t+t^{۲})}{۱-t}, ۱+t+t^{۲}$ گزینه ①

$۱+t+t^{۲}\Big|_{t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}}=۲+\underbrace{(-۱+t+t^{۲})}_{\text{ریشه این عبارت است } \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}}\Big|_{t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}}=۲+۰=۲$

۱۰۶ $F(x)=\sqrt{(x-۱)^{۲}+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^{۲}+۴} \longrightarrow F'(x)=\frac{۲(x-۱)}{۲\sqrt{(x-۱)^{۲}+۲۵}}-\frac{۲(x-۷)}{۲\sqrt{(x-۷)^{۲}+۴}}=۰$

$\longrightarrow \frac{x-۱}{\sqrt{(x-۱)^{۲}+۲۵}}=\frac{x-۷}{\sqrt{(x-۷)^{۲}+۴}}$ (I)

رابطه ① فقط برای $\boxed{x=۱۱}$ برقرار است. گزینه ④

www.konkur-math.blog.ir

۱۰۷

$\sqrt{5+4x-x^2} > |x-3|+2$ ، $5+4x-x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 5$

می‌توان نوشت:

$3 \leq x \leq 5$: $5+4x-x^2 > (x-1)^2 \rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-2x+1 \rightarrow 2x^2-6x-4 < 0$

$x^2-3x-2 < 0 \xrightarrow{3 \leq x \leq 5} 3 \leq x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ (I)

$-1 \leq x < 3$: $5+4x-x^2 > (-x+5)^2$

$\rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-10x+25 \rightarrow 2x^2-14x+20 < 0 \xrightarrow{-1 \leq x < 3} 2 < x < 3$ (II)

(II) و (I) اجتماع $\rightarrow x \in (2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ گزینه ۲

ابتدا با استفاده از اعداد ۰ و ۵ به ترتیب گزینه‌های ۱ و ۴ را حذف می‌کنیم.

۱۰۸

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2-14x+20 = 4x^2-12x+9-4x+11$

$= (2x-3)^2-4x+4+5 = (2x-3)^2-2(2x-3)+5 \rightarrow f(x) = x^2-2x+5$ گزینه ۳

۱۰۹

$\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos^2 x \rightarrow \frac{2\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 2(1-\sin^2 x)$

$\sin x \neq 0 \rightarrow 2-4\sin^2 x = 2-2\sin^2 x \rightarrow 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ گزینه ۲

۱۱۰

$\alpha = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ گزینه ۱

$\cos 4\alpha = 4\cos^4\alpha - 4\cos\alpha = 4(\frac{1}{3})^4 - 3(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27} - 1 = \frac{-23}{27}$

۱۱۱

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^4 x - \sqrt{\cos x}}{x^4} \times \frac{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^4 x - \cos x}{x^4 \times (2)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x(\cos^4 x - 1)}{2x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{2x^4}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1) \times \frac{-1}{2} \times (3)}{2} = \frac{-3}{4}$ گزینه ۲

www.konkur-math.blog.ir

۱۱۲ گزینه ①

$$y' = 2\cos(\tan^{-1}x)\times(-\sin(\tan^{-1}x))\times\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\frac{1}{1+(1)^2} = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱۱۳ گزینه ②

$$\left|\frac{4n+1}{3n-2}-\frac{4}{3}\right| < 0/02 \longrightarrow \left|\frac{12n+3-12n+8}{3(3n-2)}\right| < 0/02$$

$$\longrightarrow \left|\frac{11}{3(3n-2)}\right| < 0/02 \longrightarrow \frac{3}{11}|3n-2| > \frac{100}{2} \xrightarrow{n\geq 1} 3n-2 > \frac{550}{3}$$

$$\longrightarrow 3n > \frac{556}{3}+2 \longrightarrow 3n > \frac{562}{3} \longrightarrow n > \frac{562}{9} = 61/\dots \longrightarrow n \geq 62$$

۱۱۴ در حالی که $x\to-\infty$ است داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

گزینه ③

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)\times(-1) = +\infty$$

۱۱۵

$$\lim_{x\to0^+}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x = 0$$

$$\lim_{x\to0^-}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x = 0$$

پیوسته

$$\lim_{x\to1^+}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x = (-1)\times(1) = -1$$

$$\lim_{x\to1^-}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x = (1)\times(1) = 1$$

ناپیوسته

گزینه ①

۱۱۶ با توجه به اینکه $x\to3$ پس عبارت براکت ۱ خواهد شد و مخرج آن باید همواره مثبت باشد یعنی $x=3$ ریشه مضاعف آن گردد، پس:

$$(x-3)^2 = x^2-6x+9 \xrightarrow{\times2} 2x^2\underbrace{(-12)}_{a}x\underbrace{(+18)}_{b} \longrightarrow a+b = -12+18 = 6$$

گزینه ③

۱۱۷ با توجه به اینکه نمودار $f(x)$ زمانیکه $x\to\infty$ به عدد ثابتی میل می‌کند پس شکل آن در این نواحی باید به صفر نزدیک شود که با این شرط گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند. همچنین تابع در $x=0$ نقطه عطف دارد، یعنی در مبدأ، پس از آن تغییر علامت می‌دهد، پس f' قبل از صفر صعودی و بعد از آن نزولی است. اگر شکل دوم در $x=0$ وجود داشته باشد برابر صفر است، مانند $f(x)=\tan^{-1}x$ که در اینصورت جواب گزینه ۲ است. و اگر ناموجود باشد مانند تابع $f(x)=\sin\left(\frac{x}{1+|x|}\right)$، جواب گزینه ۱ خواهد بود. (لزومی ندارد که f' در صفر موجود باشد). گزینه ① یا ②

www.konkur-math.blog.ir

۱۱۸ گزینه (۳)

معادله خط با شیب m گذرا: $y-(-1)=m(x-2) \longrightarrow y=mx-2m-1$

این خط برسهمی داده شود مماس باشد باید این معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد، پس:

$$\frac{1}{2}x^2-x=mx-2m-1 \longrightarrow \frac{1}{2}x^2-(1+m)x+(2m+1)=0$$

$$\Delta=0 \longrightarrow (1+m)^2-4\times\frac{1}{2}\times\left[+(2m+1)\right]=0 \longrightarrow m^2-2m-1=0 \quad (1)$$

جواب‌های معادله (1) شیب‌های خطوط مماس خواهد بود و زاویه بین این دو خط با توجه به اینکه $m\times m'=-1$ پس این دو خط برهم عمودند و برابر $\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید.

$$m\times m'=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}$$

۱۱۹ این تابع در $x=-3^+$ دارای ضابطه $f(x)=(-3+x)\sqrt[3]{9x}$ خواهد بود و شکل آن به شکل زیر

$$f'(x)=(-1)\sqrt[3]{9x}+(-3+x)\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}} \longrightarrow f'_+(-3)=-5$$

بدست می‌آید: گزینه (۲)

۱۲۰

$$g'(x)=\frac{-1}{x^2}f^{-1}(x)+\frac{1}{x}\left(f^{-1}(x)\right)' \longrightarrow g'(2)=\frac{-1}{(2)^2}\times(3)+\frac{1}{2}\times(-2)=-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$$

$$A(3,b)\in f \longrightarrow 2b+3=7 \longrightarrow b=2 \longrightarrow A(3,2)\in f \longrightarrow f^{-1}(2)=3$$

$$f'(3)=-\frac{1}{2} \qquad \left(f^{-1}(2)\right)'=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

گزینه (۱)

۱۲۱

$$f'(x)=3x^2e^{-x}+(-e^{-x})\times x^3=(3x^2-x^3)e^{-x} \qquad e^{-x}>0$$

$$f''(x)=(6x-3x^2)e^{-x}-(3x^2-x^3)e^{-x}=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow 3x^2-x^3=0 \longrightarrow x^2(3-x)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$ ریشه مضاعف

$$f''(x)=0 \longrightarrow x^3-6x^2+6x=0 \longrightarrow x(x^2-6x+6)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3+\sqrt{3} \\ x=3-\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$3-\sqrt{3}$		3		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'>0$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''>0$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

جواب

$x\in(0,3-\sqrt{3})$

گزینه (۱)

۱۲۲

$$\sin x+\cos x=0 \longrightarrow \tan x=-1 \longrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \\ x=\frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

چون در دو مقدار بالا با توجه به شکل مجانب قائم نداریم، پس باید ریشه صورت نیز باشند و داریم:

$$a\sin 2x+b=0 \quad \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} \quad -a+b=0 \longrightarrow a=b$$

ادامه در صفحه بعد ←

www.konkur-math.blog.ir

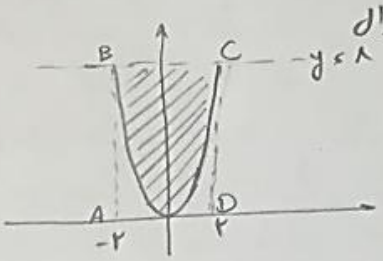
$a=b \rightarrow f(x)=a\dfrac{\sin 2x+1}{\sin x+\cos x}=a\dfrac{2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=a\dfrac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}$

گزینه (۳)

$\rightarrow f(x)=a(\sin x+\cos x)=a\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

با توجه به نمودار تابع بالاترین نقطه آن ۲ می‌باشد پس:

$a\sqrt{2}=2 \rightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



مساحت ناحیه مورد سوال = (مساحت مستطیل ABCD) − $\int_{-2}^{2} x^2|x|\,dx$

مساحت مستطیل ABCD: ۴×۸

$\int_{-2}^{2} x^2|x|\,dx=24$

$\Rightarrow$ مساحت ناحیه مورد سوال $=32-24=8$

با توجه به اینکه $f(x)=x^2|x|$ زوج است، پس

$\int_{-2}^{2} x^2|x|\,dx=2\int_{0}^{2} x^2|x|\,dx=2\int_{0}^{2} x^3\,dx$

گزینه (۴)

$=2\times\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^2=2\times\dfrac{16}{4}=8$

$\int_{1}^{16}[\sqrt{x}]\,dx=\int_{1}^{4}(1)\,dx+\int_{4}^{9}(2)\,dx+\int_{9}^{16}(3)\,dx=x\Big|_1^4+2x\Big|_4^9+3x\Big|_9^{16}$

گزینه (۴)

$=(4-1)+2(9-4)+3(16-9)=3+2\times 5+3\times 7=3+10+21=34$

www.konkur-math.blog.ir