

دیرایش چیسارم

مقاومت مصالح

فردیناند پی بیر
ای راسل جانستون
جان تی دی ولف

بهرام پوستی

فهرست نمادها

P_U بار نهایی (LRFD)	a ثابت؛ فاصله	$A, B, C, \dots$ نیروها، واکنش‌ها
q نیروی برشی برای طول واحد؛ جریان برشی	$A, B, C, \dots$ نقاط	A, a مساحت
Q نیرو	b فاصله؛ عرض	c ثابت؛ فاصله؛ شعاع
Q ممان اول سطح	C مرکز هندسی	$C_1, C_2, \dots$ ثابت‌های انتگرال‌گیری
r شعاع؛ شعاع زیراسیون	C_p ضریب پایداری ستون	d فاصله؛ قطر؛ عمق
R نیرو، واکنش	D قطر	e فاصله؛ خروج از مرکز؛ اتساع
R شعاع؛ مدول گسیختگی	E مدول الاستیسته	f فرکانس، تابع
s طول	F نیرو	F, S ضریب اطمینان
S مدول مقطع الاستیک	G مدول صلابت؛ مدول برش	h فاصله؛ ارتفاع
t ضخامت؛ فاصله؛ انحراف معاسی	H نیرو	H, J, K نقاط
T گشتاور	$I, I_x, \dots$ ممان اینرسی	$I_{xy}, \dots$ حاصلضرب اینرسی
T دما	J ممان اینرسی قطبی	k ثابت فنر؛ ضریب شکل؛ مدول کپ‌های؛ ثابت
u, v مختصات قائم	K ضریب تمرکز تنش؛ ثابت فنر پیچشی	l طول؛ دهانه
u چگالی انرژی کرنشی	L طول؛ دهانه	L_e طول مؤثر
U انرژی کرنشی؛ کار	m جرم	M کوبل
v سرعت	$M, M_x, \dots$ لنگر خمشی	M_D لنگر خمشی، بار مرده (LRFD)
V نیروی برشی	M_L لنگر خمشی، بار زنده (LRFD)	M_U لنگر خمشی، بار نهایی (LRFD)
V حجم، برش	n عدد؛ نسبت مدول‌های الاستیسته؛ جهت قائم	p فشار
w عرض؛ فاصله؛ بار برای طول واحد	P نیرو؛ بار متمرکز	P_D بار مرده (LRFD)
W, W وزن، بار	P_L بار زنده (LRFD)	
x, y, z مختصات قائم؛ فاصله؛ تغییر مکان؛ خیزها		
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز هندسی		
Z مدول مقطع پلاستیک		
α, β, γ زوایا		
α ضریب انبساط گرمایی؛ ضریب تأثیر		
γ کرنش برشی؛ وزن مخصوص		
γ_D ضریب بار، بار مرده (LRFD)		
γ_L ضریب بار، بار زنده (LRFD)		
δ تغییر شکل؛ تغییر مکان		
ϵ کرنش قائم		
θ زاویه، شیب		
λ کسینوس هادی		
ν نسبت پواسون		
ρ شعاع انحنا، فاصله؛ چگالی		
σ تنش قائم		
τ تنش برشی		
ϕ زاویه، زاویه پیچش؛ ضریب مقاومت		
ω سرعت زاویه‌ای		

فهرست مطالب

۱ مقدمه - مفهوم تنش

۱-۱	مقدمه	۲
۲-۱	مرور روش های استاتیک	۲
۳-۱	تنش در عضوهای یک سازه	۴
۴-۱	تحلیل و طراحی	۵
۵-۱	بارگذاری محوری؛ تنش قائم	۵
۶-۱	تنش برشی	۷
۷-۱	تنش تکیه گاهی در اتصالات	۹
۸-۱	کاربرد تنش در تحلیل و طراحی سازه های ساده	۹
۹-۱	روش حل مسائل	۱۱
۱۰-۱	دقت عددی	۱۲
۱۱-۱	تنش وارد بر صفحه مایلی که تحت بارگذاری محوری است	۱۹
۱۲-۱	تنش تحت شرایط کلی بارگذاری؛ مولفه های تنش	۲۰
۱۳-۱	نکات طراحی	۲۳
۳۳	مرور و خلاصه فصل ۱	

۲ تنش و کرنش - بارگذاری محوری

۱-۲	مقدمه	۳۲
۲-۲	کرنش قائم تحت بارگذاری محوری	۳۲
۳-۲	نمودار تنش-کرنش	۳۴
۴-۲	تنش حقیقی و کرنش حقیقی	۴۸
۵-۲	قانون هوک؛ مدول الاستیسیته	۴۸
۶-۲	مقایسه رفتار الاستیک و پلاستیک ماده	۴۹
۷-۲	بارگذاری های تکراری؛ خستگی	۵۱

۸-۲	تغییر شکل عضوها تحت بارگذاری محوری	۵۲
۹-۲	مسائل نامعین استاتیکی	۵۹
۱۰-۲	مسائل مربوط به تغییرات دما	۶۳
۱۱-۲	نسبت پواسون	۷۲
۱۲-۲	بارگذاری چند محوری؛ قانون عمومی هوک	۷۳
۱۳-۲	اتساع؛ مدول کپه‌ای	۷۴
۱۴-۲	کرنش برشی	۷۵
۱۵-۲	توضیح بیشتر درباره تغییر شکل‌ها در بارگذاری محوری؛ رابطه بین E و G	۷۸
۱۶-۲	رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار	۸۰
۱۷-۲	توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری؛ اصل سنت-وانانت	۸۸
۱۸-۲	تمرکز تنش	۸۹
۱۹-۲	تغییر شکل پلاستیک	۹۱
۲۰-۲	تنش‌های باقیمانده	۹۴
	مرور و خلاصه فصل ۲	۱۰۲

۳

پیچش

۱۱۳

۱-۳	مقدمه	۱۱۴
۲-۳	مقدمه‌ای درباره تنش در شفت	۱۱۵
۳-۳	تغییر شکل در شفت دایره‌ای	۱۱۶
۴-۳	تنش در ناحیه الاستیک	۱۱۹
۵-۳	زاویه پیچش در ناحیه الاستیک	۱۲۸
۶-۳	شفت‌های نامعین استاتیکی	۱۳۰
۷-۳	طراحی شفت‌های انتقال قدرت	۱۳۹
۸-۳	تمرکز تنش در شفت‌های دایره‌ای	۱۴۱
۹-۳	تغییر شکل پلاستیک در شفت‌های دایره‌ای	۱۴۵
۱۰-۳	شفت‌های دایره‌ای الاستوپلاستیک	۱۴۶
۱۱-۳	تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای	۱۴۹
۱۲-۳	پیچش عضوهای غیر دایره‌ای	۱۵۶
۱۳-۳	شفت‌های توخالی جدار نازک	۱۵۸
	مرور و خلاصه فصل ۳	۱۶۶

۴

خمش خالص

۱۷۵

۱-۴	مقدمه	۱۷۶
۲-۴	عضو متقارن در خمش خالص	۱۷۷
۳-۴	تغییر شکل عضو متقارن در خمش خالص	۱۷۸



۱۸۰	تنش و تغییر شکل در ناحیه الاستیک	۴-۴
۱۸۳	تغییر شکل در مقطع عرضی	۵-۴
۱۹۱	خمش عضوهایی که از مواد مختلف ساخته شده‌اند	۶-۴
۱۹۴	تمرکز تنش	۷-۴
۲۰۱	تغییر شکل پلاستیک	۸-۴
۲۰۲	عضوهای الاستوپلاستیک	۹-۴
۲۰۶	تغییر شکل پلاستیک عضوهایی که فقط یک صفحه تقارن دارند	۱۰-۴
۲۰۶	تنش‌های باقیمانده	۱۱-۴
۲۱۴	بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن	۱۲-۴
۲۲۲	خمش نامتقارن	۱۳-۴
۲۲۶	حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز	۱۴-۴
۲۲۵	خمش عضوهای خمیده	۱۵-۴
۲۳۳	مرور و خلاصه فصل ۴	

۵

تحلیل و طراحی تیرها در خمش

۲۵۳

۲۵۴	مقدمه	۱-۵
۲۵۶	نمودار برش و نمودار لنگر خمشی	۲-۵
۲۶۵	روابط میان بار، برش، و لنگر خمشی	۳-۵
۲۷۲	طراحی تیرهای منشوری تحت خمش	۴-۵
۲۸۰	استفاده از توابع تکین برای تعیین برش و لنگر خمشی در یک تیر	۵-۵
۲۹۰	تیرهای غیرمنشوری	۶-۵
۲۹۸	مرور و خلاصه فصل ۵	

۶

تنش برشی در تیرها و عضوهای جدار نازک

۳۰۵

۳۰۶	مقدمه	۱-۶
۳۰۷	برش وارد بر وجه افقی یک جزء از تیر	۲-۶
۳۰۹	تعیین تنش برشی در تیرها	۳-۶
۳۱۰	تنش برشی در انواع تیرها	۴-۶
۳۱۱	توضیح بیشتر درباره توزیع تنش در یک تیر باریک مستطیلی	۵-۶
۳۱۸	نیروی برشی طولی وارد بر یک جزء تیر با شکل اختیاری	۶-۶
۳۲۰	تنش برشی در عضوهای جدار نازک	۷-۶

IRUB

۲۲۲	تغییر شکل پلاستیک	۸-۶
۲۳۰	بارگذاری نامتقارن در عضوهای جدار نازک؛ مرکز پرش	۹-۶
۳۴۲	مرور و خلاصه فصل ۶	

۷

تبدیلات تنش و کرنش

۳۳۹

۲۵۰	مقدمه	۱-۷
۲۵۲	تبدیل تنش صفحه‌ای	۲-۷
۲۵۳	تنش‌های اصلی؛ ماکزیمم تنش برشی	۳-۷
۳۶۱	دایره مور برای تنش صفحه‌ای	۴-۷
۳۶۹	حالت کلی تنش	۵-۷
۳۷۰	کاربرد دایره مور برای تحلیل تنش سه‌بعدی	۶-۷
۳۷۳	معیارهای تسلیم برای مواد نرم تحت تنش صفحه‌ای	۷-۷
۳۷۵	معیارهای شکست برای مواد شکننده تحت تنش صفحه‌ای	۸-۷
۳۸۲	تنش در مخزن‌های جدار نازک پرفشار	۹-۷
۳۸۹	تبدیل کرنش صفحه‌ای	۱۰-۷
۳۹۲	دایره مور برای کرنش صفحه‌ای	۱۱-۷
۳۹۴	تحلیل سه‌بعدی کرنش	۱۲-۷
۳۹۷	اندازه‌گیری‌های کرنش؛ گلبزرگ کرنش	۱۳-۷
۴۰۳	مرور و خلاصه فصل ۷	

۸

تنش‌های اصلی در شرایط معین بارگذاری

۳۱۱

۴۱۲	مقدمه	۱-۸
۴۱۲	تنش‌های اصلی در تیر	۲-۸
۴۱۵	طراحی شفت‌های انتقال قدرت	۳-۸
۴۲۲	پتنش در بارگذاری ترکیبی	۴-۸
۴۳۶	مرور و خلاصه فصل ۸	

۹

خیز تیرها

۳۲۳

۴۴۲	مقدمه	۱-۹
۴۴۵	تغییر شکل تیر تحت بارگذاری عرضی	۲-۹
۴۴۶	معادله منحنی الاستیک	۳-۹

RUEB

۴۵۱	تعیین منحنی الاستیک از توزیع بار	۴-۹
۴۵۲	تیرهای نامعین استاتیکی	۵-۹
۴۶۱	استفاده از توابع تکینی برای تعیین شیب و خیز تیر	۶-۹
۴۷۰	روش ترکیب	۷-۹
۴۷۱	کاربرد اصل ترکیب برای تیرهای نامعین استاتیکی	۸-۹
۴۷۹	قضایای لنکر مساحت	۹-۹
۴۸۱	کاربرد قضایای لنکر مساحت برای تیرهای طره‌ای و تیر با بارگذاری متقارن	۱۰-۹
۴۸۳	نمودارهای جزء به جزء لنکر خمشی	۱۱-۹
۴۹۰	کاربرد قضایای لنکر مساحت برای تیر با بارگذاری نامتقارن	۱۲-۹
۴۹۲	خیز ماکزیمم	۱۳-۹
۴۹۳	استفاده از قضایای لنکر مساحت برای تیرهای نامعین استاتیکی	۱۴-۹
۵۰۳	مرور و خلاصه فصل ۹	

۱۰ ستون‌ها ۵۱۵

۵۱۶	مقدمه	۱-۱۰
۵۱۶	پایداری سازه‌ها	۲-۱۰
۵۱۸	فرمول اولیه برای ستون‌های دو سر مفصلی	۳-۱۰
۵۲۰	تعمیم فرمول اولیه برای ستون‌ها با سایر شرایط انتهایی	۴-۱۰
۵۲۹	بارگذاری خارج از مرکز؛ فرمول سکانت	۵-۱۰
۵۳۷	طراحی ستون‌های تحت بار مرکزی	۶-۱۰
۵۴۹	طراحی ستون‌های تحت بار خارج از مرکز	۷-۱۰
۵۵۷	مرور و خلاصه فصل ۱۰	

۱۱ روش‌های انرژی ۵۶۵

۵۶۶	مقدمه	۱-۱۱
۵۶۶	انرژی کرنشی	۲-۱۱
۵۶۷	چگالی انرژی کرنشی	۳-۱۱
۵۶۹	انرژی کرنشی الاستیک برای تنش‌های قائم	۴-۱۱
۵۷۱	انرژی کرنشی الاستیک برای تنش برشی	۵-۱۱
۵۷۳	انرژی کرنشی برای حالت کلی تنش	۶-۱۱
۵۸۲	بارگذاری ضربه‌ای	۷-۱۱
۵۸۴	طراحی در بارهای ضربه‌ای	۸-۱۱
۵۸۵	گاز و انرژی در یک بار تنها	۹-۱۱

۵۸۷	۱۰-۱۱ خیز تحت یک بار تنها با روش کار-انرژی
۵۹۵	۱۱-۱۱ کار و انرژی تحت چند بار
۵۹۷	۱۲-۱۱ قضیه کاستیلیانو
۵۹۸	۱۳-۱۱ تعیین خیز با استفاده از قضیه کاستیلیانو
۶۰۱	۱۴-۱۱ سازه‌های نامعین استاتیکی
۶۱۱	مرور و خلاصه فصل ۱۱

پیوست‌ها

۶۱۹

۶۲۱	الف	ممان سطوح
۶۲۹	ب	خواص نوعی مواد صنعتی
۶۳۱	ج	خواص مقاطع فولادی نورد شده
۶۳۷	د	خیز و شیب تیرها

مقاومت مصالح

۱

مقدمه مفهوم تنش



در این فصل، تنش‌های موجود در اغلب اجزای دستگاه حفاری بالا (مانند عضوهای دینامیکی، اکسل‌ها، پیچ و مهره‌ها و پین‌ها) بررسی می‌شوند.

REB

۱-۱ مقدمه

هدف اصلی از مطالعه مقاومت مصالح این است که مهندسان به ابزار تحلیل و طراحی انواع ماشین‌آلات و سازه‌هایی که تحت بار قرار دارند دست یابند.

در تحلیل و طراحی هر سازه‌ای، با تنش و تغییرشکل سرو و کار داریم. لذا، در فصل اول، مفهوم تنش را مطالعه می‌کنیم.

در قسمت ۱-۲، روش‌های بنیادی در استاتیک را مرور، و از آنها برای تعیین نیروها در عضوهای مفصلی استفاده می‌کنیم. در قسمت ۱-۳، مفهوم تنش در عضو یک سازه و نحوه تعیین تنش را از نیروی موجود در آن عضو بررسی می‌کنیم. پس از بحث مختصری درباره تحلیل و طراحی مهندسی در قسمت ۱-۴، تنش‌های قائم در یک عضو را که تحت بارگذاری محوری است در قسمت ۱-۵، و تنش‌های برشی ناشی از اعمال نیروهای عرضی مساوی و مخالف را در قسمت ۱-۶، و تنش‌های تکیه‌گاهی ناشی از پیچ و مهره‌ها و مفصل‌ها را در قسمت ۱-۷ مطالعه می‌کنیم. این مفاهیم را برای تعیین تنش در عضوهای سازه‌ای قسمت ۱-۲ به کار می‌بریم.

قسمت اول این فصل را با توصیف روش حل یک مسئله (قسمت ۱-۹) و با بحثی درباره دقت عددی که در محاسبات مهندسی به کار می‌رود (قسمت ۱-۱۰) به پایان می‌بریم.

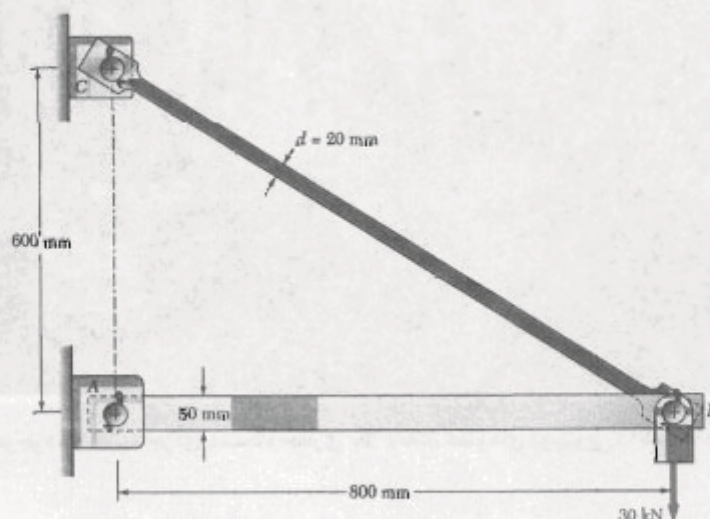
در قسمت ۱-۱۱، که در آن مجدداً یک عضو دوتیرویی تحت بارگذاری محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌بینیم که تنش‌های وارد بر یک صفحه مایل شامل تنش‌های قائم و برشی است، و در قسمت ۱-۱۲ خواهیم دید که برای توصیف حالت تنش در یک نقطه از جسمی که تحت کلی‌ترین شرایط بارگذاری است نیاز به شش مؤلفه است.

سرانجام، در قسمت ۱-۱۳، استقامت نهایی یک ماده را از نمونه آزمایشی تعیین می‌کنیم و از آن برای محاسبه بار مجاز یک عضو ساختمانی استفاده می‌کنیم.

۱-۲ مرور روش‌های استاتیک

در این قسمت، روش‌های بنیادی استاتیک را برای تعیین نیروها در عضوهای یک سازه ساده مرور می‌کنیم.

سازه نشان داده شده در شکل ۱-۱ را، که برای تحمل بار 30 kN است، در نظر بگیرید. این سازه از بازوی AB با مقطع عرضی مستطیلی $50 \times 30 \text{ mm}$ و از میله BC با مقطع عرضی دایره‌ای به قطر 20 mm تشکیل شده است. این بازو و میله توسط مفصل B به هم متصل شده‌اند و توسط مفصل‌ها و بست‌ها، به ترتیب، در A و C نگه داشته شده‌اند. در گام اول، سازه را از تکیه‌گاه‌های A و C جدا می‌کنیم. سپس، با ترسیم نمودار آزاد آن، واکنش‌هایی را که این تکیه‌گاه‌ها بر سازه وارد می‌کنند نشان می‌دهیم (شکل ۱-۲). توجه کنید که با



شکل ۱-۱

با جایگذاری A_y از (۴-۱) در (۳-۱)، داریم $C_y = +30 \text{ kN}$. با بیان برداری واکنش‌ها در A و C ، نتیجه می‌شود:

$$A = 40 \text{ kN} \rightarrow \quad C_x = 40 \text{ kN} \leftarrow, \quad C_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

توجه کنید که واکنش در A در امتداد محور بازوی AB است و در آن عضو ایجاد فشار می‌کند، چون مولفه‌های C_x و C_y ، به ترتیب، با مولفه‌های افقی و عمودی فاصله B تا C متناسب‌اند، نتیجه می‌شود واکنش در C برابر با 50 kN است. این واکنش در امتداد میله BC قرار دارد و در آن ایجاد کشش می‌کند.

نتایج بالا را با توجه به این مطلب نیز می‌توان به‌دست آورد که AB و BC عضوهای دوتیرویی هستند؛ یعنی، عضوهایی که فقط از دو نقطه تحت تأثیر نیرو قرار می‌گیرند (A و B برای عضو AB و C و B برای عضو BC). در حقیقت، برای یک عضو دوتیرویی، خطوط اثر برایندهای نیروهای وارد بر هر یک از این دو نقطه در خلاف جهت هم هستند و از این دو نقطه می‌گذرند. با استفاده از این خاصیت، و با در نظر گرفتن نمودار آزاد مفصل B ، می‌توان حل ساده‌تری را به‌دست آورد. نیروهای وارد بر مفصل B عبارتند از نیروهای F_{AB} ، F_{BC} و بار 30 kN (شکل ۴-۱ الف). با ترسیم مثلث نیروها می‌توان گفت مفصل B در تعادل است (۴-۱ ب).

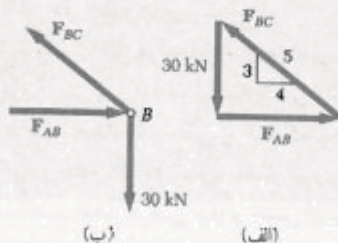
چون نیروی F_{BC} در امتداد عضو BC است، شیب آن با شیب BC برابر است. بنابراین،

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

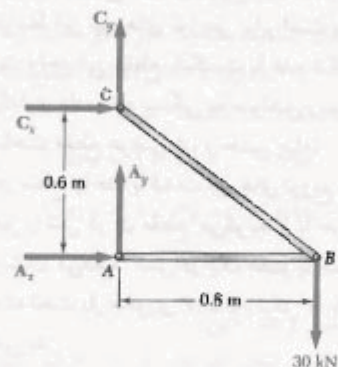
در نتیجه،

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \quad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

نیروهای F_{BC} و F_{AB} که از مفصل B ، به ترتیب، بر بازوی AB و میله BC وارد می‌شوند مساوی و متضاد با F_{AB} و F_{BC} هستند (شکل ۴-۱ د).



شکل ۴-۱



شکل ۲-۱

حذف جزئیات غیر ضرور می‌توان ترسیم نمودار آزاد را ساده کرد. گفتنی است که AB و BC عضوهای دوتیرویی هستند، ولی بدون توجه به این مطلب و با در نظر گرفتن جهت‌های فرضی برای واکنش‌های مجهول A و C ، تحلیل را پیش می‌بریم. لذا، هر یک از این واکنش‌ها را با دو مولفه A_x و A_y در A ، و C_x و C_y در C نشان می‌دهیم و معادله‌های تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 : \quad A_x(0.6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40 \text{ kN} \quad (1-1)$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \quad C_x = -40 \text{ kN} \quad (2-1)$$

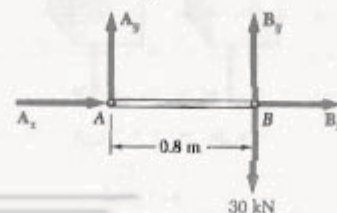
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : \quad A_y + C_y - 30 \text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = +30 \text{ kN} \quad (3-1)$$

دو تا از چهار مجهول را پیدا کرده‌ایم، ولی نمی‌توانیم دو مجهول دیگر را از این معادله‌ها بیابیم. از نمودار آزاد سازه نیز نمی‌توانیم معادله مستقل اضافی به‌دست آوریم. لذا، سازه را جزء جزء می‌کنیم. با در نظر گرفتن نمودار آزاد بازوی AB (شکل ۳-۱)، معادله تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : \quad -A_y(0.6 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 0 \quad (4-1)$$



شکل ۳-۱

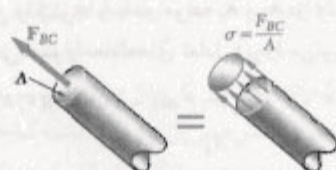


در تمام مساحت مقطع عرضی توزیع شده‌اند (شکل ۷-۱) و شدت متوسط این نیروهای توزیعی برابر است با نیروی وارده بر مساحت واحد این مقطع. شکست یا عدم شکست میله BC تحت بارگذاری داده شده بستگی به عوامل زیر دارد: نیروی F_{BC} ، مساحت مقطع عرضی A ، و جنس میله.

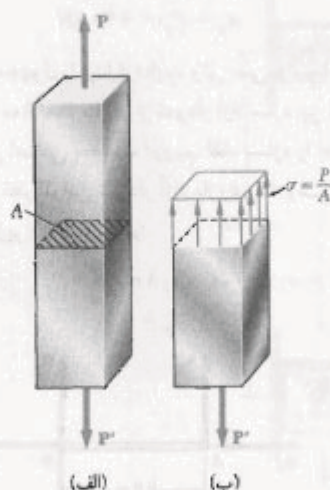
نیرو در سطح واحد، یا شدت نیروهای توزیع شده روی یک مقطع معین را تنش در آن مقطع می‌گویند و با حرف یونانی σ (سیگما) نشان می‌دهند. تنش در یک عضو با مساحت مقطع عرضی A که تحت بار محوری P است (شکل ۸-۱) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (۵-۱)$$

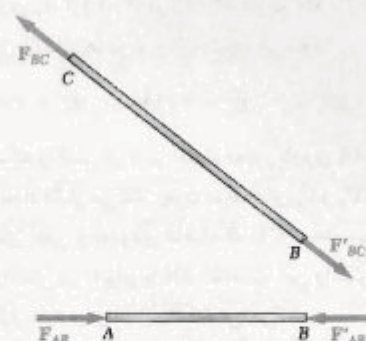
از علامت مثبت برای تنش کششی و از علامت منفی برای تنش فشاری استفاده می‌شود.



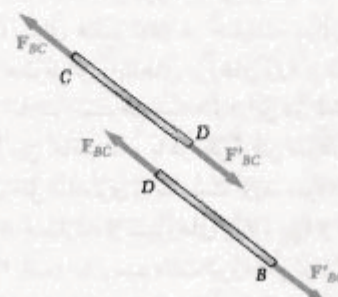
شکل ۷-۱



شکل ۸-۱



شکل ۵-۱



شکل ۶-۱

با معلوم بودن نیروها در دو سر عضوها، می‌توان نیروهای داخلی را در آنها به دست آورد. اگر میله BC را در نقطه اختیاری D مقطع بزنیم، دو قسمت CD و BD خواهیم داشت (شکل ۶-۱). برای تعادل این دو قسمت، نیروهای ۵۰ kN را باید در D بر هر دو وارد کرد. لذا، با اعمال بار ۳۰ kN در نقطه B ، نیروی داخلی ۵۰ kN در میله BC بوجود می‌آید. با توجه به جهت نیروهای F_{BC} و F'_{BC} در شکل ۶-۱، می‌توان گفت میله در کشش است. با روش مشابه می‌توان گفت نیروی داخلی در بازوی AB برابر با ۴۰ kN است و بازو تحت فشار می‌باشد.

۳-۱ تنش در عضوهای یک سازه

گرچه نتایج قسمت قبل در تحلیل سازه‌ها اهمیت دارند، ولی با آنها نمی‌توان پیش‌بینی کرد که آیا سازه می‌تواند بار وارده را تحمل کند یا نه. مثلاً، گسیختگی یا عدم گسیختگی میله BC تحت بارگذاری داده شده نه تنها به مقدار نیروی داخلی F_{BC} ، بلکه به مساحت مقطع عرضی میله و جنس آن نیز بستگی دارد. در حقیقت، نیروی داخلی F_{BC} برابند نیروهای جزئی است که



معادله (۵-۱)،

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

اما $A = \pi r^2$ ، در نتیجه،

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12,62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12,62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25,2 \text{ mm}$$

یعنی، میله آلومینیومی به قطر ۲۵ mm یا بیشتر مناسب خواهد بود.

۵-۱ بارگذاری محوری؛ تنش قائم

میله BC، که در قسمت قبل به آن اشاره شد، یک عضو دوتیرویی است. لذا، نیروهای F_{BC} و F'_{BC} که در دو سر B و C آن وارد می‌شوند (شکل ۵-۱) در امتداد محور میله قرار دارند. گفته می‌شود میله تحت بارگذاری محوری است. مثلاً، عضوهای خرابای پل نشان داده شده در شکل ۹-۱ تحت بارگذاری محوری قرار دارند.

میله BC در شکل ۵-۱ را دوباره در نظر می‌گیریم. قبلاً، برای تعیین نیروی داخلی در میله و تنش متناظر، میله را در امتداد عمود بر محور مقطع زدیم؛ از این رو، نیروی داخلی بر صفحه این مقطع عمود بود (شکل ۷-۱) و تنش متناظر را تنش قائم می‌گویند. تنش قائم در عضوی که تحت بارگذاری محوری است از فرمول ۵-۱ به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5-1)$$



شکل ۹-۱ خرابای این پل از عضوهای دوتیرویی کششی یا فشاری تشکیل شده است.

با P برحسب نیوتن (N) و A برحسب متر مربع (m^2)، تنش σ برحسب N/m^2 است. این واحد را پاسکال (Pa) می‌گویند. ولی، پاسکال کمیت بسیار کوچکی است و در عمل از مضرب‌های آن، مانند کیلوپاسکال (kPa)، مگاپاسکال (MPa) و گیگاپاسکال (GPa) استفاده می‌شود:

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

۴-۱ تحلیل و طراحی

سازه شکل ۱-۱ را مجدداً در نظر بگیرید و فرض کنید میله BC، به قطر ۲۰ mm، از فولاد (با ماکزیمم تنش مجاز $\sigma_{all} = 165 \text{ MPa}$) ساخته شده است. آیا میله BC می‌تواند بار وارده را تحمل کند؟ قبلاً، مقدار نیروی F_{BC} در میله ۵۰ kN به دست آمد. با استفاده از معادله ۵-۱، تنش ناشی از این بارگذاری را می‌یابیم:

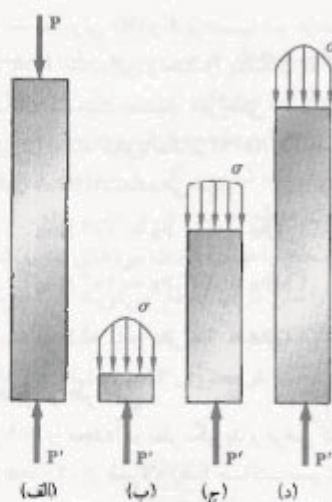
$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

چون σ حاصله کوچکتر از مقدار تنش مجاز فولاد است، نتیجه می‌شود که میله BC با اطمینان می‌تواند بار وارده را تحمل کند. برای تکمیل تحلیل، باید تنش فشاری در بازوی AB را تعیین، و تنش‌های ایجاد شده در مفصل‌ها و یاتاقانها را بیابیم. این کار را بعداً در این فصل انجام می‌دهیم. همچنین باید تعیین کنیم که آیا تغییر شکل‌های ایجاد شده بر اثر بارگذاری وارده قابل قبول‌اند یا نه. مطالعه تغییر شکل‌ها تحت بارهای محوری در فصل ۲ انجام می‌شود. نکته اضافی، که برای عضوهای فشاری باید در نظر گرفت، پایداری عضو است؛ یعنی، قابلیت آن برای تحمل بار وارده بدون اینکه تغییر شکل ناگهانی دهد. این موضوع را در فصل ۱۰ بررسی می‌کنیم.

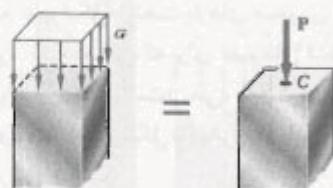
نقش مهندس فقط تحلیل تنش در سازه‌ها و ماشین‌آلات موجود نیست، بلکه باید سازه‌ها و ماشین‌آلات جدید را برای انجام عملیات خاصی نیز طراحی نماید. برای مثال، مجدداً به سازه شکل ۱-۱ برمی‌گردیم، و فرض می‌کنیم می‌خواهیم از آلومینیوم با تنش مجاز $\sigma_{all} = 100 \text{ MPa}$ استفاده کنیم. نیرو در میله BC عبارت است از $P = F_{BC} = 50 \text{ kN}$. تر



شکل ۱۱-۱

لذا، حجم زیر هر یک از سطوح تنش در شکل ۱۱-۱ با مقدار P برابر است. البته، این تنها اطلاعاتی است که از استاتیک می توان درباره توزیع تنش های قائم در مقاطع مختلف میله به دست آورد. توزیع واقعی تنش ها در یک مقطع معین، از مسائل نامعین استاتیکی است. برای اطلاعات بیشتر درباره این توزیع، باید تغییر شکل های ناشی از حالت های خاص اعمال بارها در دو سر میله را در نظر بگیریم. این را در فصل ۲ بررسی می کنیم.

در عمل، فرض می کنیم که توزیع تنش های قائم در عضوی که به طور محوری بارگذاری شده است یکنواخت می باشد، به جز در مجاورت نقاط اثر بارها که یکنواخت نیست. در این حالت، مقدار σ تنش با σ_{avg} برابر است و آن را از فرمول (۵-۱) می توان به دست آورد. با فرض توزیع یکنواخت تنش در مقطع عرضی، از استاتیک* نتیجه می گیریم برآیند P نیروهای داخلی



شکل ۱۲-۱

* نگاه کنید به:

Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 5.2 and 5.3.



شکل ۱۰-۱

گفتنی است که σ در فرمول (۵-۱)، مقدار متوسط تنش در روی مقطع عرضی نشان می دهد، نه تنش در یک نقطه خاص از مقطع عرضی را.

برای تعریف تنش در نقطه معین Q از مقطع عرضی، باید مساحت کوچک ΔA را در نظر بگیریم (شکل ۱۰-۱). از تقسیم مقدار ΔF بر ΔA ، مقدار متوسط تنش را روی ΔA می یابیم. با میل دادن ΔA به سمت صفر، تنش در نقطه Q به دست می آید:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (۶-۱)$$

به طور کلی، مقدار تنش σ در نقطه معین Q از مقطع عرضی با مقدار تنش متوسطی که فرمول (۵-۱) می دهد متفاوت است، و در هر مقطع تغییر می کند. در میله باریکی که تحت بارهای متمرکز مساوی و متضاد P و P' قرار دارد (شکل ۱۱-۱ الف)، این تغییر در مقاطع دور از نقاط اثر بارهای متمرکز کوچک است (شکل ۱۱-۱ ج)، اما در مجاورت این نقاط قابل توجه می باشد (شکل ۱۱-۱ ب، و د). از معادله (۶-۱) نتیجه می شود که مقدار برآیند نیروهای داخلی توزیعی چنین است:

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

اما تعادل هر یک از قسمت های میله شکل ۱۱-۱ نشان می دهد که این مقدار برابر است با مقدار بارهای متمرکز. یعنی،

$$P = \int dF = \int_A \sigma dA \quad (۷-۱)$$

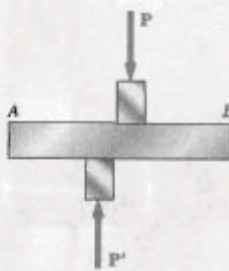
REB

لنگر $M = Pd^*$. در این حالت، توزیع نیروها و توزیع تنش‌های متناظر نمی‌توانند یکتوخت یا متقارن باشند (شکل ۱۱-۱). این مطلب را در فصل ۴ به تفصیل بررسی می‌کنیم.

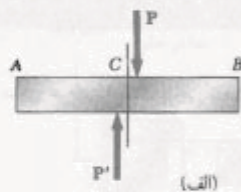
۶-۱ تنش برشی

در قسمت‌های ۲-۱ و ۳-۱، نیروهای داخلی و تنش‌های متناظر بر مقطع تحت بررسی عمود بودند. با اعمال نیروهای عرضی P و P' بر عضو AB (شکل ۱۵-۱)، تنش کاملاً متفاوتی به وجود می‌آید. با عبور یک مقطع در C بین نقاط اثر دو نیرو (شکل ۱۶-۱ الف)، نمودار قسمت AC به دست می‌آید (شکل ۱۶-۱ ب). از تعادل این قسمت نتیجه می‌شود که در صفحه مقطع عرضی نیروهای داخلی وجود دارد، و برآیند آنها P است. این نیروهای جزئی داخلی را نیروهای برشی، و برآیند آنها را بوش در آن مقطع می‌گویند. از تقسیم بوش P بر مساحت A مقطع عرضی، تنش بوشی متوسط به دست می‌آید:

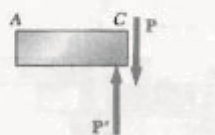
$$\tau_{bvc} = \frac{P}{A} \quad (۸-۱)$$



شکل ۱۵-۱



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-۱

در مرکزوار مقطع عرضی (نقطه C در شکل ۱۲-۱) وارد می‌شود. یعنی، توزیع یکتوخت تنش فقط وقتی امکان‌پذیر است که خط اثر بارهای متمرکز P و P' از مرکزوار مقطع عرضی تحت بررسی بگذرد (شکل ۱۳-۱). این نوع بارگذاری را بارگذاری مرکزی می‌گویند و فرض می‌شود که در تمام عضوهای دنیرویی مستقیم، که در خراباها و سازه‌های مفصلی وجود دارند (مانند عضو شکل ۱-۱)، روی می‌دهد. اگر یک عضو دنیرویی به طور محوری بارگذاری شود و بار دارای خروج از مرکز باشد (شکل ۱۴-۱ الف)، از شرایط تعادل قسمتی از عضو که در شکل ۱۴-۱ ب نشان داده شده است نتیجه می‌شود که نیروهای داخلی در یک مقطع معین معادل است با نیرویی P وارده در مرکزوار آن مقطع و کوپل M با



شکل ۱۳-۱



(الف)

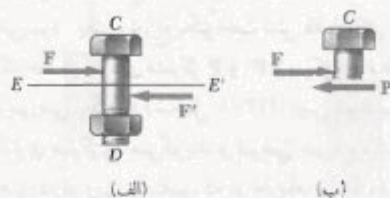


(ب)

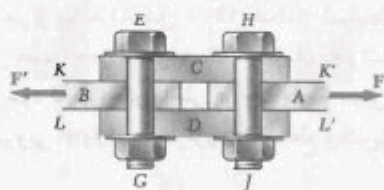
شکل ۱۴-۱

* به آن گشتاور نیز می‌گویند - مترجم.

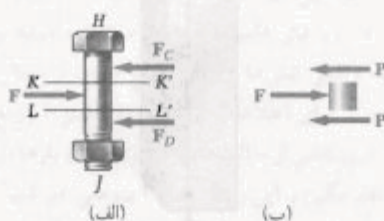
REB



شکل ۱۹-۱



شکل ۲۰-۱



شکل ۲۱-۱

گفته می‌شود این پیچ و مهره تحت برش تنها قرار دارد. البته، حالت‌های دیگری از بارگذاری ممکن است روی دهد. مثلاً اگر برای متصل کردن صفحات A و B از ورق‌های C و D استفاده شود (شکل ۲۰-۱)، نیروی برشی در هر یک از دو صفحه KK' و LL' باعث می‌شود پیچ و مهره HJ (و نیز پیچ و مهره EG) تحت برش قرار گیرد. گفته می‌شود این پیچ و مهره‌ها تحت برش دوگانه قرار دارند. برای تعیین تنش برشی متوسط در هر صفحه، نمودار آزاد پیچ و مهره HJ و نمودار آزاد قسمتی از پیچ و مهره را که بین این دو صفحه قرار دارد رسم می‌کنیم (شکل ۲۱-۱). چون برش P در هر یک از این مقاطع عبارت است از:

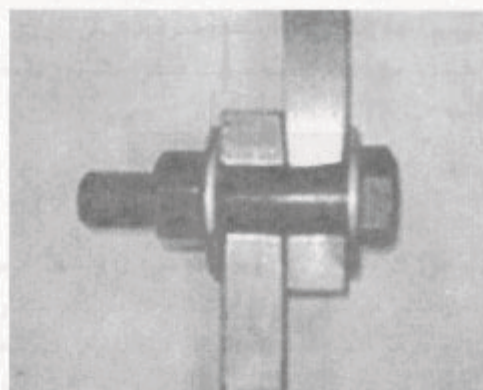
$$P = F/2$$

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \quad (۱۰-۱)$$

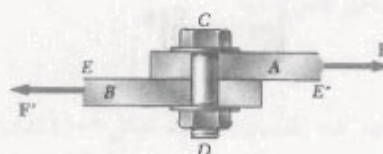
برخلاف آنچه که قبلاً برای تنش‌های قائم گفتیم، توزیع تنش‌های برشی در عرض مقطع را نمی‌توان یکنواخت فرض کرد. همانطور که در فصل ۶ خواهید دید، مقدار واقعی تنش برشی از صفر در سطح عضو تا مقدار ماکزیمم τ_{max} که می‌تواند بزرگتر از مقدار متوسط τ_{ave} باشد، تغییر می‌کند.

تنش‌های برشی معمولاً در پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها و پرچها روی می‌دهد (شکل ۱۷-۱). دو صفحه A و B را که با پیچ و مهره CD به هم متصل شده‌اند در نظر بگیرید (شکل ۱۸-۱). اگر این صفحات تحت نیروهای کششی F قرار گیرند، تنش‌هایی در صفحه EE' به وجود می‌آید. با ترسیم نمودارهای پیچ و مهره و قسمت واقع در بالای صفحه EE' (شکل ۱۹-۱)، نتیجه می‌شود که برش P در این مقطع با F برابر است. تنش برشی متوسط در این مقطع چنین است:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (۹-۱)$$



شکل ۱۷-۱ نمای عرضی اتصال پیچی تحت برش



شکل ۱۸-۱

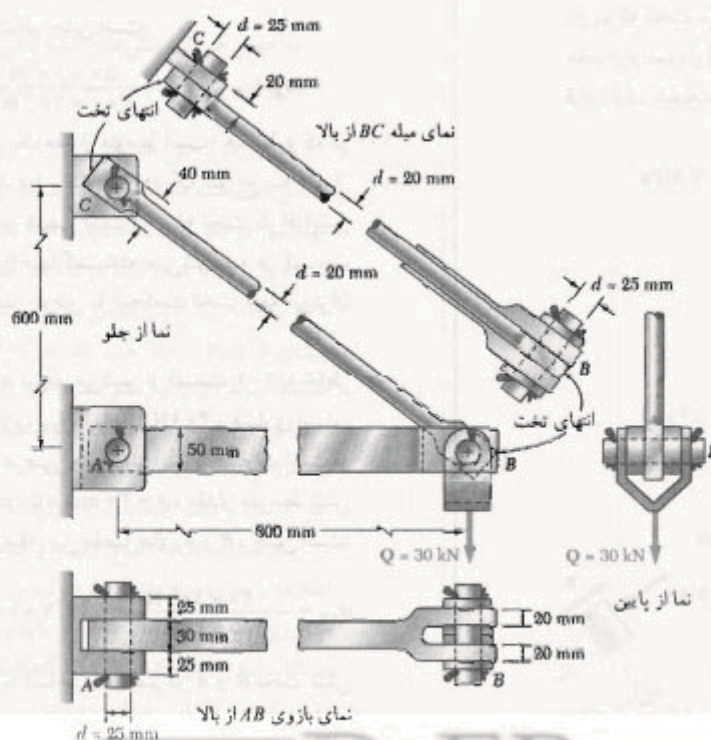
RUEB

۷-۱ تنش تکیه‌گاهی در اتصالات

پیچ و مهره، مفصل‌ها و پرچ‌ها، تنش‌هایی را در امتداد سطح تماس عضوهای متصله به وجود می‌آورند. مثلاً، در صفحه A و B را که توسط پیچ و مهره CD به هم متصل‌اند (شکل ۱-۱۸) در نظر بگیرید. پیچ و مهره، نیروی P را بر صفحه A وارد می‌کند که برابر و متضاد با نیروی F وارده از صفحه بر پیچ و مهره است (شکل ۱-۲۲)؛ نیروی P برآیند نیروهای جزیی توزیع شده روی سطح داخلی نیم استوانه‌ای به قطر d و به طول t است (ضخامت صفحه است). چون توزیع این نیروها و توزیع تنش‌های متناظر - کاملاً پیچیده است، در عمل از مقدار متوسط نامی تنش، σ_h ، که آن را تنش تکیه‌گاهی می‌گویند استفاده می‌شود. این تنش، از تقسیم بار P بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ و مهره روی مقطع صفحه به دست می‌آید (شکل ۱-۲۳). این مساحت برابر است با td ، که در آن t ضخامت صفحه و d قطر پیچ و مهره است. در نتیجه،

$$\sigma_h = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (1-11)$$

۸-۱ کاربرد تنش در تحلیل و طراحی سازه‌های ساده
حال، می‌خواهیم تنش در اعضا و اتصالات سازه‌های ساده دوبعدی مختلف را تعیین، و این سازه‌ها را طراحی کنیم.



شکل ۱-۲۴

ب- تعیین تنش برشی در اتصالات مختلف. برای تعیین تنش برشی در اتصالاتی مانند پیچ و مهره، مفصل یا پرچ، ابتدا نیروهای وارده از عضوهای مختلفی را که توسط این اتصالات به هم متصل شده‌اند نشان می‌دهیم. مثلاً، برای مفصل C در شکل ۲۵-۱ الف، شکل ۲۵-۱ ب را رسم می‌کنیم. در این شکل، نیروی 50 kN وارده از عضو BC بر مفصل C و نیروی مساوی و متضاد با آن را که از براکت وارد می‌شود نشان می‌دهیم. با ترسیم قسمتی از مفصل واقع در زیر صفحه DD' که تنش‌های برشی در آنجا به وجود می‌آیند (شکل ۲۵-۱ ج)، نتیجه می‌شود برش در آن صفحه عبارت است از $P = 50 \text{ kN}$. مساحت مقطع عرضی مفصل برابر است با:

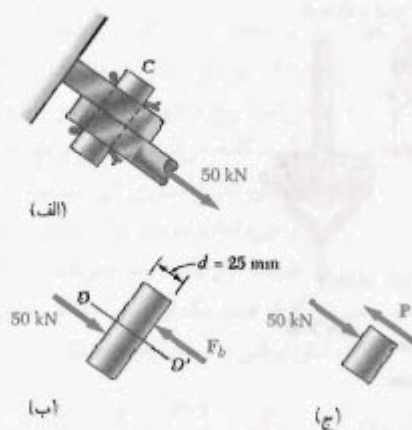
$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

لذا، مقدار متوسط تنش برشی در مفصل C چنین است:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

حال، مفصل A را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۶-۱) و توجه داریم که تحت برش دوگانه است. با ترسیم نمودار آزاد این مفصل و نمودار آزاد قسمتی از آن که بین صفحات EE' و DD' قرار دارد، نتیجه می‌شود که $P = 20 \text{ kN}$ ، یعنی،

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$



شکل ۲۵

به سازه شکل ۱-۱ برمی‌گردیم و تکیه‌گاه‌ها و اتصالات A و B و C را در نظر می‌گیریم. طبق شکل ۲۴-۱، میله BC به قطر 20 mm دارای دو انتهای تخت با مقطع عرضی مستطیلی $20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ است، و بازوی AB دارای مقطع عرضی مستطیلی $30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ است و با یک رکابک در انتهای B اتصال دارد. هر دو عضو توسط یک مفصل در B به هم متصل شده‌اند. در B، بار 30 kN توسط براکت U شکل وارد شده است. بازوی AB توسط پیچی که در یک براکت دوگانه جاذبه شده است در A نگه داشته شده است، و میله BC توسط یک براکت تنها در C متصل شده است. قطر تمام مفصل‌ها 25 mm است.

الف - تعیین تنش قائم در بازوی AB و میله BC. طبق قسمت‌های ۲-۱ و ۴-۱، نیرو در میله BC برابر است با $F_{BC} = 50 \text{ kN}$ و مساحت مقطع عرضی دایره‌ای برابر است با $A = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$. تنش متوسط نامی متناظر عبارت است از $\sigma_{BC} = 159 \text{ MPa}$ و لی، قسمت‌های تخت میله نیز تحت کشش‌اند و در باریک‌ترین قسمت، که سوراخی در آنجا قرار دارد،

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

مقدار متوسط تنش متناظر چنین است:

$$(\sigma_{BC})_{\text{در لبه}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167 \text{ MPa}$$

توجه کنید که این یک مقدار متوسط است؛ همانطور که در قسمت ۲-۱۸ خواهید دید، تنش در نزدیک سوراخ به مقدار خیلی بیشتری می‌رسد. بدیهی است که میله تحت بار افزایشی در نزدیک یکی از سوراخ‌ها گسیخته می‌شود نه در قسمت استوانه‌ای؛ لذا، با افزایش عرض یا ضخامت تخت میله می‌توان طراحی آن را بهبود داد.

حال، به بازوی AB توجه می‌کنیم. از قسمت ۲-۱ به خاطر داریم که نیرو در این بازو، F_{AB} ، برابر با 40 kN و فشاری است. چون مساحت مقطع عرضی مستطیلی بازو عبارت است از $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ، مقدار متوسط تنش قائم در قسمت اصلی میله، بین مفصل‌های A و B، چنین است:

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26.7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26.7 \text{ MPa}$$

توجه کنید که مقاطع با مساحت مییم در A و B تحت تنش نیستند، زیرا بازو تحت فشار است و مفصل‌ها را هل می‌دهد (در حالی که میله BC مفصل‌ها را می‌کشد).

قسمت‌های DE (شکل ۲۷-۱ ب) و DG (شکل ۲۷-۱ ج)، نتیجه می‌شود برش در مقاطع E و G ، به ترتیب، عبارتند از $P_E = 15 \text{ kN}$ و $P_G = 25 \text{ kN}$. چون بارگذاری مفصل به طور متقارن است، ماکزیمم مقدار برش در مفصل B عبارت است از $P_G = 25 \text{ kN}$ و بیشترین تنش‌های برشی در مقاطع H و G روی می‌دهند؛ در این مقاطع،

$$\tau_{ave} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50.9 \text{ MPa}$$

ج- تعیین تنش‌های تکیه‌گاهی: برای تعیین تنش تکیه‌گاهی نسبی در A از عضو AB ، از فرمول (۱۱-۱) استفاده می‌کنیم. از شکل ۲۴-۱، $d = 25 \text{ mm}$ و $t = 30 \text{ mm}$ ، چون $P = F_{AB} = 40 \text{ kN}$

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53.3 \text{ MPa}$$

برای تعیین تنش تکیه‌گاهی در براکت A ، از $d = 25 \text{ mm}$ و $t = 2(25 \text{ mm}) = 50 \text{ mm}$ استفاده می‌کنیم:

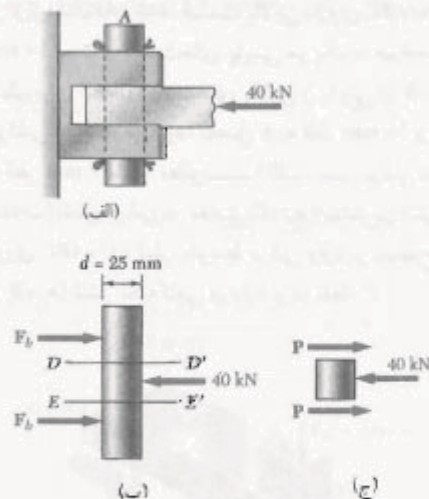
$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32.0 \text{ MPa}$$

به همین طریق، تنش‌های تکیه‌گاهی در B از عضو AB ، در C از عضو BC ، و در براکت C را می‌یابیم.

۹-۱ روش حل مسائل

مسائل مقاومت مصالح را باید به عنوان یک مسئله واقعی مهندسی در نظر گرفت. با تجربه و ابتکار، به سهولت می‌توان مسئله را درک و فرمول‌بندی کرد؛ در این رابطه، بیان مسئله به طور واضح نیز نقش مهمی دارد. مسئله را باید با کاربرد اصول بنیادی استاتیک و مقاومت مصالح حل کرد. پس از تعیین پاسخ مسئله، باید آن را وارسی کرد. در اینجا مجدداً می‌توان از احساس و تجربه بهره گرفت. اگر نتیجه حاصل رضایتبخش نباشد، فرمول‌بندی مسئله، صحت روش‌های مورد استفاده در حل مسئله و دقت محاسبات را باید به دقت وارسی کرد.

بیان مسئله باید واضح، دقیق، و شامل اطلاعات داده شده و اطلاعات مورد نیاز باشد. طرحواره ساده‌ای که تمام کمیت‌های ضروری موجود را نشان دهد نیز باید رسم کرد. برای حل اغلب مسائل، ابتدا باید واکنش در تکیه‌گاهها، لنگرها و نیروهای داخلی را تعیین کرد. برای این منظور، باید یک یا چند نمودار آزاد را رسم کرد (در قسمت ۲-۱)، و با نوشتن معادله‌های تعادل به



شکل ۲۶-۱

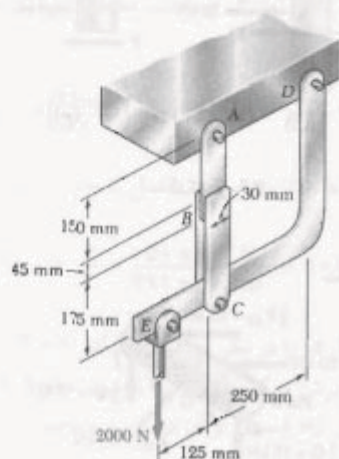


شکل ۲۷-۱

اکنون، مفصل B را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷-۱ الف). این مفصل را می‌توان به پنج قسمت تقسیم کرد، که هر کدام تحت نیروهای وارده از بازو، میله، و براکت قرار دارند. باید در نظر گرفت

مسئله نمونه ۱-۱

در آویز نشان داده شده، قسمت بالایی بازوی ABC به ضخامت 10 mm است و قسمت‌های پایینی هر یک به ضخامت 6 mm است. برای اتصال قسمت‌های بالایی و پایینی در B ، از چسب اپوکسی استفاده می‌شود. مفصل A به قطر 10 mm و مفصل C به قطر 6 mm است. مطلوب است: (الف) تنش برشی در مفصل A ، (ب) تنش برشی در مفصل C ، (ج) بیشترین تنش قائم در بازوی ABC ، (د) تنش متوسط برشی وارد بر سطوح چسبی در B ، (ه) تنش تکیه‌گاهی در بازو و در نقطه C .



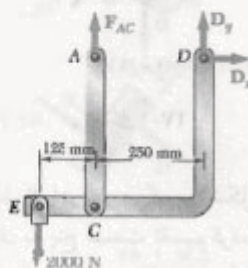
حل

جسم آزاد تمام آویز. چون بازوی ABC یک عضو دینامیکی است، واکنش در A به صورت عمودی است؛ واکنش در D را با مؤلفه‌های D_x و D_y نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0:$$

$$(2000 \text{ N})(375 \text{ mm}) - F_{AC}(250 \text{ mm}) = 0$$

$$F_{AC} = 4000 \text{ N} \quad (\text{کشش})$$



حل نیروهای مجهول پرداخت. سپس، تنش‌ها و تغییرشکل‌های مورد نیاز را محاسبه کرد.

پس از تعیین پاسخ، باید آن را به دقت و اوسی کرد. با رعایت آحاد در محاسبات و واریسی آحاد پاسخ می‌توان به علت اشتباهات پی برد. مثلاً، در طراحی میله‌ای که در قسمت ۱-۴ بررسی شد، پس از کاربرد آحاد در محاسبات، دیدیم که قطر مورد نیاز میله بر حسب میلی‌متر بیان شد که واحد درستی است؛ اگر واحد دیگری به دست می‌آوردیم، در جایی اشتباهی روی داده بود.

با جایگذاری مقادیر عددی حاصل در معادله‌ای که هنوز مورد استفاده قرار نگرفته است، معمولاً خطای محاسبه پیدا می‌شود.

۱-۱۰ دقت عددی

دقت حل مسئله بستگی به دو مورد زیر دارد: (۱) دقت داده‌ها، (۲) دقت محاسبات.

دقت حل نباید بیشتر از دقت دو مورد بالا باشد. مثلاً، اگر بار وارد بر یک تیر 300 kN و خطای ممکن آن 400 N باشد، خطای نسبی که میزان دقت داده‌ها را می‌سنجد چنین است:

$$\frac{400 \text{ N}}{300 \text{ kN}} = 0.0013 = 0.13\%$$

لذا، هنگام محاسبه واکنش در یکی از تکیه‌گاه‌های تیر نمی‌توان آن را به صورت 57288 N بیان کرد. دقت محاسبات هر چه باشد، دقت حل نمی‌تواند بیشتر از 0.13% درصد باشد و خطای ممکن پاسخ می‌تواند به اندازه 74 N (0.13% از 57288 N) باشد. پاسخ صحیح به صورت $57280 \pm 74 \text{ N}$ است.

در مسائل مهندسی، دقت داده‌ها به ندرت بیشتر از 0.2% درصد است. بنابراین، پاسخ این مسائل را به ندرت با دقت بیش از 0.2% درصد می‌نویسند. به عنوان یک قاعده عملی، برای ثبت اعدادی که با 10^4 شروع می‌شوند از 4 رقم، و برای سایر اعداد از 3 رقم استفاده می‌شود. در یک مسئله، دقت داده‌ها باید با هم قابل مقایسه باشند مگر اینکه خلاف آن ذکر شده باشد. مثلاً، نیروی 160 N به صورت 1600 N و نیروی 60 N به صورت 6000 N نوشته می‌شود.

مهندسان و دانشجویان از ماشین حساب و کامپیوتر خیلی استفاده می‌کنند. سرعت و دقت این وسایل باعث سهولت محاسبات عددی در حل اغلب مسائل می‌شود. ولی، دانشجویان نباید تعداد ارقام با معنی را که ثبت می‌کنند بیشتر از تعداد مورد نیاز باشد. همانطور که در بالا گفته شد، دقت بیش از 0.2% درصد در حل مسائل مهندسی به ندرت مورد نیاز است.

الف. تنش برشی در مفصل A چون این مفصل تحت برش تنهاست،
تنش برشی در مفصل C چون این مفصل تحت برش دوگانه است،

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3000 \text{ N}}{\frac{1}{4}\pi (10 \text{ mm})^2} \quad \tau_A = 387 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

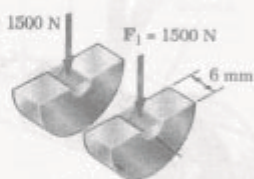
$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{1500 \text{ N}}{\frac{1}{4}\pi (6 \text{ mm})^2} \quad \tau_C = 531 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

ج. بیشترین تنش قائم در بازوی ABC بیشترین تنش در کمترین مساحت به وجود می آید؛ مساحت مینیمم نیز در مقطع A است، یعنی جایی که سوراخ 10 mm قرار دارد. می نویسیم:

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{net}}} = \frac{3000 \text{ N}}{(10 \text{ mm})(30 \text{ mm} - 10 \text{ mm})} = \frac{3000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} \quad \sigma_A = 15 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

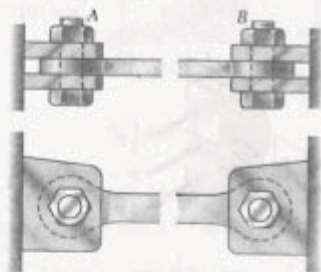
د. تنش متوسط برشی در B توجه کنید که هر دو طرف قسمت بالایی بازو چسب خورده است و نیروی برشی وارد به هر طرف برابر است با $F_1 = (3000 \text{ N}) / 2 = 1500 \text{ N}$ تنش متوسط برشی وارد بر هر سطح چنین است:

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1500 \text{ N}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} \quad \tau_B = 11 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$



مسئله نمونه ۱-۲

یک میله مهار فولادی برای تحمل نیروی کششی $P = 120 \text{ kN}$ طراحی شده است. این میله بین براکت های دوتایی A و B پیچ شده است. میله از یک ورق به ضخامت 20 mm ساخته شده است. ماکزیمم تنش های مجاز برای فولاد به کار رفته عبارتند از: $\sigma_b = 250 \text{ MPa}$ ، $\tau = 100 \text{ MPa}$ ، $\sigma_c = 175 \text{ MPa}$ (الف) قطر d پیچ و مهره، (ب) اندازه b در هر انتهای میله، (ج) اندازه h میله.



حل

الف. قطر پیچ و مهره. چون پیچ و مهره تحت برش دوگانه است، $F_1 = \frac{1}{2}P = 60 \text{ kN}$ ،

$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \Rightarrow 100 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \Rightarrow d = 27.6 \text{ mm}$$

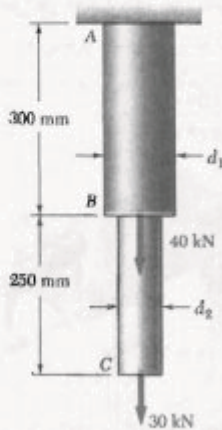
از $d = 28 \text{ mm}$ استفاده می کنیم.

حال، تنش تکیه گاهی بین ورق به ضخامت 20 mm و پیچ و مهره به قطر 28 mm را واری می کنیم:

$$\tau_b = \frac{P}{td} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.7 \times 20 \text{ m})(0.7 \times 28 \text{ m})} = 111 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad (\text{درست است})$$

مسائل

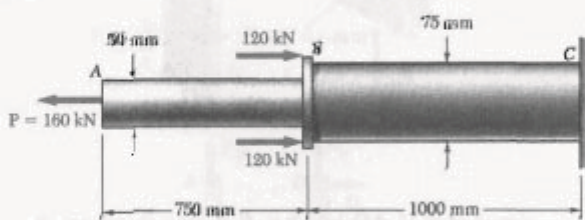
۱-۱ دو میله توپر استوانه‌ای AB و BC در B بهم جوش شده‌اند. $d_1 = 50 \text{ mm}$ و $d_2 = 30 \text{ mm}$. تنش قائم متوسط در وسط میله‌های AB و BC را بیابید.



شکل م ۱-۱ و م ۲-۱

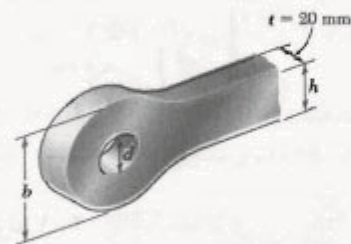
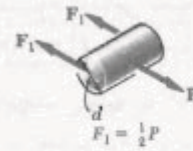
۲-۱ دو میله توپر استوانه‌ای AB و BC در B بهم جوش شده‌اند. تنش قائم متوسط در هر یک از دو میله نباید از 140 MPa بیشتر شود. کمترین مقدار مجاز قطرهای d_1 و d_2 را بیابید.

۳-۱ دو میله توپر استوانه‌ای AB و BC در B بهم جوش شده‌اند. برای بارگذاری نشان داده شده، تنش قائم را در وسط میله‌های AB و BC بیابید.



شکل م ۳-۱

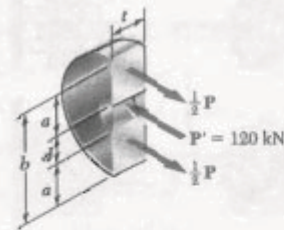
۴-۱ در مسئله ۳-۱، مطلوبست مقدار P به طوری که مقدار تنش کششی در میله AB با مقدار تنش فشاری در میله BC برابر باشد.



ب. اندازه b ، یکی از قسمت‌های انتهایی میله را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه ضخامت ورق 20 mm است و تنش متوسط کششی نباید از 175 MPa بیشتر شود، می‌نویسیم

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{P}{ta} \Rightarrow 175 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})a} \Rightarrow a = 17.14 \text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28 \text{ mm} + 2(17.14 \text{ mm}) \Rightarrow b = 62.3 \text{ mm}$$

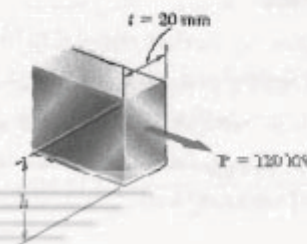


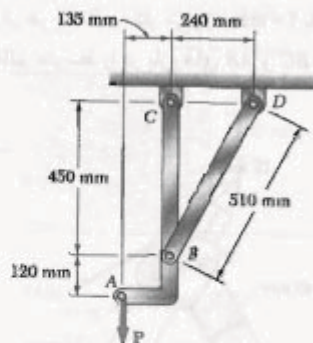
ج. اندازه h ، با توجه به اینکه ضخامت ورق 20 mm است،

$$\sigma = \frac{P}{th} \Rightarrow 175 \text{ MPa} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})h}$$

$$\Rightarrow h = 34.3 \text{ mm}$$

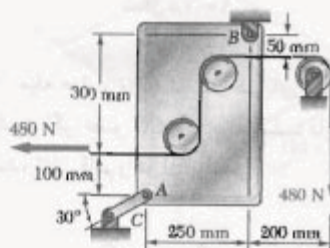
از $h = 35 \text{ mm}$ استفاده می‌کنیم.





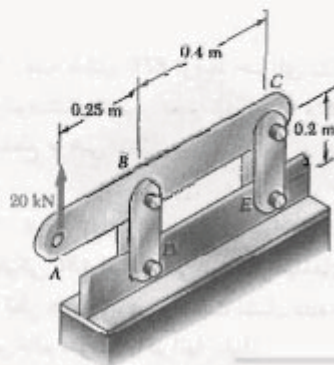
شکل م-۷

۸-۱ رابط AC دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی به ضخامت 3 mm و به عرض 25 mm است. تنش قائم را در قسمت مرکزی این رابط بیابید.



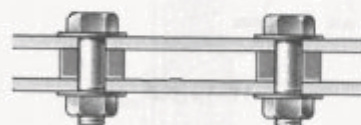
شکل م-۸

۹-۱ هر یک از چهار میله عمودی دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی $8\text{ mm} \times 36\text{ mm}$ است و قطر هر یک از مفصل ها 16 mm است. مطلوبیت ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط: (الف) در رابط BD ، (ب) در رابط CE .



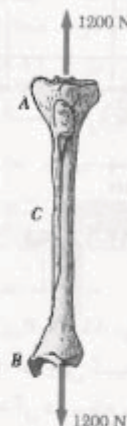
شکل م-۹

۵-۱ دو ورق فولادی توسط پیچ و مهره های فولادی پراستحکام به قطر 16 mm به هم متصل شده اند. این پیچ و مهره ها در داخل فاصله اندازهای برنجی استوانه ای به طور محکم جاذبه شده اند. با توجه به اینکه تنش قائم متوسط در پیچ و مهره ها نباید از 200 MPa و در فاصله اندازها نباید از 130 MPa بیشتر شود، قطر خارجی فاصله اندازها را برای اقتصادی ترین و مطمئن ترین طرح بیابید.



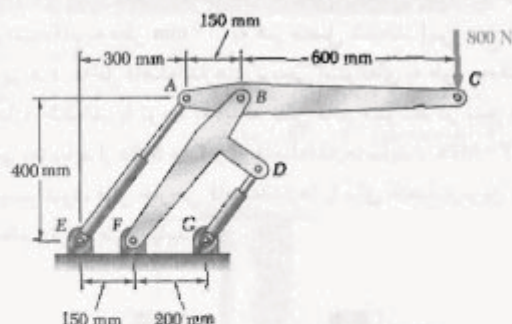
شکل م-۵

۶-۱ کرنش سنجی که در نقطه C روی سطح استخوان AB قرار دارد نشان می دهد که وقتی استخوان تحت تأثیر دو نیروی 1200 N قرار می گیرد، تنش قائم متوسط در آن 3.80 MPa است. با فرض اینکه مقطع عرضی استخوان در C به صورت حلقه ای است و قطر خارجی آن 25 mm است، قطر داخلی مقطع عرضی استخوان را در C بیابید.



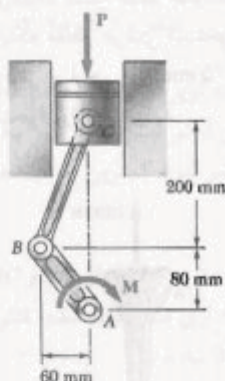
شکل م-۶

۷-۱ اگر قسمت مرکزی میله BD دارای مقطع عرضی یکنواخت 800 mm^2 باشد، مطلوبیت مقدار P به طوری که تنش قائم در قسمت BD برابر با 50 MPa باشد.



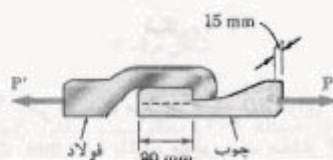
شکل م ۱۳-۱

۱۴-۱ کوپل M با مقدار 1500 N.m بر یک لنگ وارد شده است. برای وضعیت نشان داده شده، مطلوبست: (الف) نیروی P مورد نیاز برای اینکه مجموعه در تعادل باشد، (ب) تنش قائم متوسط در شاتون BC ، با مساحت مقطع عرضی یکنواخت 250 mm^2 .



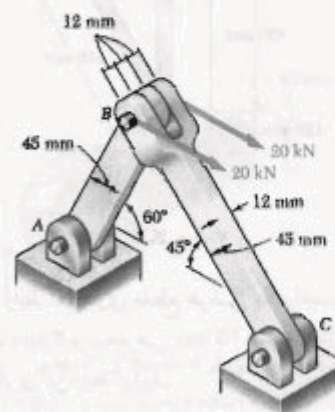
شکل م ۱۴-۱

۱۵-۱ وقتی نیروی P به 8 kN می‌رسد، نمونه چوبی بر اثر نیروی برشی در امتداد خط چین گسیخته می‌شود. تنش برشی متوسط را هنگام گسیختگی در سطح برش بیابید.



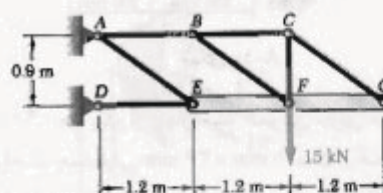
شکل م ۱۵-۱

۱۰-۱ دو نیروی افقی 20 kN بر مفصل B اثر می‌کنند. اگر قطر پینی که در هر اتصال به کار می‌رود 20 mm باشد، ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط را در بازوهای AB و BC بیابید.



شکل م ۱۰-۱

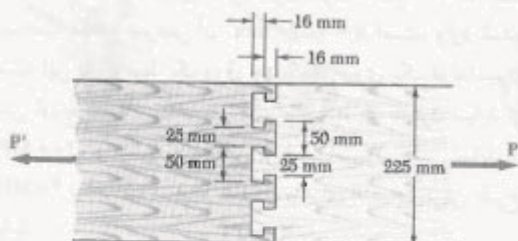
۱۱-۱ میله صلب EFG توسط خرابای نشان داده شده تحمل می‌شود. اگر عضو CG یک میله صلب دایره‌ای به قطر 18 mm باشد، تنش قائم را در آن بیابید.



شکل م ۱۱-۱ و ۱۲-۱

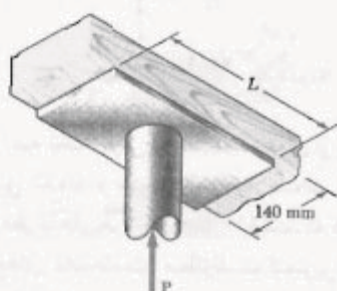
۱۲-۱ میله صلب EFG توسط خرابای نشان داده شده تحمل می‌شود. تنش قائم در عضو AE برابر با 105 MPa است. مساحت مقطع عرضی آن را بیابید.

۱۳-۱ از دو سیلندر هیدرولیکی برای کنترل وضعیت بازوی مکانیکی ABC استفاده می‌شود. اگر میله‌های AE و DG ، هر یک به قطر 20 mm ، در وضعیت نشان داده شده موازی باشند، تنش قائم متوسط را در آنها بیابید.



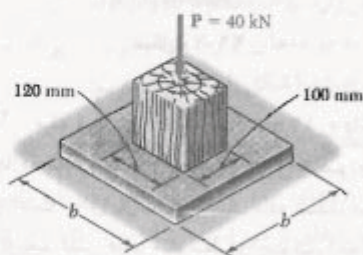
شکل م ۱۸-۱

۱۹-۱ نیروی محوری P وارد بر ستون ۱۷۵ kN است. تنش تکیه‌گاهی در پایه چوبی نگهدار ستون نباید از ۳۰ MPa بیشتر شود. کمترین طول مجاز L پایه چوبی را بیابید.



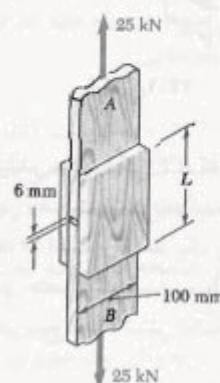
شکل م ۱۹-۱

۲۰-۱ بار محوری ۴۰ kN بر یک تیر چوبی کوتاه وارد شده است. این تیر روی پایه بتنی قرار دارد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش تکیه‌گاهی وارد بر پایه بتنی، (ب) اندازه پایه، به طوری که تنش متوسط تکیه‌گاهی در خاک ۱۲۵ kPa شود.



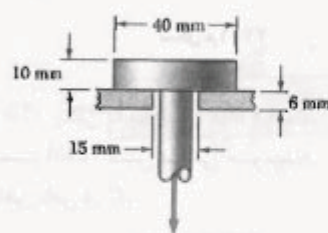
شکل م ۲۰-۱

۱۶-۱ عضوهای چوبی A و B ، که توسط تخته‌های چند لایه به هم متصل شده‌اند، در تمام سطوح تماس چسب خورده‌اند. فاصله آزاد دو انتهای اعضا ۸ mm است. کمترین طول مجاز L را بیابید در صورتیکه بدانیم تنش متوسط برشی نباید از ۸۴۰ kPa بیشتر شود.



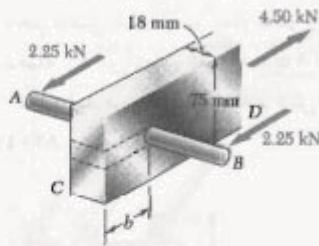
شکل م ۱۶-۱

۱۷-۱ بار P بر میله فولادی نشان داده شده وارد می‌شود. این میله در داخل سوراخی به قطر ۱۵ mm که در یک ورق آلومینیومی تعبیه شده است، قرار دارد. تنش برشی در میله فولادی نباید از ۱۲۶ MPa و در صفحه آلومینیومی نباید از ۷۰ MPa بیشتر شود. بیشترین بار P را که می‌توان بر میله وارد کرد بیابید.



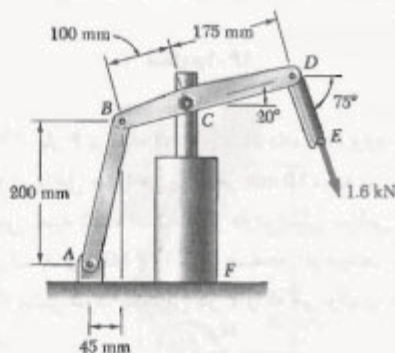
شکل م ۱۷-۱

۱۸-۱ دو تخته چوبی، هر یک به ضخامت ۱۲ mm و به عرض ۲۲۵ mm ، با چسب به هم متصل شده‌اند. اگر تنش متوسط برشی برای خراب کردن چسب ۸ MPa باشد، مقدار بار محوری P را که باعث خرابی چسب می‌شود بیابید.



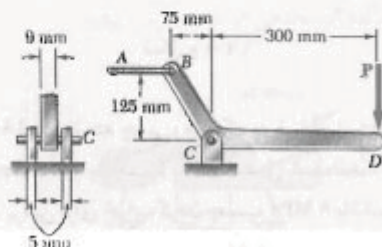
شکل ۲۳-۱

۲۳-۱ سیلندر هیدرولیکی CF ، که وضعیت میله DE را کنترل می‌کند، در وضعیت نشان داده شده قفل است. عضو BD به ضخامت 16 mm است و توسط یک پیچ به قطر 10 mm به یک میله عمودی متصل شده است. مطلوب است: (الف) تنش برشی متوسط در پیچ، (ب) تنش تکیه‌گاهی در نقطه C از عضو BD .



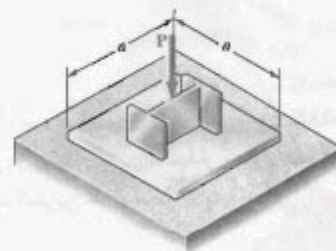
شکل ۲۴-۱

۲۵-۱ پین C به قطر 6 mm است. اگر $P = 500 \text{ N}$ ، مطلوب است: (الف) تنش برشی متوسط در پین، (ب) تنش تکیه‌گاهی تأمی در C .



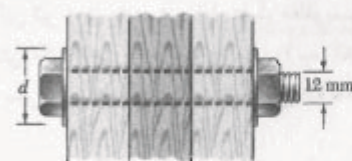
شکل ۲۵-۱ و ۲۶-۱

۲۱-۱ بار محوری P بر ستون کوتاه $200 \times 59 \text{ W}$ ، که مساحت مقطع عرضی آن $A = 7560 \text{ mm}^2$ است، وارد شده است. این بار توسط یک ورق چهارگوش روی یک فونداسیون بتنی توزیع شده است. تنش قائم متوسط در ستون نباید از 20 MPa و تنش تکیه‌گاهی بر فونداسیون بتنی نباید از 20 MPa بیشتر شود. ضلع a ورق را برای اقتصادی‌ترین طرح بیایید.



شکل ۲۱-۱

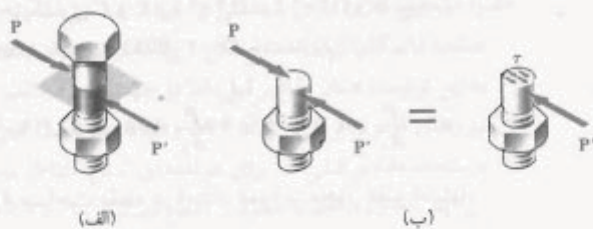
۲۲-۱ سه تخته چوبی توسط مجموعه‌ای از پیچ و مهره‌ها به هم متصل شده‌اند و ستونی را تشکیل داده‌اند. قطر هر پیچ 12 mm و قطر داخلی هر واشر 16 mm است، که کمی بزرگتر از قطر سوراخ‌های تخته‌هاست. مطلوب است کمترین قطر مجاز خارجی d واشرها، در صورتی که بدانیم تنش قائم متوسط در پیچ و مهره‌ها 35 MPa است و تنش تکیه‌گاهی بین واشرها و تخته‌ها نباید از 8 MPa بیشتر شود.



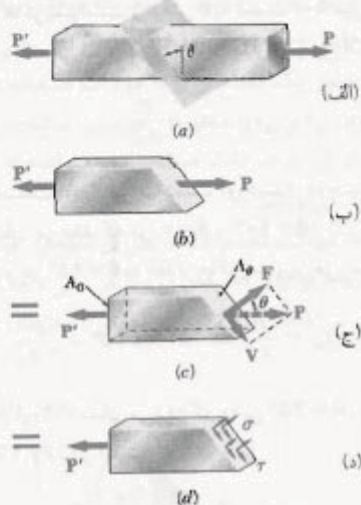
شکل ۲۲-۱

۲۳-۱ میله فولادی AB به قطر 12 mm ، داخل سوراخ دایره‌ای جازده شده است. این سوراخ داخل عضو چوبی CD تعبیه شده است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش قائم متوسط در چوب، (ب) فاصله b به طوری که تنش برشی متوسط در سطح خط چین 620 kPa باشد، (ج) تنش تکیه‌گاهی متوسط در چوب.

REB



شکل ۲۹-۱



شکل ۳۰-۱

عضو دوتیرویی شکل ۲۸-۱ را که تحت تأثیر نیروهای محوری P و P' قرار دارد در نظر بگیرید. اگر این عضو را تحت زاویه θ با عمود مقطع بزنیم (شکل ۳۰-۱ الف) و نمودار آزاد قسمتی از عضو را که در سمت چپ آن مقطع است رسم کنیم (شکل ۳۰-۱ ب)، از شرایط تعادل جسم آزاد دیده می‌شود که نیروهای توزیعی وارد بر آن مقطع با نیروی P معادل‌اند. با تجزیه P به مولفه‌های F و V که، به ترتیب، بر آن مقطع عمود و مماس هستند (شکل ۳۰-۱ ج)، داریم:

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad (۱۲-۱)$$

نیروی F برآیند نیروهای عمودی توزیع شده روی آن مقطع، و نیروی V برآیند نیروهای برشی است (شکل ۳۰-۱ د). از تقسیم F و V بر مساحت A_θ آن مقطع، به ترتیب، مقدار متوسط تنش قائم و تنش برشی به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta} \quad (۱۳-۱)$$

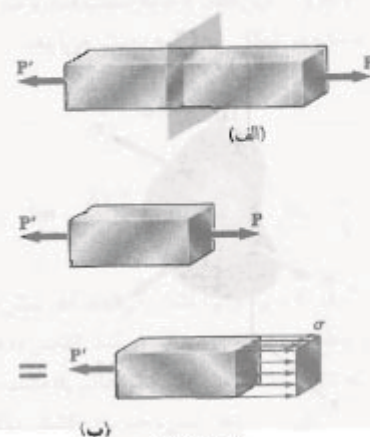
۲۶-۱ اگر $P = ۷۵۰ \text{ N}$ ، مطلوبست: (الف) قطر پین C به طوری که تنش برشی متوسط در آن ۴۰ MPa نباشد، (ب) تنش تکیه‌گاهی متناظر در C .

۲۷-۱ در مسئله ۹-۱، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در مفصل B ، (ب) تنش تکیه‌گاهی متوسط در B از بازوی BD ، (ج) تنش تکیه‌گاهی متوسط در B از عضو ABC ، در صورتی که بدانیم این عضو دارای مقطع عرضی مستطیلی بکنواخت $۱۰ \text{ mm} \times ۵۰ \text{ mm}$ است.

۲۸-۱ در مسئله ۱۰-۱، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در مفصل C ، (ب) تنش تکیه‌گاهی متوسط در C از عضو BC ، (ج) تنش تکیه‌گاهی متوسط در B از عضو BC .

۱۱-۱ تنش وارد بر صفحه مایلی که تحت بارگذاری محوری است

در قسمت‌های قبل دیدیم که وقتی یک عضو دو نیرویی تحت نیروی محوری قرار می‌گیرد (شکل ۲۸-۱ الف)، فقط تنش قائم در آن به وجود می‌آید (شکل ۲۸-۱ ب). همچنین، دیدیم که نیروهای عرضی وارد بر پیچ و مهره‌ها و مفصل‌ها (شکل ۲۹-۱ الف) فقط تنش برشی در آن اتصالات ایجاد می‌کنند (شکل ۲۹-۱ ب). در این فصل خواهیم دید که نیروهای محوری در صفحاتی که بر محور عضو عمود نباشند تنش‌های قائم و برشی را با هم به وجود می‌آورند. به طور مشابه، نیروهای عرضی وارد بر یک پیچ و مهره نیز در صفحاتی که بر محور پیچ و مهره عمود نباشند تنش‌های قائم و برشی را با هم ایجاد می‌کنند.



شکل ۲۸-۱

با جایگذاری F و V از (۱۲-۱) در (۱۳-۱) و با توجه به اینکه $A_0 = A_0 / \cos \theta$ (شکل ۳۰-۱ ج)، داریم:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \quad (۱۴-۱)$$

(A_0 مساحت مقطع در امتداد عمود بر محور عضو است).

از اولین معادله (۱۴-۱) دیده می‌شود که در $\theta = 0$ ، یعنی وقتی صفحه مقطع بر محور عضو عمود است، تنش قائم σ دارای مقدار ماکزیمم است و وقتی θ به سمت 90° میل می‌کند، σ به صفر نزدیک می‌شود. در $\theta = 0$ ، مقدار σ چنین است:

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad (۱۵-۱)$$

(این را در قسمت ۳-۱ نیز به‌دست آوردیم). دومین معادله (۱۴-۱) نشان می‌دهد که در $\theta = 0$ و $\theta = 90^\circ$ ، تنش برشی τ صفر است، و در $\theta = 45^\circ$ به مقدار ماکزیمم زیر می‌رسد:

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (۱۶-۱)$$

معادله اول (۱۴-۱) نشان می‌دهد که وقتی $\theta = 45^\circ$ ، تنش قائم σ' نیز با $P/2A_0$ برابر است:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (۱۷-۱)$$



(الف) بارگذاری محوری



(ب) تنش‌های برای



(ج) تنش‌های برای



(د) تنش‌ها برای

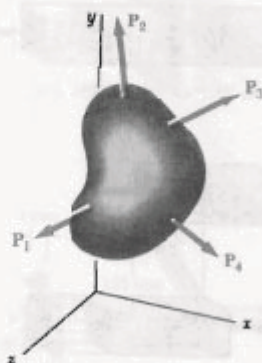
شکل ۳۱-۱

نتایج حاصل در معادله‌های (۱۵-۱)، (۱۶-۱) و (۱۷-۱) در شکل ۳۱-۱ نشان داده شده‌اند. گفتنی است که، برحسب وضعیت مقطع تحت بارگذاری، ممکن است فقط تنش قائم $\sigma_m = P/A_0$ (شکل ۳۱-۱ ب)، یا یک تنش قائم و یک تنش برشی با مقدار یکسان $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$ (شکل ۳۱-۱ ج و د) در آن مقطع به‌وجود آید.

۱۲-۱ تنش تحت شرایط کلی بارگذاری؛ مولفه‌های تنش تا به حال، عضوها تحت بارگذاری محوری و اتصالات تحت بارگذاری عرضی قرار داشتند. ولی، اغلب عضوهای ساختمانی و اجزای ماشین آلات تحت شرایط بارگذاری پیچیده‌تری هستند.

جسمی را در نظر بگیرید که تحت چند بار P_1 و P_2 و ... قرار دارد (شکل ۳۲-۱). برای بررسی تنش حاصل از این بارها در نقطه Q از جسم، ابتدا این جسم را توسط صفحه‌ای به موازات صفحه Q در نقطه Q مقطع می‌زنیم. قسمتی از جسم در سمت چپ این مقطع تحت تأثیر چند بار اولیه، و نیروهای قائم و برشی توزیعی قرار دارد.

نیروهای قائم و برشی را که در مساحت کوچک ΔA پیرامون نقطه Q اثر می‌کنند، به‌ترتیب، با ΔF^x و ΔV^x نشان می‌دهیم (شکل ۳۳-۱ الف). توجه کنید که برای نشان دادن نیروهای ΔF^x و ΔV^x ، که بر یک سطح عمود بر محور x اثر می‌کنند، از اندیس x استفاده می‌شود. در حالی که نیروی قائم ΔF^x دارای جهت کاملاً مشخصی است، نیروی برشی ΔV^x می‌تواند هر جهتی را در صفحه مقطع دارا باشد. بنابراین، ΔV^x را به دو مولفه ΔV_y^x و ΔV_z^x در جهت‌های موازی با محورهای y و z



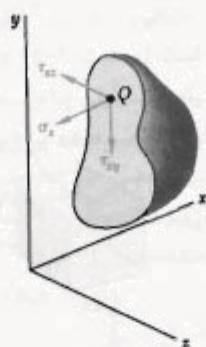
شکل ۳۲-۱

REB

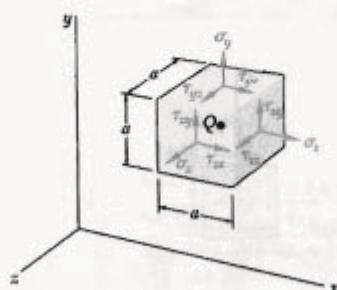
تحلیل بالا را برای قسمتی از جسم که در سمت راست صفحه قائم گذرا از Q است (شکل ۳۵-۱) نیز می‌توان به کار برد. به این ترتیب، همان مقادیر قبل، اما در جهت‌های مخالف، برای نیروهای قائم و برشی ΔF^x و ΔV_y^x به دست می‌آیند. در نتیجه، مقادیر قبلی نیز برای مولفه‌های تنش متناظر به دست می‌آیند. اما چون جهت عمود بر مقطع در شکل ۳۵-۱ به طرف خارج در جهت x است، علامت مثبت برای σ_x نشان می‌دهد که پیکان آن در جهت x است. به طور مشابه، علامت‌های مثبت برای τ_{xy} و τ_{xz} نشان می‌دهد که پیکان آنها، به ترتیب، در جهت‌های y و z است (شکل ۳۵-۱).

با عبور یک مقطع از Q به موازات صفحه zx ، مولفه‌های تنش σ_y ، τ_{yz} و τ_{yx} را مشخص می‌کنیم. سرانجام، با عبور یک مقطع از Q به موازات صفحه xy ، مولفه‌های σ_z ، τ_{zx} و τ_{xz} را به دست می‌آوریم.

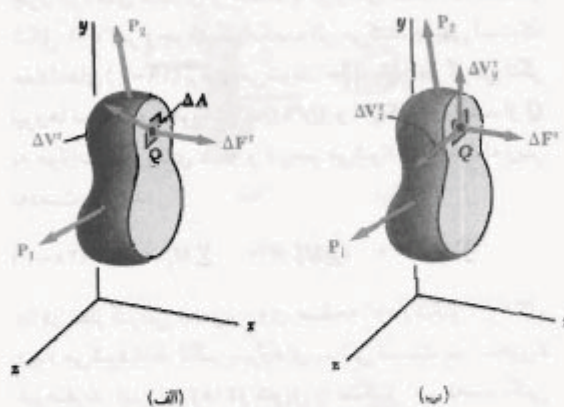
برای سهولت تجسم حالت تنش در نقطه Q ، مکعب کوچکی به ضلع a با مرکز Q و تنش‌های وارد بر هر شش وجه مکعب را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶-۱). مولفه‌های نشان داده شده در شکل



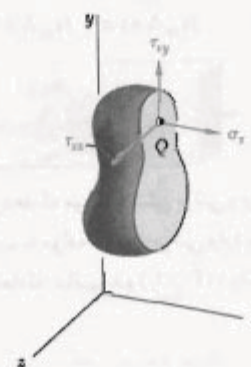
شکل ۳۵-۱



شکل ۳۶-۱



شکل ۳۳-۱



شکل ۳۴-۱

تجزیه می‌کنیم (شکل ۳۳-۱ ب). از تقسیم مقدار هر نیرو بر مساحت ΔA و با میل دادن ΔA به سمت صفر، سه مولفه تنش نشان داده شده در شکل ۳۴-۱ به دست می‌آیند:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad (۱۸-۱)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

اندیس اول در σ_x ، τ_{xy} و τ_{xz} نشان می‌دهد که تنش‌های تحت بررسی بر سطح عمود بر محور x اثر می‌کند. اندیس دوم در τ_{yz} و τ_{xy} جهت مولفه تنش را نشان می‌دهد. تنش قائم σ_x مثبت است هرگاه پیکان آن در سوی x باشد؛ یعنی، جسم در کشش باشد. در غیر اینصورت، منفی است. به طور مشابه، مولفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{xz} مثبت‌اند هرگاه پیکان آنها، به ترتیب، در سوی y و z باشد.

چون نیروهای مساوی و متضاد با نیروهای نشان داده شده در شکل ۳۷-۱ بر وجوه دیگر مکعب اثر می‌کنند، بدیهی است که معادله‌های (۱۹-۱) برقرار می‌شوند. حال، با در نظر گرفتن لنگر نیروها نسبت به محورهای x ، y و z رسم می‌شوند، سه معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (۲۰-۱)$$

با در نظر گرفتن تصویر روی صفحه $x'y'$ (شکل ۳۸-۱)، دیده می‌شود فقط لنگر نیروهای برشی نسبت به محور z غیر صفرند. این نیروها دو کویل را تشکیل می‌دهند، یکی لنگر مثبت پادساعتگرد $a(\tau_{xy}\Delta A)$ و دیگری لنگر منفی ساعتگرد $a(\tau_{yx}\Delta A)$. لذا، از آخرین معادله (۲۰-۱)،

$$\sum M_z = 0 : (\tau_{xy}\Delta A)a - (\tau_{yx}\Delta A)a = 0$$

در نتیجه،

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (۲۱-۱)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که مولفه y تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور x برابر است با مولفه x تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور y . از دو معادله باقیمانده (۲۰-۱)، رابطه‌های زیر را می‌یابیم:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (۲۲-۱)$$

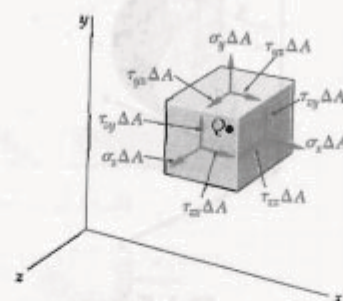
از معادله‌های (۲۱-۱) و (۲۲-۱) نتیجه می‌شود که برای تعریف حالت تنش در نقطه داده شده Q ، به جای نه مولفه تنش، فقط شش مولفه تنش مورد نیازند. این شش مولفه عبارتند از σ_x ، σ_y ، σ_z ، τ_{xy} ، τ_{yz} و τ_{zx} . ضمناً، در یک نقطه داده شده، برش نمی‌تواند فقط در یک صفحه روی دهد؛ بلکه، یک تنش برشی مساوی با آن بر صفحه دیگری که بر صفحه اول عمود است وارد می‌شود. مثلاً، پیچ و مهره شکل ۲۹-۱ و مکعب کوچکی را در مرکز Q پیچ و مهره در نظر می‌گیریم (شکل ۳۹-۱ الف). دیده می‌شود تنش‌های برشی با مقدار مساوی بر دو وجه افقی مکعب و بر دو وجهی که بر نیروهای P و P' عمودند وارد می‌شوند (شکل ۳۹-۱ ب).

قبل از خاتمه این بحث، مجدداً عضوی را که تحت بارگذاری محوری است در نظر می‌گیریم و مکعب کوچکی را که وجوه آن

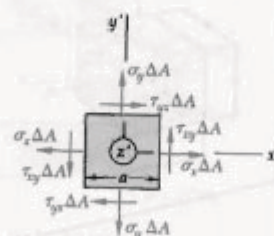
عبارتند از σ_x ، σ_y و σ_z (تنش‌های قائم وارد بر وجوه عمود بر محورهای x ، y و z) و شش مولفه تنش برشی τ_{xy} ، τ_{yz} و غیره، طبق تعریف، τ_{xy} مولفه y تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور x است، و τ_{yx} مولفه x تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور y را نشان می‌دهد. توجه کنید که در شکل ۳۶-۱ فقط تنش‌های وارد بر سه وجه مکعب نشان داده شده‌اند. بر وجوه دیگر نیز تنش‌های مساوی و مخالف با تنش‌های نشان داده شده اثر می‌کنند. گرچه تنش‌های وارد بر وجوه مکعب با تنش‌های موجود در Q کمی تفاوت دارند، ولی خطای موجود کم است و وقتی ضلع a مکعب به سمت صفر میل می‌کند، این خطا از بین می‌رود.

حال، رابطه‌های مهم بین مولفه‌های تنش برشی را به دست می‌آوریم. نمودار آزاد مکعب کوچکی را با مرکز Q در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷-۱). با ضرب کردن مولفه‌های تنش منظر در مساحت ΔA هر وجه، نیروهای قائم و برشی وارد بر وجوه مختلف مکعب را می‌یابیم. ابتدا، سه معادله تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (۱۹-۱)$$



شکل ۳۷-۱



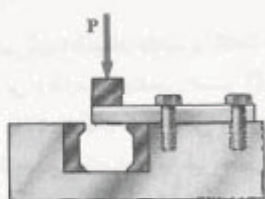
شکل ۳۸-۱

برای طراحی سازه‌ها و ماشین‌آلاتی که عمل خاصی را به‌طور مطمئن و اقتصادی انجام می‌دهند استفاده کنند.

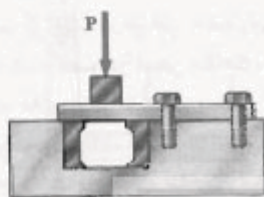
الف- تعیین استقامت نهایی یک ماده. نکته مهمی که طراح باید در نظر گیرد این است که ماده انتخاب شده تحت یک نیرو چه رفتاری دارد. این کار، با آزمایش روی نمونه‌هایی از آن ماده انجام می‌شود. مثلاً، نمونه فولادی را می‌توان در ماشین آزمایشگاهی تحت نیروی کششی محوری مرکزی معلومی قرار داد (قسمت ۲-۳). با افزایش مقدار نیرو، تغییرات حاصل در نمونه، مانند تغییر طول و قطر، اندازه‌گیری می‌شود. وقتی نیروی وارد از حد تحمل نمونه بیشتر می‌شود، نمونه گسیخته می‌شود یا تحمل بار کمتری را شروع می‌کند. این بزرگترین نیرو را بار نهایی نمونه می‌گویند و با P_U نشان داده می‌شود. چون بار وارده از مرکز می‌گذرد، از تقسیم بار نهایی بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه، تنش قائم نهایی، یا استقامت نهایی کششی ماده، به‌دست می‌آید:

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \quad (۲۳-۱)$$

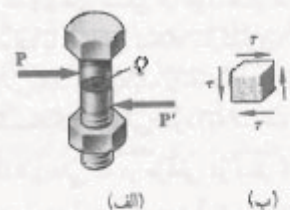
برای تعیین تنش برشی نهایی، یا استقامت نهایی برشی یک ماده، روش‌های آزمایشی مختلفی وجود دارد. یکی از رایج‌ترین آنها، پیچش لوله دایره‌ای است (قسمت ۳-۵). در روشی که دقت کمتری دارد، یک میله مستطیلی یا دایره‌ای را مطابق (شکل ۱-۴۱) در وسیله‌ای قرار می‌دهند. با افزایش بار P ، بار نهایی P_U برای برش تنها به‌دست می‌آید. اگر انتهای آزاد نمونه روی هر دو طرف قالب‌های آب‌بده‌ای قرار گیرد



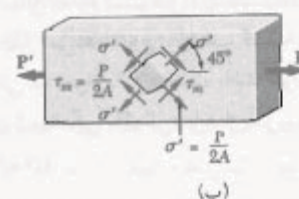
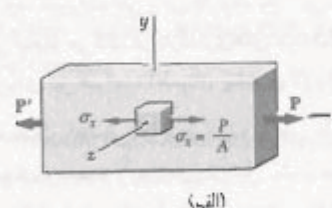
شکل ۴۱-۱



شکل ۴۲-۱



شکل ۳۹-۱



شکل ۴۰-۱

به موازات وجوه این عضو هستند انتخاب می‌کنیم. با توجه به نتایج قسمت ۱-۱۱، فقط تنش‌های قائم σ_x بر وجوهی از مکعب که بر محور x عمودند وارد می‌شوند (شکل ۱-۴۰الف). ولی، اگر مکعب حول محور z به اندازه 45° بچرخد به طوری که بر مقاطع شکل‌های ۱-۳۱ج و ۱-۳۱د منطبق شود، تنش‌های قائم و برشی با مقدار مساوی بر چهار وجه آن وارد می‌شوند (شکل ۱-۴۰ب). لذا، برحسب وضعیت جزء تحت بارگذاری، حالت‌های مختلف تنش در آن به‌وجود می‌آید. در فصل ۷، در این باره بیشتر بحث می‌شود.

۱۳-۱ نکات طراحی

در قسمت‌های قبل، نحوه تعیین تنش در میله‌ها، پیچ و مهره‌ها، و مفصل‌ها را تحت شرایط بارگذاری ساده آموختید. در فصل‌های بعد، تنش‌ها را در حالت‌های پیچیده‌تر تعیین می‌کنیم. ولی، در کاربردهای مهندسی، به ندرت پیش می‌آید که تعیین تنش تنها هدف باشد. بلکه، مهندسان می‌خواهند از این موضوع



۲. تعداد بارگذاری‌های ممکن در طول عمر سازه یا ماشین. در اغلب مواد، با افزایش تعداد بارگذاری، استقامت نهایی کاهش می‌یابد. این پدیده را خستگی می‌گویند و می‌تواند باعث گسیختگی ناگهانی شود (به قسمت ۲-۷ نگاه کنید).

۳. نوع بارگذاری‌هایی که در طراحی در نظر گرفته می‌شوند، یا ممکن است در آینده به وجود آیند. تعداد بسیار اندکی از بارگذاری‌ها را می‌توان با دقت کامل پیش‌بینی کرد - اغلب بارگذاری‌های طراحی دارای تخمین‌های صنعتی‌اند. به علاوه، تغییرات آتی برای کاربرد، تغییراتی را در بارگذاری واقعی ایجاد می‌کند. در بارگذاری‌های دینامیکی، چرخش‌های یا ضربه‌ای نیز ضرایب اطمینان بیشتری لازم است.

۴. نوع گسیختگی احتمالی. مواد شکننده به طور ناگهانی گسیخته می‌شوند، و معمولاً علامتی از قبل نشان نمی‌دهند. ولی، مواد چکش‌خوار مانند فولاد ساختمانی، با نشان دادن یک تغییر شکل به نام تسلیم قبل از شکست، درباره وجود اضافه بار اخطار می‌دهند. ولی، اغلب گسیختگی‌های کم‌انرژی ناگهانی‌اند، خواه ماده شکننده باشد خواه نباشد. در صورت امکان گسیختگی ناگهانی، باید از ضریب اطمینان بزرگتری استفاده کرد.

۵. خطای ناشی از روش‌های تحلیل. در تمام روش‌های طراحی، از فرض‌های ساده‌کننده استفاده می‌شود. لذا، تنش‌های واقعی با مقدار تقریبی محاسبه می‌شوند.

۶. خرابی ایجاد شده در آینده بر اثر تعمیر و نگهداری ضعیف یا بر اثر عوامل طبیعی غیر قابل اجتناب. در نقاطی که کنترل شرایطی چون خوردگی و افت کیفیت کار مشکلی است، از ضریب اطمینان بزرگتر باید استفاده کرد.

۷. اهمیت یک عضو برای یکپارچگی کل سازه. عضوهای مهارکننده را در بسیاری از موارد می‌توان با ضریب اطمینان کمتر از ضرایب اطمینان عضوهای اصلی طراحی کرد.

علاوه بر نکات بالا، خطر جانی و مالی را که گسیختگی در پی دارد باید در نظر گرفت. وقتی گسیختگی خطر جانی ندارد و فقط اندکی خطر مالی دارد، می‌توان از ضریب اطمینان کمتری استفاده کرد. گفتنی است که با استفاده از ضریب اطمینان بیش از اندازه، ماشین ممکن است در شرایط طراحی کار نکند. مثلاً، ضرایب اطمینان بزرگ تأثیر نامطلوبی بر وزن یک هواپیما دارد.

(شکل ۱-۴۲)، بار نهایی برای، برش دوگانه به‌دست می‌آید. در هر حالت، از تقسیم بار نهایی بر مساحت کلی که تحت برش قرار دارد، تنش برشی نهایی τ به‌دست می‌آید. در حالت برش تنها، این مساحت عبارت است از مساحت مقطع عرضی A نمونه، و در تنش دوگانه برابر است با دو برابر مساحت مقطع عرضی آن.

ب- بار مجاز و تنش مجاز: ضریب اطمینان. ماکزیمم باری که یک عضو ساختمانی یا یک قطعه ماشینی مجاز است تحت شرایط معمولی تحمل کند خیلی کمتر از بار نهایی است، و آن را بار مجاز و، گاهی، بار کاری یا بار طراحی می‌گویند. لذا، برای اطمینان از عملکرد عضو، فقط بار مجاز که کسری از بار نهایی عضو است مورد استفاده قرار می‌گیرد. نسبت بار نهایی به بار مجاز را ضریب اطمینان* می‌گویند:

$$(۱-۲۴) \quad \text{بار نهایی} \\ \text{بار مجاز} = F.S. = \text{ضریب اطمینان}$$

یک تعریف دیگر برای ضریب اطمینان چنین است:

$$(۱-۲۵) \quad \text{تنش نهایی} \\ \text{تنش مجاز} = F.S. = \text{ضریب اطمینان}$$

اگر یک رابطه خطی بین بار و تنش وجود داشته باشد، دو عبارت داده شده برای ضریب اطمینان در معادله‌های (۱-۲۴) و (۱-۲۵) همسانند. ولی، در اغلب کاربردهای مهندسی، وقتی بار به مقدار نهایی‌اش نزدیک می‌شود، این رابطه خطی از بین می‌رود و ضریب اطمینان حاصل از معادله (۱-۲۵)، یک ارزیابی واقعی برای ضریب اطمینان طراحی نیست. با وجود این، از روش تنش مجاز طراحی (معادله ۱-۲۵) خیلی استفاده می‌شود.

ج- انتخاب ضریب اطمینان مناسب. انتخاب ضریب اطمینان یکی از مهم‌ترین وظایف مهندسی است. اگر ضریب اطمینان خیلی کوچک باشد، امکان گسیختگی وجود دارد و اگر خیلی بزرگ باشد، طرح غیر اقتصادی یا غیر عملی می‌شود. انتخاب ضریب اطمینان مناسب نیاز به قضاوت مهندسی دارد، و این قضاوت به عوامل بسیاری بستگی دارد که در زیر چند نمونه آورده شده‌اند:

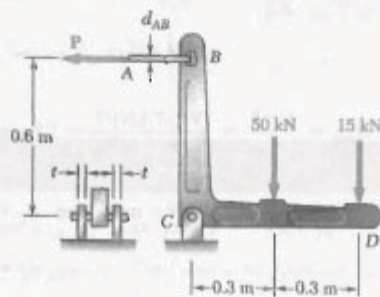
۱. تغییراتی که ممکن است در خواص عضو روی دهد. ترکیب، استقامت و ابعاد عضو در ضمن ساخت، تغییرات کوچکی می‌دهند. به علاوه، خواص ماده ممکن است تغییر کنند. مثلاً، بر اثر گرمایش، ممکن است تنش‌های باقیمانده در عضو به‌وجود آید. در هنگام ساخت، انبار کردن یا انتقال، ممکن است عضو دستخوش تغییر شکل شود.

* در اغلب رشته‌های مهندسی، به خصوص مهندسی هوا-فضا، به جای ضریب اطمینان از جمله اطمینان استفاده می‌شود، که برابر است با ضریب اطمینان منهای ۱: یعنی، $F.S. - 1 = \text{حاشیه اطمینان}$.

بزرگتر است. در این کتاب، از روش طراحی بر مبنای تنش مجاز استفاده شده است. ولی، در این فصل و فصل های ۵ و ۱۰، چند مسئله نیز با استفاده از روش LRFD حل شده اند.

مسئله نمونه ۱-۳

مطابق شکل، دو نیرو بر براکت BCD وارد شده اند. (الف) اگر میله کنترل AB از فولاد با تنش قائم نهایی ۶۰۰ MPa باشد، قطر آن را برای ضریب اطمینان ۳/۳ در برابر گسیختگی بیابید. (ب) مفصل C از فولاد با تنش برشی نهایی ۲۵۰ MPa ساخته شده است. قطر آن را برای ضریب اطمینان ۳/۳ در برابر برش بیابید. (ج) ضخامت مورد نیاز تکیه گاه C را بیابید در صورتی که تنش تکیه گاهی مجاز فولاد به کار رفته ۳۰۰ MPa باشد.



حل

جسم آزاد تمام براکت. واکنش در C با مولفه های C_x و C_y نشان داده شده است.

$$\sum M_C = 0 :$$

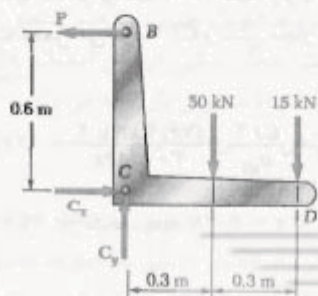
$$P(0.6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) = 0$$

$$P = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : C_y = 65 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$



در اغلب کاربردها، ضرایب اطمینان توسط آیین نامه ها تعیین می شوند. این آیین نامه ها توسط کمیته های متشکل از مهندسان مجرب نوشته می شود. در زیر، چند نمونه از آیین نامه های ساختمانی را برای بعضی مواد آورده ایم.

۱. فولاد :

American Institute of Steel Construction, Specifications for Structural Steel Buildings

۲. بتن :

American Concrete Institute, Building Code Requirement for Structural Concrete

۳. چوب :

American Forest and Paper Association, National Design Specification for Wood Construction

۴. پل ها :

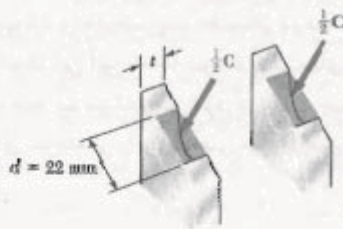
American Association of State Highway Officials, Standard Specifications for Highway Bridges

د. طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت. گفتیم که در طراحی مبتنی بر تنش مجاز، تمام عدم قطعیت ها در طراحی یک عضو ساختمانی یا قطعه مکانیکی را می توان با ضریب اطمینان از بین برد. در روش دیگری که مقبولیت زیادی در بین مهندسان ساختمان دارد، برای تفکیک بین عدم قطعیت های سازه و باری که سازه برای تحمل آن طرح می شود می توان از سه ضریب مختلف استفاده کرد. این روش، که آن را طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت (LRFD) می گویند به طراح این امکان را نیز می دهد که بین عدم قطعیت های بار زنده P_L ، یعنی باری که توسط سازه تحمل می شود، و بار مرده P_D ، یعنی وزن قسمتی از سازه که در بار کل سهم دارد، تمایز قائل شود.

هنگام استفاده از این روش، ابتدا باید بار نهایی P_U سازه، یعنی باری که تحت آن سازه غیر قابل استفاده می شود، تعیین کرد. اگر نامساوی زیر برقرار باشد، طرح پیشنهادی قابل قبول است:

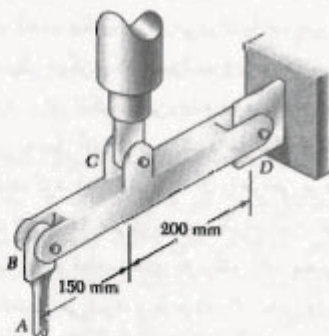
$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \quad (26-1)$$

ضریب ϕ را ضریب مقاومت می گویند؛ این ضریب، عدم قطعیت های مربوط به سازه را در نظر می گیرد و معمولاً کمتر از ۱ است. ضرایب γ_D و γ_L را ضرایب بار می گویند. این ضرایب، به ترتیب، عدم قطعیت های بار مرده و بار زنده را در نظر می گیرند و معمولاً از ۱ بزرگترند. γ_L معمولاً از γ_D



مسئله نمونه ۴-۱

تیر صلب BCD در B توسط پیچ و مهره به یک میله کنترل، در C به یک سیلندر هیدرولیکی، و در D به یک تکیه‌گاه ثابت متصل شده است. قطر پیچ و مهره عبارتند از: $d_B = d_D = 10 \text{ mm}$ ، $d_C = 12 \text{ mm}$. هر پیچ و مهره تحت برش دوگانه است و از فولاد با تنش برشی نهایی $\tau_U = 280 \text{ MPa}$ ساخته شده است. میله کنترل AB به قطر $d_A = 11 \text{ mm}$ است و از فولاد با تنش کششی نهایی $\sigma_U = 420 \text{ MPa}$ ساخته شده است. اگر مینیمم ضریب اطمینان این مجموعه $3/1$ باشد، مطلوب‌ست بیشترین نیرویی که سیلندر هیدرولیکی می‌تواند در C وارد کند.



حل

ضریب اطمینان، در رابطه با گسیختگی، در هر سه پیچ و مهره و در میله کنترل باید ۳ یا بیشتر باشد. این چهار معیار مستقل را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

جسم آزاد: تیر BCD . ابتدا نیرو در C را برحسب نیروهای وارده در B و D می‌یابیم.

$$\sum M_D = 0:$$

$$B(350 \text{ mm}) - C(500 \text{ mm}) = 0 \Rightarrow C = 1,750 B \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$-D(350 \text{ mm}) + C(150 \text{ mm}) = 0 \Rightarrow C = 2,33 D \quad (2)$$

الف - میله کنترل AB . چون ضریب اطمینان $3/1$ است، تنش مجاز برابر است با:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{420 \text{ MPa}}{3,1} = 135,5 \text{ MPa}$$

برای $P = 40 \text{ kN}$ ، مساحت مقطع عرضی مورد نیاز عبارت است از:

$$A_{req} = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{40 \text{ kN}}{135,5 \text{ MPa}} = 295 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{req} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 295 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow d_{AB} = 19,44 \text{ mm} \Leftarrow$$

ب - برش در مفصل C . برای ضریب اطمینان $3/1$ ، داریم

$$\tau_{all} = \frac{\tau_U}{F.S.} = \frac{280 \text{ MPa}}{3,1} = 90,3 \text{ MPa}$$

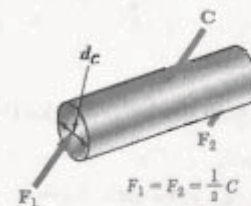
چون مفصل تحت برش دوگانه است،

$$A_{req} = \frac{C/2}{\tau_{all}} = \frac{(76,3 \text{ kN})/2}{90,3 \text{ MPa}} = 420 \text{ mm}^2$$

$$A_{req} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 420 \text{ mm}^2 \Rightarrow d_C = 23,4 \text{ mm}$$

$$d_C = 24 \text{ mm} \Leftarrow$$

از قطر 24 mm برای مفصل استفاده می‌شود.



ج - تنش تکیه‌گاهی در C . با استفاده از $d = 24 \text{ mm}$ ، مساحت نامی تکیه‌گاه هر براکت 221 است. چون نیرویی که توسط هر براکت تحمل می‌شود $C/2$ و تنش مجاز تکیه‌گاهی 300 MPa است،

$$A_{req} = \frac{C/2}{\sigma_{all}} = \frac{(76,3 \text{ kN})/2}{300 \text{ MPa}} = 127,2 \text{ mm}^2$$

لذا، $221 - 127,2$ در نتیجه، $t = 5,78 \text{ mm}$ از $t = 6 \text{ mm}$ استفاده می‌شود.

پیچ و مهره D.

چون این پیچ و مهره مانند B است، نیروی مجاز چنین است:
 $D = B = ۱۴,۶۶ \text{ kN}$ از معادله (۲):

$$C = ۲,۳۳ D = ۲,۳۳ (۱۴,۶۶ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۳۴,۱۶ \text{ kN} \triangleleft$$

پیچ و مهره C.

مجدداً، $\tau_{all} = ۹۳,۳۳ \text{ MPa}$ و می‌نویسیم:

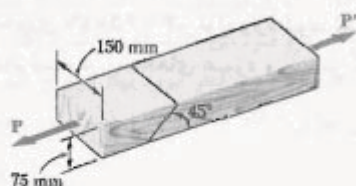
$$C = ۲ F_1 = ۲ (\tau_{all} A) = ۲ (۹۳,۳۳ \text{ MPa}) \left(\frac{1}{4} \pi (۱۲ \times ۱۰^{-۳} \text{ m})^2 \right) \Rightarrow C = ۲۱,۱۱ \text{ kN} \triangleleft$$

خلاصه. چهار مقدار ماکزیمم مجاز را برای نیرو در C تعیین کرده‌ایم. برای برقراری تمام این معیارها، کوچکترین مقدار را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی:

$$C = ۲۱,۱۱ \text{ kN} \triangleleft$$

مسائل

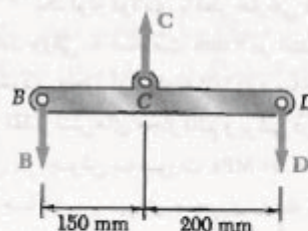
۲۹-۱ بار $P = ۱۱ \text{ kN}$ بر دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی که توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند، وارد شده است. تنش‌های قائم و برشی در این اتصال را بیابید.



شکل ۲۹-۱ و ۳۰-۱

۳۰-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر ماکزیمم تنش مجاز برشی در این اتصال ۶۲۰ kPa باشد، مطلوبست: (الف) بیشترین بار P که می‌توان با اطمینان وارد کرد، (ب) تنش کششی متناظر در وصله.

۳۱-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر $P = ۵,۶ \text{ kN}$ ، تنش‌های قائم و برشی در این اتصال را بیابید.



میله کنترل. برای ضریب اطمینان $۳,۰$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{۴۲۰ \text{ MPa}}{۳,۰} = ۱۴۰ \text{ MPa}$$

نیروی مجاز در میله کنترل چنین است:

$$B = \sigma_{all} (A) = (۱۴۰ \text{ MPa}) \left(\frac{1}{4} \pi (۱۱ \times ۱۰^{-۳} \text{ m})^2 \right) = ۱۳,۳ \text{ kN}$$

با استفاده از معادله (۱)، بیشترین مقدار مجاز C برابر است با:

$$C = ۱,۷۵۰ B = ۱,۷۵۰ (۱۳,۳ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۲۳,۲۸ \text{ kN} \triangleleft$$

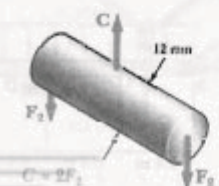
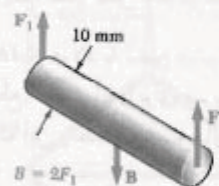
پیچ و مهره B.

چون پیچ و مهره تحت برش دوگانه است، مقدار مجاز نیروی B وارد بر پیچ و مهره عبارت است از:

$$B = ۲ F_1 = ۲ (\tau_{all} A) = ۲ (۹۳,۳۳ \text{ MPa}) \left(\frac{1}{4} \pi (۱۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ m})^2 \right) = ۱۴,۶۶ \text{ kN}$$

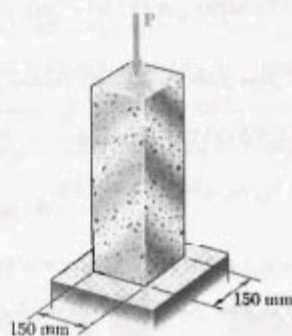
از معادله (۱):

$$C = ۱,۷۵۰ B = ۱,۷۵۰ (۱۴,۶۶ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۲۵,۶۶ \text{ kN} \triangleleft$$



۳۴-۱ یک لوله فولادی با قطر خارجی 300 mm از طریق جوش دادن ورقی به ضخامت 6 mm در امتداد مارپیچی که با صفحه عمود بر محور لوله زاویه 25° دارد ساخته شده است. اگر ماکزیمم مقدار تنش‌های مجاز قائم و برشی در امتدادهای عمود و مماس بر جوش به صورت $\sigma = 50 \text{ MPa}$ و $\tau = 30 \text{ MPa}$ باشند، ماکزیمم نیروی محوری را که می‌توان بر لوله وارد کرد بیابید.

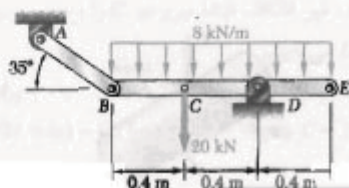
۳۵-۱ بار $P = 960 \text{ kN}$ بر قطعه گرانی نشان داده شده اثر می‌کند. ماکزیمم مقدار تنش‌های قائم و برشی را بیابید. وضعیت صفحه متناظر با هر یک از این مقادیر ماکزیمم را مشخص کنید.



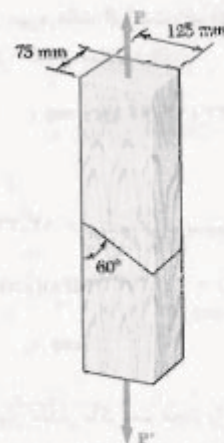
شکل م-۳۵ و م-۳۶

۳۶-۱ بار مرکزی P بر قطعه گرانی نشان داده شده اثر می‌کند. اگر ماکزیمم مقدار تنش برشی حاصل در قطعه 17 MPa باشد، مطلوبست: (الف) مقدار P ، (ب) وضعیت سطحی که ماکزیمم تنش برشی بر آن وارد می‌شود، (ج) تنش قائم وارده بر آن سطح، (د) ماکزیمم مقدار تنش قائم در قطعه.

۳۷-۱ رابط AB از فولاد با تنش قائم نهایی 450 MPa است. مساحت مقطع عرضی آن را برای ضریب اطمینان $3/5$ بیابید. فرض کنید که این رابط در مفصل‌های A و B به خوبی تقویت شده است.



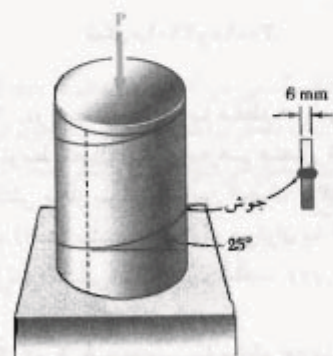
شکل م-۳۷



شکل م-۳۱ و م-۳۲

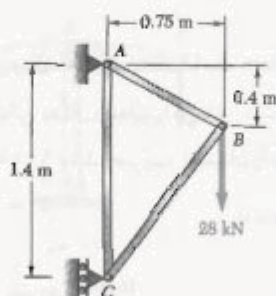
۳۲-۱ در عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر ماکزیمم تنش مجاز کششی در این اتصال 525 kPa باشد، مطلوبست: (الف) بیشترین بار P که با اطمینان تحمل می‌شود، (ب) تنش برشی متناظر در این اتصال.

۳۳-۱ یک لوله فولادی با قطر خارجی 300 mm از طریق جوش دادن ورقی به ضخامت 6 mm در امتداد مارپیچی که با صفحه عمود بر محور لوله زاویه 25° دارد ساخته شده است. اگر نیروی محوری $P = 250 \text{ kN}$ بر لوله وارد شود، تنش‌های قائم و برشی، به ترتیب، در امتدادهای عمود و مماس بر جوش را بیابید.



شکل م-۳۳ و م-۳۴

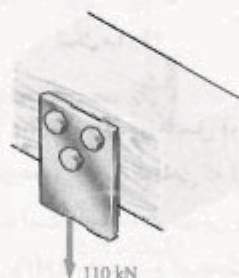
۴۱-۱ عضوهای AB و AC از میله‌های هم جنس با مقطع عرضی چهار گوش ساخته شده‌اند. میله چهارگوشی از همان جنس و به ضلع ۲۰ mm تحت بار ۱۲۰ kN گسیخته می‌شود. برای ضریب اطمینان $۳/۲$ برای هر دو میله، ابعاد مورد نیاز مقطع عرضی آنها را بیابید.



شکل م-۴۱ و م-۴۲

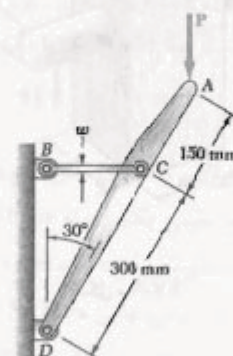
۴۲-۱ عضوهای AB و AC از میله‌های هم جنس با مقطع عرضی چهار گوش ساخته شده‌اند. میله چهارگوشی از همان جنس و به ضلع ۲۰ mm تحت بار ۱۲۰ kN گسیخته می‌شود. اگر مقطع عرضی میله AB به ضلع ۱۵ mm باشد، مطلوب است: (الف) ضریب اطمینان برای میله AB ، (ب) ابعاد مقطع عرضی میله AC در صورتی که دارای ضریب اطمینان میله AB باشد.

۴۳-۱ برای اتصال ورق فولادی نشان داده شده به یک تیر چوبی، از سه پیچ و مهره فولادی استفاده می‌شود. اگر بار ۱۱۰ kN بر این ورق وارد شود، قطر مورد نیاز پیچ و مهره را بیابید. تنش برشی نهایی فولاد ۳۶۰ MPa و ضریب اطمینان $۳/۲۵$ باشد.



شکل م-۴۳ و م-۴۴

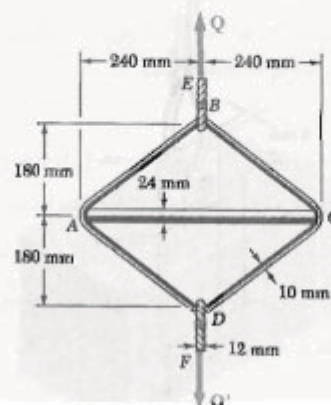
۳۸-۱ بازوی افقی BC به ضخامت ۶ mm و به عرض $w = ۲۵\text{ mm}$ است، و از فولاد با استقامت نهایی کششی ۴۵۰ MPa ساخته شده است. اگر این سازه برای تحمل بار $P = ۴۰\text{ kN}$ طرح شده باشد، ضریب اطمینان چقدر است؟



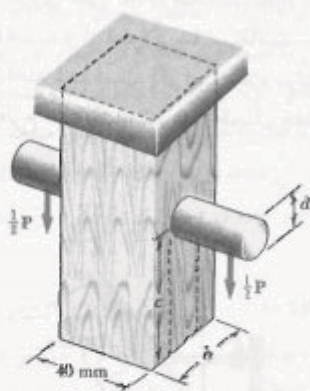
شکل م-۳۸ و م-۳۹

۳۹-۱ بازوی افقی BC به ضخامت ۶ mm است و از فولاد با استقامت نهایی کششی ۴۵۰ MPa ساخته شده است. اگر این سازه برای تحمل بار $P = ۳۲\text{ kN}$ طرح شده باشد، عرض w برای ضریب اطمینان ۳ چقدر است؟

۴۰-۱ حلقه فولادی $ABCD$ به طول $۱/۲\text{ m}$ و به قطر ۱۰ mm مطابق شکل، پیرامون میله آلومینیومی AC به قطر ۲۴ mm قرار گرفته است. از کابل‌های BE و DF ، هر یک به قطر ۱۲ mm ، برای اعمال بار Q استفاده می‌شود. اگر استقامت نهایی میله AC ۲۶۰ MPa و استقامت نهایی حلقه و کابل‌ها ۴۸۰ MPa باشد، بیشترین بار Q را برای ضریب اطمینان کلی ۳ بیابید.



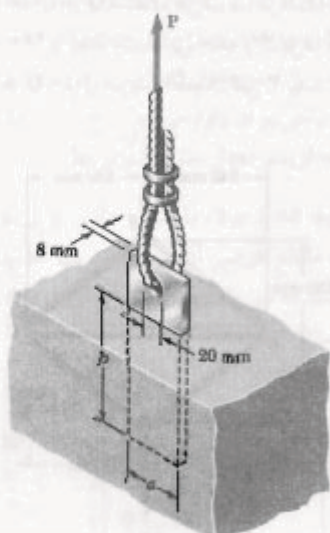
شکل م-۴۰



شکل م ۴۷-۱

۴۸-۱ در مسئله ۴۷-۱، اگر $d = 16 \text{ mm}$ و $P = 20 \text{ kN}$ ،
مطلوبست: (الف) ضریب اطمینان مفصل، (ب) مقدار h و c
در صورتی که ضریب اطمینان مفصل $3/2$ باشد.

۴۹-۱ یک ورق فولادی به ضخامت 8 mm در یک تیغه
افقی قرار گرفته است و از آن برای مهار کردن یک کابل عمودی
پر مقاومت استفاده شده است. قطر سوراخ داخل ورق 20 mm
است، استقامت نهایی فولاد به کار رفته 250 MPa است، و
تنش اتصالی نهایی بین ورق و بتن 2 MPa است. اگر ضریب
اطمینان برای بار $P = 10 \text{ kN}$ برابر با $3/60$ باشد، مطلوبست:



شکل م ۴۹-۱

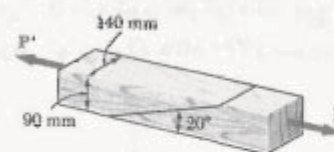
۴۴-۱ از سه پیچ و مهره فولادی به قطر 18 mm برای
متصل کردن ورق فولادی نشان داده شده به یک تیر چوبی
استفاده می‌شود. اگر بار 110 kN بر این ورق وارد شود و تنش
برشی نهایی این فولاد 360 MPa باشد، ضریب اطمینان را
بیابید.

۴۵-۱ دو ورق، هر یک به ضخامت 2 mm ، برای اتصال
یک نوار پلاستیکی به کار رفته‌اند. اگر تنش برشی نهایی اتصال
بین سطوح 900 kPa باشد، ضریب اطمینان را در رابطه با برش
 $P = 1/3 \text{ kN}$ بیابید.



شکل م ۴۵-۱

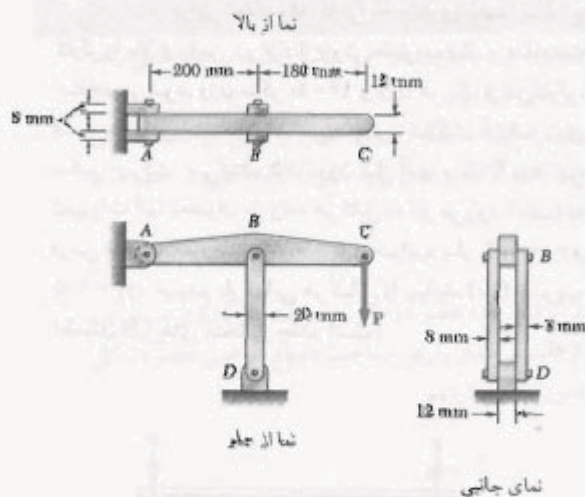
۴۶-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت
مستطیلی $90 \times 140 \text{ mm}$ توسط اتصال چسبی به هم متصل
شده‌اند. اگر ماکزیم تنش برشی مجاز در این اتصال 520 kPa
باشد، ماکزیم بار محوری P را بیابید.



شکل م ۴۶-۱

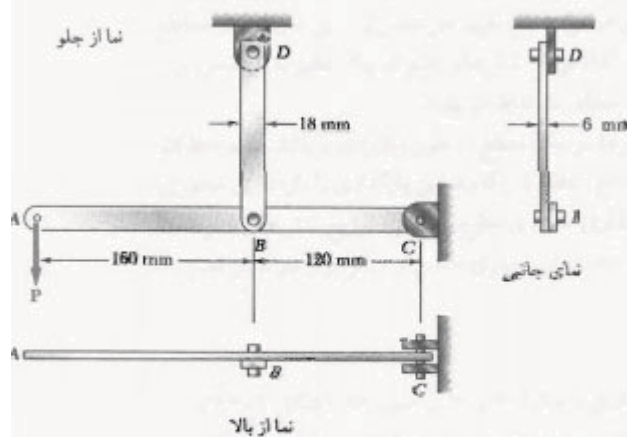
۴۷-۱ مطابق شکل، بر مفصل فولادی وارد شده
است. این مفصل در عضو چوبی کوتاهی که از سقف آویزان
است جاذبه شده است. استقامت نهایی چوب در کشش
 60 MPa و در برش $7/5 \text{ MPa}$ است، و استقامت نهایی فولاد در
برش 150 MPa است. $a = 55 \text{ mm}$ ، $b = 40 \text{ mm}$ و $c = 55 \text{ mm}$
و $d = 12 \text{ mm}$ را برای ضریب اطمینان کلی $3/2$ بیابید.

REB



شکل م-۵۳ و م-۵۴

۵۵-۱ در سازه فولادی نشان داده شده، قطر پین‌های B ، C و D ، به ترتیب، 6 mm ، 10 mm و 10 mm است. تنش برش نهایی در تمام اتصالات 150 MPa ، و تنش قائم نهایی در میله BD برابر با 400 MPa است. برای ضریب اطمینان 3 ، ماکزیم بار P را بیابید. میله BD در پیرامون سوراخ پین‌ها تقویت نشده است.



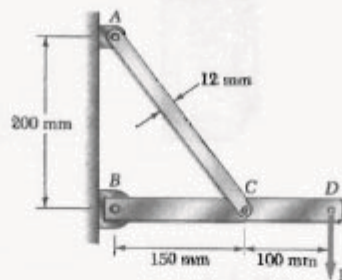
شکل م-۵۵

۵۶-۱ مسئله ۵۵-۱ را با این فرض حل کنید که قطر پین‌های B و D برابر با 12 mm باشد.

(الف) عرض a مورد نیاز ورق، (ب) مینیمم عمق b جایگذاری ورق با آن عرض در تیغه بتنی، (از تنش‌های قائم بین بتن و انتهای پایینی ورق صرف‌نظر کنید).

۵۰-۱ در مسئله ۴۹-۱، اگر $a = 50\text{ mm}$ ، $b = 190\text{ mm}$ و $P = 12\text{ kN}$ ، ضریب اطمینان را برای مهار کابل بیابید.

۵۱-۱ میله فولادی AC دارای تنش قائم نهایی 450 MPa و مقطع عرضی مستطیلی یکنواخت $6 \times 12\text{ mm}$ است. قطر پین‌های A ، B و C ، به ترتیب، 10 mm ، 8 mm و 10 mm است. پین‌ها از فولاد با تنش برش نهایی 170 MPa هستند و تحت برش تنها قرار دارند. برای ضریب اطمینان $3/25$ ، ماکزیم بار P را بیابید. میله AC در پیرامون سوراخ پین‌ها تقویت نشده است.



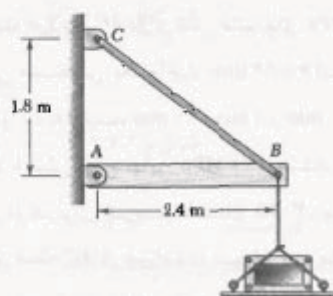
شکل م-۵۱

۵۲-۱ مسئله ۵۱-۱ را با این فرض حل کنید که قطر پین‌های A ، B و C برابر با 8 mm باشد.

۵۳-۱ در سازه نشان داده شده، از مفصل A به قطر 8 mm و مفصل‌های B و D به قطر 12 mm استفاده شده است. اگر تنش برش نهایی در تمام اتصالات 100 MPa باشد و تنش قائم نهایی در هر یک از دو عضو B و D را به هم متصل می‌کند 250 MPa باشد، بار مجاز P را برای ضریب اطمینان کلی $3/0$ بیابید.

۵۴-۱ مسئله ۵۳-۱ را با این فرض حل کنید که قطر مفصل A برابر با 10 mm باشد.

۵۸-۱* یک سکوی تخت 40 kg به انتهای B تیر چوبی AB به جرم 50 kg متصل است. این تیر توسط مفصل A و میله لاغر فولادی BC ، با بار نهایی 12 kN ، نگه داشته شده است. (الف) با استفاده از طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت، بیشترین پلری را که می‌توان با اطمینان بر سکو وارد کرد بیابید. $(\gamma_L = 1/6$ و $\gamma_D = 1/25$ ، $\phi = 0/90$)، (ب) ضریب اطمینان متناظر برای میله BC چقدر است؟



شکل م ۵۸-۱

۵۷-۱* برای انتخاب دو کابلی که سکوی نگهدارنده دو کارگر را بالا و پایین می‌برد از روش ضریب بار و مقاومت استفاده می‌شود. وزن سکو 160 lb و وزن هر یک از دو کارگر، همراه با تجهیزات، 195 lb است. چون کارگران آزادانه روی سکو حرکت می‌کنند، 75% وزن کل آنها و 75% وزن کل تجهیزات آنها به‌عنوان بار زنده هر کابل به کار می‌رود. (الف) به فرض ضریب مقاومت $\phi = 0/85$ و ضرایب بار $\gamma_D = 1/2$ و $\gamma_L = 1/5$ ، مینیمم بار نهایی هر کابل را بیابید. (ب) ضریب اطمینان کابل‌های انتخابی چقدر است؟



شکل م ۵۷-۱

مرور و خلاصه فصل ۱

در این فصل، مفهوم تنش و روش‌های تحلیل و طراحی ماشین‌آلات و سازه‌هایی را که تحت بارگذاری قرار می‌گیرند بررسی کردیم.

در قسمت ۱-۲، کاربرد روش‌های استاتیک را برای تعیین واکنش در تکیه‌گاههای یک سازه مرور کردیم. از نمودار جسم آزاد نیز برای تعیین نیروهای داخلی در عضوهای مختلف سازه استفاده کردیم.

در قسمت ۱-۳، با در نظر گرفتن یک عضو دینروبی تحت بارگذاری محوری، مفهوم تنش را بررسی کردیم. از تقسیم مقدار بار بر مساحت مقطع عرضی عضو (شکل ۱-۸الف)، تنش قائم در آن عضو را تعیین کردیم:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5-1)$$

در قسمت ۱-۴، درباره تحلیل و طراحی سازه‌ها و ماشین‌آلات بحث کردیم. همانطور که در قسمت ۵-۱ گفته شد، مقدار σ حاصل از معادله (۵-۱) تنش متوسط در مقطع را نشان می‌دهد نه تنش در نقطه خاص Q از آن مقطع را. با در نظر گرفتن مساحت ΔA در پیرامون نقطه Q و مقدار نیروی وارده بر آن، تنش در آن نقطه را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (6-1)$$

به طور کلی، مقدار حاصله برای σ در نقطه Q با مقدار تنش متوسط حاصل از فرمول (۵-۱) متفاوت است. تنش σ در عرض مقطع تغییر می‌کند. ولی، این تغییرات در مقاطع دور از نقاط اثر بار کوچک است. لذا، توزیع تنش‌های قائم در یک عضو با بار محوری را یکنواخت فرض می‌کنیم مگر در مجاورت نقاط اثر بارها.

البته، برای اینکه توزیع تنش‌ها در یک مقطع به طور یکنواخت باشد، باید خط اثر بارهای P و P' از مرکزوار آن مقطع (نقطه C) بگذرد. این بارگذاری را بارگذاری محوری مرکزی می‌گویند. در حالت بارگذاری محوری خارج از مرکز، توزیع تنش‌ها یکنواخت نیست. تنش در عضوهای را که تحت بار محوری خارج از مرکز قرار دارند در فصل ۴ بررسی می‌کنیم.

با اعمال نیروهای عرضی مساوی و متضاد P و P' بر عضو AB (شکل ۱۶-۱الف)، تنش برشی τ در مقاطع بین نقاط اثر دو نیرو به وجود می‌آید (قسمت ۶-۱). این تنش در عرض مقطع به طور قابل توجه تغییر می‌کند و توزیع آن را نمی‌توان یکنواخت فرض کرد. تنش برشی متوسط در یک مقطع از رابطه زیر به دست می‌آید:

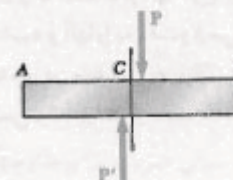
$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} \quad (8-1)$$

بارگذاری محوری. تنش قائم



شکل ۱-۸الف

نیروهای عرضی. تنش برشی



شکل ۱۶-۱الف

در پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها، یا پرچ‌ها نیز تنش برشی به وجود می‌آید. مثلاً، در پیچ و مهره CD (شکل ۱۸-۱)، که تحت برش تنها است،

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (9-1)$$

ولی، در پیچ و مهره‌های EG و HJ (شکل ۲۰-۱)، که هر دو تحت برش دوگانه‌اند،

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \quad (10-1)$$

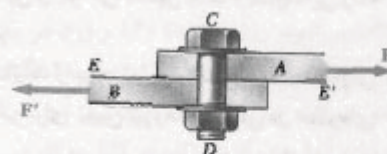
پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها، و پرچ‌ها نیز در عضوهایی که به هم متصل می‌کنند در امتداد سطح تکیه‌گاهی، یا سطح تماس، ایجاد تنش می‌کنند (قسمت ۷-۱). مثلاً، پیچ و مهره CD در شکل ۱۸-۱، تنش‌هایی را بر سطح نیم استوانه‌ای ورق A که با پیچ تماس دارد وارد می‌کند (شکل ۲۲-۱). چون توزیع این تنش‌ها کاملاً پیچیده است، در عمل از مقدار نامی تنش متوسط (σ_b)، که آن را تنش تکیه‌گاهی می‌گویند و از تقسیم بار P بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ و مهره روی ورق به دست می‌آید، استفاده می‌شود. اگر ضخامت ورق را با t و قطر سوراخ را با d نشان دهیم،

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (11-1)$$

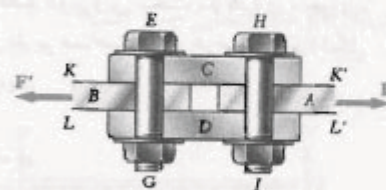
در قسمت ۸-۱، برای تحلیل یک سازه ساده متشکل از دو عضو با اتصال مفصلی، از مفاهیم قبل استفاده کردیم؛ یعنی، تنش‌های قائم در این دو عضو، باریکترین مقاطع، تنش‌های برشی در مفصل‌های مختلف و تنش تکیه‌گاهی در هر اتصال را بررسی کردیم.

در قسمت ۹-۱، روش حل مسائل مقاومت مصالح را توضیح دادیم، و گفتیم که حل باید با یک بیان واضح و دقیق از مسئله شروع شود. آنگاه، پس از ترسیم چند نمودار آزاد، معادله‌های تعادل را نوشته و نیروهای مجهول را با استفاده از آنها می‌یابیم. با حل این نیروها، تنش‌ها و تغییرشکل‌های مورد نیاز را محاسبه و آنها را به دقت و الوسی می‌کنیم. قسمت اول این فصل را با بحث درباره دقت عددی در مهندسی به پایان بردیم، و به این نکته توجه داشتیم که دقت پاسخ هیچوقت نمی‌تواند بیشتر از دقت داده‌ها باشد (قسمت ۱۰-۱).

برش تنها و برش دوگانه

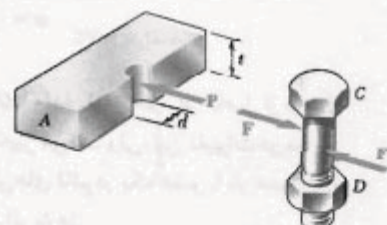


شکل ۱۸-۱



شکل ۲۰-۱

تنش تکیه‌گاهی



شکل ۲۲-۱

روش حل

تنش در مقطع مایل



شکل ۳۰-۱ الف

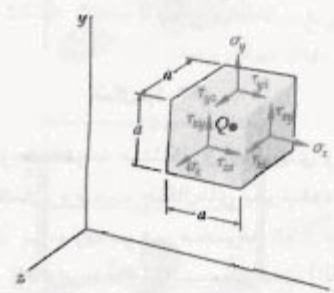
در قسمت ۱-۱۱، تنش‌های ایجاد شده در یک مقطع مایل را در عضو دوتیرویی که تحت بارگذاری محوری قرار داشت بررسی کردیم. دیدیم که در این حالت هر دو تنش قائم و تنش برشی به وجود می‌آیند. زاویه مقطع با یک صفحه عمودی را با θ (شکل ۳۰-۱ الف) و مساحت مقطع عمود بر محور عضو را با A_0 نشان دادیم و عبارتهای زیر را برای تنش قائم σ و تنش برشی τ وارد بر یک مقطع مایل به دست آوریم:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \quad (۱۴-۱)$$

دیدیم که تنش قائم برای $\theta = 0$ دارای مقدار ماکزیمم $\sigma_m = P/A_0$ است، و برای $\theta = 45^\circ$ تنش برشی دارای مقدار ماکزیمم $\tau_m = P/2A_0$ است. همچنین، دیدیم که در $\sigma = P/2A_0$ ، $\theta = 45^\circ$ و در $\tau = 0$ ، $\theta = 0$.

درباره حالت تنش در نقطه Q از جسمی که تحت بارگذاری کلی است نیز بحث کردیم (قسمت ۱-۱۲). مکعب کوچکی با مرکز Q را در نظر گرفتیم (شکل ۱-۳۶) و تنش قائم وارد بر یک وجه مکعب را در امتداد عمود بر محور x با σ_x و مولفه‌های τ_{xy} و τ_{yx} تنش برشی وارد بر همان وجه مکعب را، به ترتیب، با τ_{xy} و τ_{yx} نشان دادیم. این روش را برای دو وجه دیگر مکعب تکرار کردیم و دیدیم که $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ، $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ و $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. نتیجه گرفتیم که برای مشخص کردن حالت تنش در نقطه معین Q ، شش مولفه تنش، یعنی σ_x ، σ_y ، σ_z ، τ_{xy} ، τ_{yz} و τ_{zx} مورد نیازند.

تنش در بارگذاری کلی



شکل ۳۶-۱

در قسمت ۱-۱۳، درباره مفاهیم مختلف در طراحی سازه‌های مهندسی بحث کردیم. دیدیم که بار نهایی یک عضو ساختمانی یا یک قطعه مکانیکی، باری است که پیش‌بینی می‌شود عضو یا قطعه تحت آن گسیخته شود؛ این بار از روی تنش نهایی یا استقامت نهایی ماده، که با آزمایش به دست می‌آیند، تعیین می‌شود. بار نهایی به طور قابل توجه از بار مجاز بیشتر است (بار مجاز باری است که عضو یا قطعه تحت شرایط عادی تحمل می‌کند). نسبت بار نهایی به بار مجاز را ضریب اطمینان می‌گویند:

$$F.S. = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}} = \text{ضریب اطمینان} \quad (۲۶-۱)$$

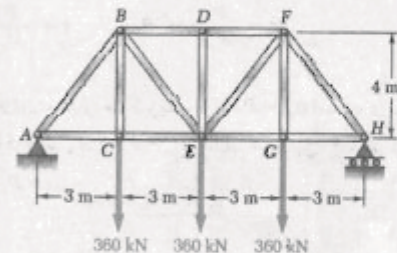
تعیین ضریب اطمینان، که در طراحی یک سازه باید از آن استفاده کرد، بستگی به عوامل گوناگونی دارد که بعضی از آنها در این قسمت فهرست شدند.

قسمت ۱-۱۳ را با بحث درباره روش دیگر طراحی، به نام طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت، به پایان بردیم. در این روش، مهندس می‌تواند عدم قطعیت‌های مربوط به سازه و بار را از هم تفکیک کند.

طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت

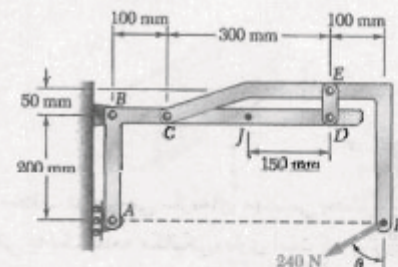
مسائل تکمیلی

۵۹-۱ برای خرپا و بارگذاری نشان داده شده، تنش قائم متوسط را در عضو BE بیابید. مساحت مقطع عرضی این عضو ۳۷۵۰ mm^2 است.



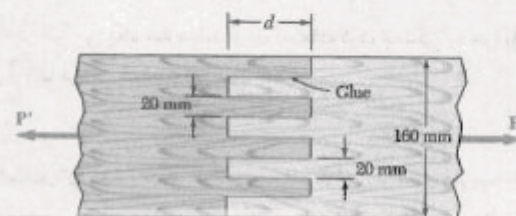
شکل م-۵۹

۶۰-۱ اگر عرض و ضخامت رابط DE ، به ترتیب، ۲۵ mm و ۳ mm باشد، مطلوبست تنش قائم در قسمت مرکزی آن در صورتی که: (الف) $\theta = 0^\circ$ ، (ب) $\theta = 90^\circ$.



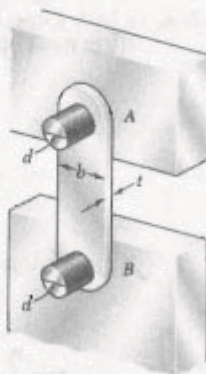
شکل م-۶۰

۶۱-۱ دو قطعه چوبی، هر یک به ضخامت ۲۲ mm و به عرض ۱۶۰ mm ، توسط اتصال خشک زمانه‌ای نشان داده شده به هم متصل‌اند. اگر چوب به دار رفته تحت تنش برش متوسط ۸۲۰ kPa در امتداد دانه‌بندی‌اش بریده شود و $P = ۷,۶ \text{ kN}$ ، کمترین طول مجاز d را بیابید.



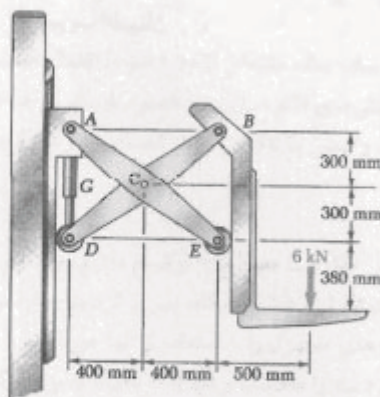
شکل م-۶۱

۶۲-۱ رابط AB ، به عرض $b = ۵۰ \text{ mm}$ و ضخامت $t = ۶ \text{ mm}$ ، تکیه‌گاه یک تیر افقی را تشکیل می‌دهد. اگر تنش قائم متوسط در رابط ۱۴۰ MPa و تنش برشی متوسط در هر یک از دو پین ۸۴ MPa باشد، مطلوبست: (الف) قطر d پین‌ها، (ب) متوسط تکیه‌گاهی در رابط.



شکل م-۶۲

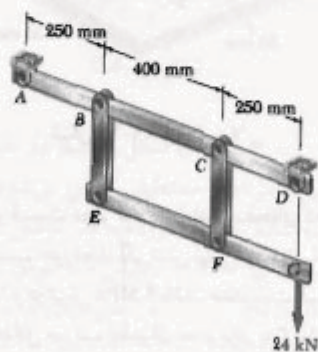
۶۳-۱ دو مجموعه متشکل از میله‌بندی و سیلندر هیدرولیکی همسان، وضعیت چنگال‌های یک لیفت تراک را کنترل می‌کنند. بار وارده بر هر مجموعه ۶ kN است. اگر ضخامت عضو BD برابر ۱۶ mm باشد، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در پین B به قطر ۱۲ mm ، (ب) تنش تکیه‌گاهی در نقطه B از عضو BD .



شکل م-۶۳

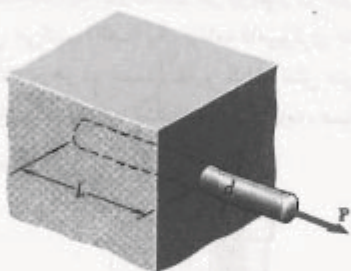
۶۴-۱ تنش برشی متوسط در پین B به قطر ۱۰ mm نباید از ۱۲۰ MPa و تنش تکیه‌گاهی متوسط در عضو AB و پراکت B نباید از ۹۰ MPa بیشتر شود. ماکزیمم بار P را بیابید.

۶۷-۱ هر یک از دو بازوی عمودی CF که دو بازوی افقی AD و EG را به هم متصل می‌کند دارای مقطع عرضی مستطیلی $۱۰\text{ mm} \times ۴۰\text{ mm}$ است و از فولاد با استقامت نهایی کششی ۴۰۰ MPa ساخته شده است. هر یک از مفصل‌های C و F به قطر ۲۰ mm و از فولاد با استقامت نهایی برشی ۱۵۰ MPa است. ضریب اطمینان کلی بازوهای CF و مفصل‌هایی که آنها را به عضوهای افقی متصل می‌کند بیابید.



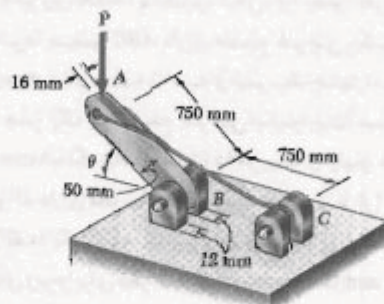
شکل م-۶۷

۶۸-۱ بار P بر میله فولادی وارد شده است. این میله داخل یک قطعه بتنی جازده شده است. مطلوب‌ست کمترین طول L به‌طوری‌که ماکزیمم تنش قائم مجاز در میله ایجاد شود. نتیجه را برحسب قطر d میله، تنش قائم مجاز σ_{all} فولاد، و تنش مجاز متوسط اتصال τ_{all} بین بتن و سطح استوانه‌ای میله بیان کنید. (از تنش قائم بین بتن و انتهای میله صرف‌نظر کنید).



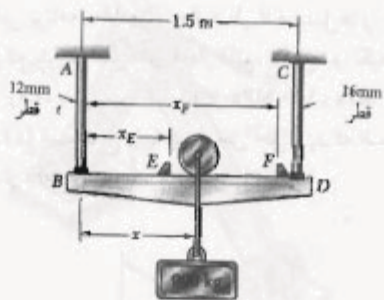
شکل م-۶۸

۶۹-۱ دو قسمت عضو AB در امتداد صفحه‌ای که با افق زاویه θ دارد به هم چسب خورده‌اند. اگر تنش نهایی اتصال چسبی در کشش ۱۷ MPa و در برش ۹ MPa باشد، مطلوب‌ست: (الف) مقدار θ متناظر با ماکزیمم ضریب اطمینان، (ب) مقدار ماکزیمم ضریب اطمینان.



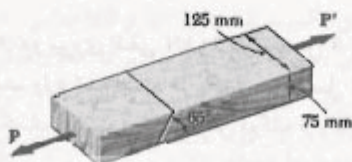
شکل م-۶۴

۶۵-۱ بار ۹۰۰ kg را می‌توان در امتداد تیر BD بین موانع E و F حرکت داد. اگر σ_{all} برای میله‌های AB و CD برابر با ۲۲ MPa باشد، موانع را کجا قرار دهیم تا فاصله حرکت مجاز بار به بیشترین مقدار ممکن برسد.



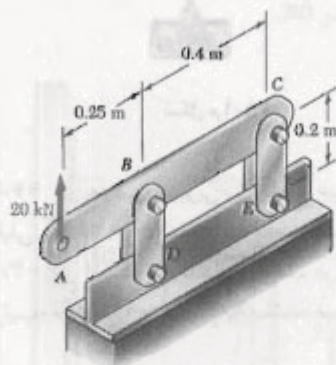
شکل م-۶۵

۶۶-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی $۷۵ \times ۱۲۵\text{ mm}$ با چسب به هم متصل شده‌اند. اگر $P = ۳۷\text{ kN}$ و استقامت نهایی چسب در کشش و برش، به‌ترتیب، ۱۷ MPa و ۱۴ MPa باشد، ضریب اطمینان را بیابید.



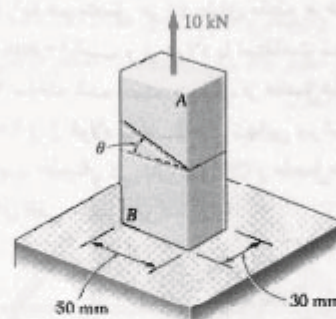
شکل م-۶۶

۱-ک ۲ نیروی 20 kN ، مطابق شکل، بر عضو افقی ABC وارد می‌شود. عضو ABC دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیل $50 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ است و توسط چهار بازوی عمودی، هر یک با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی $8 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ ، نگه داشته می‌شود. هر یک از چهار مفصل A ، B ، C و D دارای قطر یکسان d است و تحت برش دوگانه قرار دارد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن کمیت‌های زیر را برای قطر d در گستره 10 mm تا 30 mm ، با نمو 1 mm ، محاسبه کنید: (۱) ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط در بازوهای متصل‌کننده مفصل‌های B و D ، (۲) تنش قائم متوسط در بازوهای متصل‌کننده مفصل‌های C و E ، (۳) تنش برشی متوسط در مفصل B ، (۴) تنش برشی متوسط در مفصل C ، (۵) تنش تکیه‌گاهی متوسط در B از عضو ABC ، (۶) تنش تکیه‌گاهی متوسط در C از عضو ABC . (ب) با مقایسه مقادیر حاصل برای $d = 16 \text{ mm}$ با پاسخ‌های به‌دست آمده در مسائل ۸-۱، ۲۳-۱ و ۲۴-۱، این برنامه را واریسی کنید. (ج) با استفاده از این برنامه، مقادیر مجاز قطر d مفصل‌ها را بیابید در صورتی که بدانیم تنش‌های مجاز قائم، برشی، و تکیه‌گاهی فولاد به کار رفته، به ترتیب، عبارتند از 150 MPa ، 90 MPa و 230 MPa . (د) قسمت ج را با این فرض حل کنید که ضخامت عضو ABC از 10 mm به 8 mm کاهش یابد.



شکل ۱-۲

۱-ک ۳ دو نیروی افقی 20 kN بر مفصل B مجموعه نشان داده شده وارد شده است. هر یک از سه مفصل A ، B و C دارای قطر یکسان d است و تحت برش دوگانه قرار دارد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن کمیت‌های زیر را برای مقادیر d در گستره 17.5 mm تا 37.5 mm ، با نمو 1.75 mm ، محاسبه کنید: (۱) ماکزیمم مقدار تنش قائم



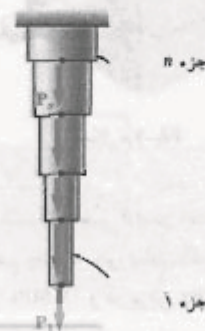
شکل ۱-۶ و ۱-۷

۱-۷ دو قسمت عضو AB در امتداد صفحه‌ای که با افق زاویه θ دارد به هم چسب خورده‌اند. اگر تنش نهایی برای اتصال چسبی در کشش 17 MPa و در برش 9 MPa باشد، مطلوبست گستره مقدار θ که به ازای آن حداقل ضریب اطمینان عضو برابر با ۳ باشد.

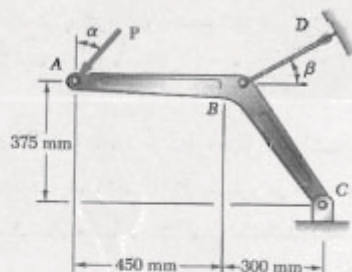
مسائل کامپیوتری

مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طرح شده‌اند.

۱-ک ۱ یک میله توپر فولادی از n جزء استوانه‌ای که به هم جوش‌اند تشکیل شده است. این میله تحت بارگذاری نشان داده شده قرار دارد. قطر جزء i را با d_i و بار وارد بر انتهای پایینی آن را با P_i نشان می‌دهیم. اگر P_i مطابق شکل، به طرف پایین باشد، مقدار P_i آن را مثبت می‌گیریم و در غیر اینصورت منفی فرض می‌کنیم. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، در هر دو سیستم $U.S.$ و $S.I.$ ، تنش متوسط در هر جزء میله را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱-۱ و ۱-۳ را حل کنید.

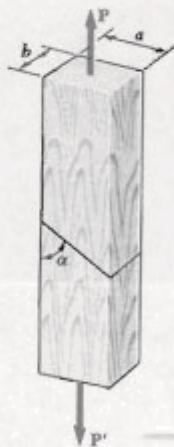


شکل ۱-۱



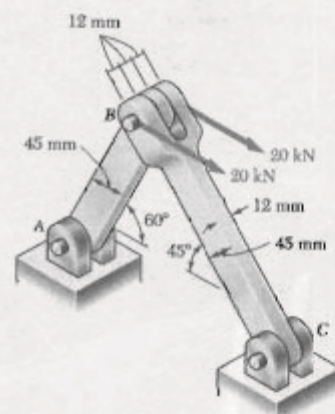
شکل ۱-۴

۱-۵ بار P ، مطابق شکل، توسط دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی تحمل می‌شود. این دو عضو توسط وصله ساده چسب خورده به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر استقامت نهایی اتصال در کشش و در برش را، به ترتیب، با σ_{IJ} و τ_{IJ} نشان دهیم، یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای مقادیر داده شده a ، b ، P ، σ_{IJ} و τ_{IJ} (که در آحاد SI یا U.S. بیان شده‌اند)، و برای مقادیر α از 5° تا 85° در بازه‌های 5° ، کمیت‌های زیر را محاسبه کنید: (۱) تنش قائم در اتصال، (۲) تنش برشی در اتصال، (۳) ضریب اطمینان نسبت به گسیختگی در کشش، (۴) ضریب اطمینان نسبت به گسیختگی در برش، (۵) ضریب اطمینان کلی برای اتصال چسب خورده. (ب) با استفاده از ابعاد و بارگذاری عضوها در مسائل ۱-۲۹، ۱-۳۲، این برنامه را اجرا کنید، در صورتیکه بدانیم برای چسب به کار رفته در مسئله ۱-۲۹ داریم $\sigma_{IJ} = 1.26 \text{ MPa}$ و برای چسب به کار رفته در مسئله ۱-۳۲ $\tau_{IJ} = 1.50 \text{ MPa}$.



شکل ۱-۵

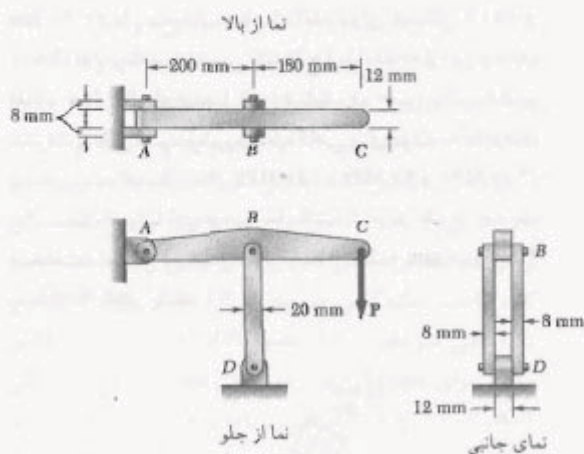
متوسط در عضو AB ، (۲) تنش قائم متوسط در عضو BC ، (۳) تنش برشی متوسط در مفصل A ، (۴) تنش برشی متوسط در مفصل C ، (۵) تنش تکیه‌گاهی متوسط در A از عضو AB ، (۶) تنش تکیه‌گاهی متوسط در C از عضو BC ، (۷) تنش تکیه‌گاهی متوسط در B از عضو BC . (ب) با مقایسه مقادیر حاصل برای $d = 20 \text{ mm}$ با پاسخ‌های به‌دست آمده برای مسائل ۱-۱۰ و ۱-۲۸، این برنامه را واریسی کنید. (ج) با استفاده از این برنامه، مقادیر مجاز قطر d مفصل‌ها را بیابید، در صورتیکه بدانیم تنش‌های مجاز قائم، برشی و تکیه‌گاهی برای فولاد به کار رفته، به ترتیب، عبارتند از 150 MPa ، 90 MPa و 250 MPa . (د) قسمت ج را با این فرض حل کنید که، در طرح جدید، ضخامت و عرض دو عضو، به ترتیب، از 14 mm به 8 mm ، و از 45 mm به 60 mm تغییر یابند.



شکل ۱-۳

۱-۴ نیروی $P = 16 \text{ kN}$ ، که با عمود زاویه α دارد، مطابق شکل بر عضو ABC وارد می‌شود. این عضو توسط مفصل C و کابل BD ، که با افق زاویه β دارد، نگه داشته می‌شود. (الف) اگر بار نهایی کابل 100 kN باشد، یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با آن جدولی از ضریب اطمینان کابل را برای مقادیر α و β از صفر تا 45° تشکیل دهید. برای این منظور، نمودارهای α و β را طوری بگیریید که نمودار α و β برابر با 0.1 باشد. (ب) نشان دهید که برای تمام مقادیر α ، مقدار ماکزیمم ضریب اطمینان برای $\beta = 38.66^\circ$ است و علت آن را توضیح دهید. (ج) کمترین مقدار مسکن ضریب اطمینان را برای $\beta = 38.66^\circ$ ، و نیز مقدار متناظر α را بیابید و نتیجه حاصل را توضیح دهید.

واریسی کنید. (د) با استفاده از این برنامه، بار مجاز P_{all} ، و اینکه کدام یک از تنش‌ها بحرانی است را برای معلومات زیر بیابید: $\sigma_{U} = 110 \text{ MPa}$ ، $d_i = d_r = 15 \text{ mm}$ ، $\tau_{U} = 100 \text{ MPa}$ برای مفصل‌های فولادی، و $F.S. = 3.2$.

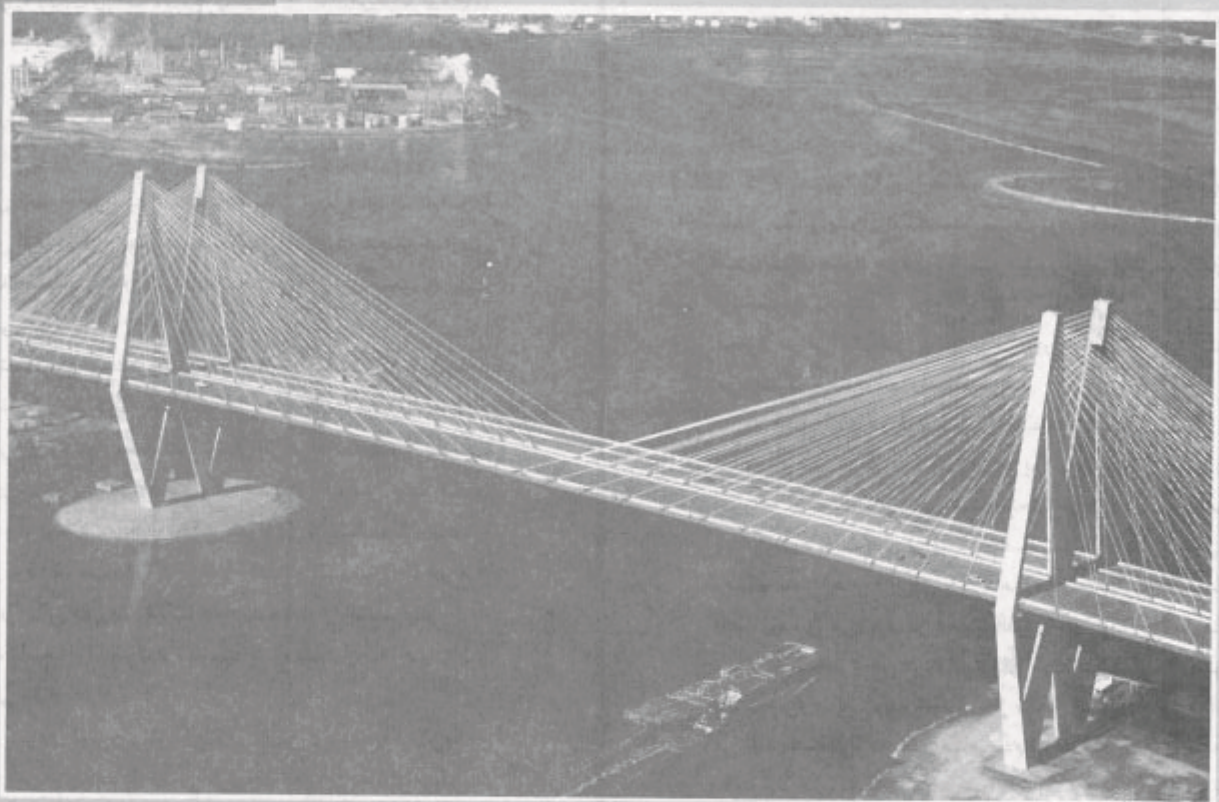


شکل ۱-۶

داریم $\sigma_{U} = 150 \text{ psi}$ و $\tau_{U} = 214 \text{ psi}$. (ج) نشان دهید که تنش برشی در هر یک از این حالت برای $\alpha = 45^\circ$ دارای مقدار ماکزیمم است.

۱-۶ عضو ABC توسط مفصل و براکت A و توسط دو بازو نگه داشته شده است. این دو بازو در B به عضو ABC و در D به یک تکیه‌گاه ثابت لولا شده‌اند. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن بار مجاز P_{all} را برای موارد زیر محاسبه کنید: (۱) برای هر قطر داده شده d_i برای مفصل A ، (۲) برای قطر مشترک d_i مفصل‌های B و D ، (۳) برای تنش قائم نهایی σ_{U} در هر یک از دو بازو، (۴) برای تنش برشی نهایی τ_{U} در هر یک از سه مفصل، (۵) برای ضریب اطمینان کلی دلخواه $F.S.$ ، برنامه باید نشان دهد که کدام یک از سه تنش زیر بحرانی است: تنش قائم در بازوها، تنش برشی در مفصل A ، یا تنش برشی در مفصل‌های B و D . (ب و ج) با استفاده از داده‌های مسائل ۱-۵۳ و ۱-۵۴، و با مقایسه پاسخ‌های به‌دست آمده برای P_{all} با مقادیر به‌دست آمده در تنش، این برنامه را

تنش و کرنش بارگذاری محوری



در این فصل، تغییر شکل های اجزای ساختمانی را که تحت بارگذاری محوری اند بررسی می کنیم. برای طراحی این پل کابلی، واقع در بندر هوستون، تغییر طول مهارهای قطری به دقت در نظر گرفته شده اند.

۱-۲ مقدمه

در فصل ۱، تنش‌های حاصل از بارهای وارد بر عضوها را تحلیل کردیم. همچنین، طراحی عضوها و اتصالات ساده را، به طوری که تحت شرایط خاص بارگذاری گسیخته نشوند، آموختیم. جنبه دیگر تحلیل و طراحی سازه‌ها مربوط می‌شود به تغییرشکل‌هایی که توسط بارهای وارده ایجاد می‌شوند. بدیهی است که باید از تغییرشکل‌های بزرگ جلوگیری شود تا سازه بتواند منظورهای طراحی را برآورده کند. اما، تحلیل تغییرشکل‌ها در تعیین تنش‌ها نیز کمک می‌کند. در حقیقت، همیشه نمی‌توان نیروهای موجود در عضوهای یک سازه را فقط با کاربرد اصول استاتیک تعیین کرد، زیرا در استاتیک فرض می‌شود که سازه‌ها صلب و تغییرشکل ناپذیرند. با در نظر گرفتن سازه‌های مهندسی به عنوان سازه‌های تغییرشکل‌پذیر و با تحلیل تغییرشکل‌های عضوهای مختلف آنها، می‌توان نیروهای نامعین استاتیکی، یعنی نیروهایی را که با استاتیک نمی‌توان تعیین کرد، به دست آورد. همچنین، در قسمت ۱-۵ نشان دادیم که توزیع تنش‌ها در یک عضو از نظر استاتیکی نامعین است، حتی اگر نیرو در آن عضو معلوم باشد. لذا، برای تعیین توزیع واقعی تنش‌ها در یک عضو، باید تغییرشکل‌های آن عضو را تحلیل کرد. در این فصل، تغییرشکل‌های یک عضو سازه‌ای مانند میله، یا ورق را که تحت بارگذاری محوری است بررسی می‌کنیم.

ابتدا، کرنش قائم ϵ در یک عضو را به عنوان تغییرشکل طول واحد عضو تعریف می‌کنیم. با ترسیم تنش σ برحسب کرنش ϵ ، هنگام افزایش بار وارد بر عضو، نمودار تنش-کرنش ماده عضو را به دست می‌آوریم. از این نمودار می‌توان بعضی از خواص مهم ماده، مانند مدول الاستیته، و چکش‌خواری یا شکندگی ماده را تعیین کرد (قسمت‌های ۲-۲ تا ۲-۵). در قسمت ۲-۵ خواهید دید در حالی که رفتار اغلب مواد مستقل از جهت بار وارده است، پاسخ مواد مرکب تقویت شده با تار به جهت بار بستگی دارد.

از نمودار تنش-کرنش می‌توان تعیین کرد که آیا کرنش‌ها در نمونه پس از حذف بار از بین می‌روند - در این حالت می‌گویند ماده به طور الاستیکی رفتار می‌کند - یا اینکه یک تغییرشکل پلاستیکی دائم در آن به وجود می‌آید (به قسمت ۲-۶ نگاه کنید).

در قسمت ۲-۷، پدیده خستگی را بررسی می‌کنیم، که به موجب آن یک عضو پس از تکرار زیاد بارگذاری گسیخته می‌شوند، حتی اگر تنش‌ها در گستره الاستیک باشند.

بخش اول این فصل با قسمت ۲-۸ پایان می‌گیرد، که در آن تغییرشکل انواع مختلف عضوها تحت شرایط گوناگون بارگذاری محوری تعیین می‌شود.

در قسمت‌های ۲-۹ و ۲-۱۰، مسائل نامعین استاتیکی را بررسی می‌کنیم؛ یعنی، مسائلی که در آنها واکنش‌ها و نیروهای داخلی را نمی‌توان صرفاً با استاتیک به دست آورد. معادله‌های تعادل را که از نمودار آزاد یک عضو به دست می‌آیند باید با رابطه‌هایی که شامل تغییرشکل‌ها هستند کامل کرد؛ این رابطه‌ها از هندسه مسئله به دست می‌آیند.

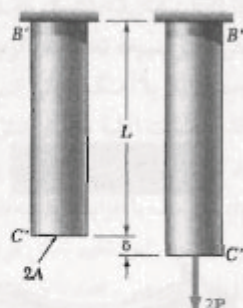
در قسمت‌های ۲-۱۱ تا ۲-۱۵، ثابت‌های اضافی مربوط به مواد ایزوتروپیک - یعنی، موادی که مشخصه‌های مکانیکی آنها مستقل از جهت است - تعریف می‌شوند؛ مانند نسبت پواسون که عوامل زیر را به هم ارتباط می‌دهد: کرنش جانبی و کرنش محوری، مدول کپه‌ای (که تغییر حجم یک ماده را تحت فشار هیدروستاتیکی مشخص می‌کند) و مدول صلابت (که مولفه‌های تنش برشی و کرنش برشی را به هم ارتباط می‌دهد). رابطه‌های تنش-کرنش برای یک ماده ایزوتروپیک تحت بارگذاری چند محوری را نیز استخراج می‌کنیم.

در قسمت ۲-۱۶، رابطه‌های تنش-کرنش را که شامل چند مقدار متمایز مدول الاستیته، نسبت پواسون و مدول صلابت است، برای مواد مرکب تقویت شده با تار تحت بارگذاری چندمحوری به دست می‌آوریم. چون این مواد ایزوتروپیک نیستند، معمولاً خواص مشخصی به نام خواص اورتوتروپیک از خود نشان می‌دهند که مطالعه آنها را ساده می‌کند.

در فصل قبل، دو فرض زیر را در نظر گرفتیم: (۱) تنش در مقاطع عرضی به طور یکنواخت توزیع می‌شود، (۲) مواد به صورت الاستیک باقی می‌مانند. صحت فرض اول در قسمت ۲-۱۷ مورد بحث قرار می‌گیرد. در قسمت ۲-۱۸، تمرکز تنش در نزدیک سوراخ‌های دایره‌ای و گرده‌ها (ماه‌چپه‌ها) در میله‌های تخت بررسی می‌شود. در قسمت‌های ۲-۱۹ و ۲-۲۰، درباره تنش و تغییرشکل در عضوهای ساخته شده از مواد چکش‌خواری بحث می‌شود که از نقطه تسلیم خود فراتر می‌روند. همانطور که بعداً خواهید دید، تغییرشکل‌های پلاستیک دائم و تنش‌های باقی‌مانده از این شرایط بارگذاری ناشی می‌شوند.

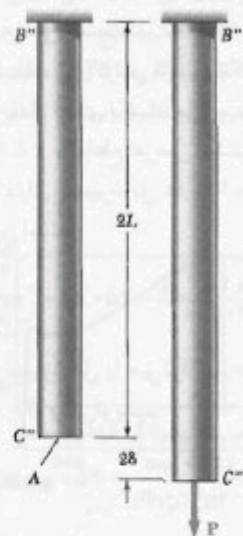
۲-۲ کرنش قائم تحت بارگذاری محوری

میله BC ، به طول L و با مساحت مقطع عرضی یکنواخت A ، را که از نقطه B آویزان شده است در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۱ الف). با اعمال بار P بر انتهای C ، میله افزایش طول می‌دهد (شکل ۲-۱ ب). با ترسیم مقدار P برحسب



شکل ۳-۲

منحنی $\sigma = P/A$ برحسب کرنش $\epsilon = \delta/L$ ، مشخصه خواص ماده را نشان می‌دهد و شکل آن به ابعاد نمونه مورد استفاده بستگی ندارد. این منحنی را نمودار تنش-کرنش می‌گویند و در قسمت ۳-۲ به تفصیل بررسی می‌شود.

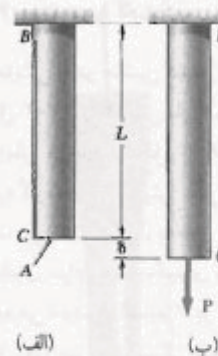


شکل ۴-۲

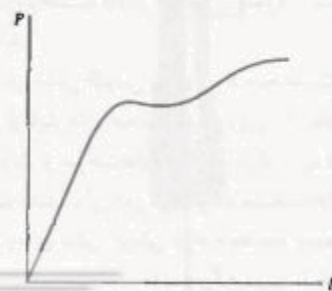
چون میله BC مذکور دارای مساحت مقطع عرضی یکنواخت A است، می‌توان فرض کرد تنش قائم σ در تمام میله دارای مقدار ثابت P/A است. لذا، کرنش به عنوان نسبت تغییر شکل به طول کل میله تعریف شد. ولی، در یک عضو با مساحت مقطع عرضی متغیر، تنش قائم $\sigma = P/A$ در امتداد عضو تغییر می‌کند و کرنش را باید در نقطه معین Q تعریف کرد.

تغییر شکل δ ، نمودار بارگذاری-تغییر شکل را به دست می‌آوریم (شکل ۲-۲). گرچه این نمودار شامل اطلاعات مفیدی برای تحلیل میله تحت بررسی است، ولی از آن نمی‌توان برای پیش‌بینی تغییر شکل یک میله از همان جنس ولی با ابعاد دیگر استفاده کرد. مشاهده می‌شود اگر تغییر شکل δ توسط بار P در میله BC ایجاد شود، بار $2P$ باعث می‌شود همان تغییر شکل در میله $B'C''$ ، به طول L و با مساحت مقطع عرضی $2A$ ، به وجود آید (شکل ۳-۲). در هر دو حالت، مقدار تنش یکسان است و برابر است با $\sigma = P/A$ ، از طرف دیگر، بار P که بر میله $B'C''$ با مساحت مقطع عرضی A و به طول $2L$ ، وارد می‌شود باعث می‌شود تغییر شکل 2δ در این میله به وجود آید (شکل ۴-۲). یعنی، دو برابر تغییر شکلی که در میله BC به وجود می‌آید. اما در هر دو حالت، نسبت تغییر شکل به طول میله دارای مقدار یکسان δ/L است. با توجه به این مطلب، مفهوم کرنش را وارد می‌کنیم: کرنش قائم در میله‌ای که تحت بارگذاری محوری است به عنوان تغییر شکل طول واحد آن میله تعریف می‌شود. اگر کرنش قائم را با ϵ نشان می‌دهیم،

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (۱-۲)$$

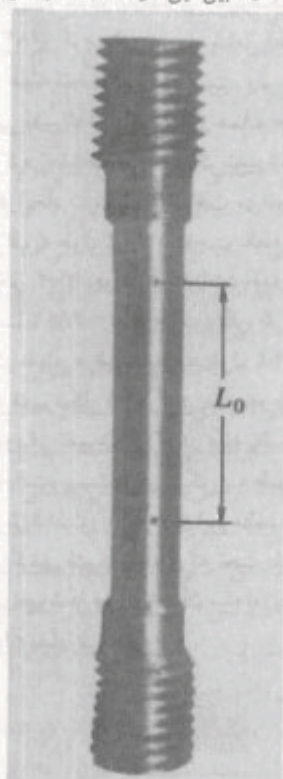


شکل ۱-۲



شکل ۲-۲

در نظر می‌گیرند، فاصله L_0 بین این دو علامت را طول سنجه می‌گویند.



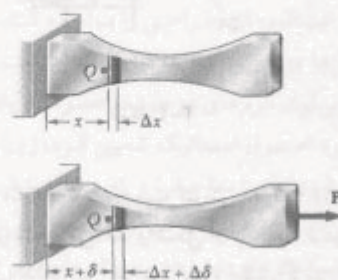
شکل ۲-۶ نمونه نوعی تحت آزمون کشش

سپس، نمونه آزمایشی را در ماشین کشش تحت بار مرکزی P قرار می‌دهند (شکل ۷-۲). با افزایش بار P ، فاصله L بین دو علامت سنجه نیز افزایش می‌یابد (شکل ۸-۲). فاصله L را با سنجه شماره‌دار اندازه گرفته، و افزایش طول $\delta = L - L_0$ را برای هر مقدار P ثبت می‌کنند. اغلب، به‌طور همزمان، از یک سنجه شماره‌دار ثانوی برای اندازه‌گیری و ثبت تغییرات قطر نمونه نیز استفاده می‌شود. از تقسیم P بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه (A_0) می‌توان تنش σ و از تقسیم δ بر فاصله اولیه L_0 می‌توان کرنش ϵ را تعیین کرد. سپس، با ترمیم ϵ (در طول) برحسب σ (در عرض)، نمودار تنش-کرنش به‌دست می‌آید.

نمودارهای تنش-کرنش برای مواد مختلف کاملاً با هم متفاوت‌اند و آزمایش‌های مختلف کشش روی یک ماده خاص، در دماهای متفاوت و سرعت‌های مختلف بارگذاری، ممکن است نتایج مختلف دهند. ولی، می‌توان وجه مشخصه‌های مشترکی را برای نمودارهای تنش-کرنش مواد مختلف تشخیص داد و مواد را بر مبنای این مشخصه‌ها به دو گروه زیر تقسیم‌بندی کرد: مواد چکش‌خوار و مواد شکننده.

برای این منظور، جزء کوچکی را با طول تغییرشکل نداده Δx در نظر می‌گیریم (شکل ۵-۲). اگر تغییرشکل این جزء را تحت بارگذاری داده شده با $\Delta \delta$ نشان دهیم، کرنش قائم در نقطه Q چنین است:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (2-2)$$



شکل ۵-۲

چون تغییرشکل و طول در آحاد یکسان بیان می‌شوند، کرنش قائم ϵ ، که حاصل تقسیم δ بر L (یا $d\delta$ بر dx) است، یک کمیت بی‌بعد است. لذا، برای کرنش قائم در یک عضو در هر دو آحاد SI و U.S. به مقدار عددی یکسان می‌رسیم. مثلاً، میله‌ای با طول $L = 0.600 \text{ m}$ و با مقطع عرضی یکنواخت را در نظر بگیرید. این میله دارای تغییرشکل $\delta = 150 \times 10^{-6} \text{ m}$ است. کرنش متناظر چنین است

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6} \text{ m}}{0.600 \text{ m}} = 250 \times 10^{-6} \text{ m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

توجه کنید که تغییرشکل را می‌توان برحسب میکرومتر بیان کرد. $\delta = 150 \mu\text{m}$ و می‌نویسیم:

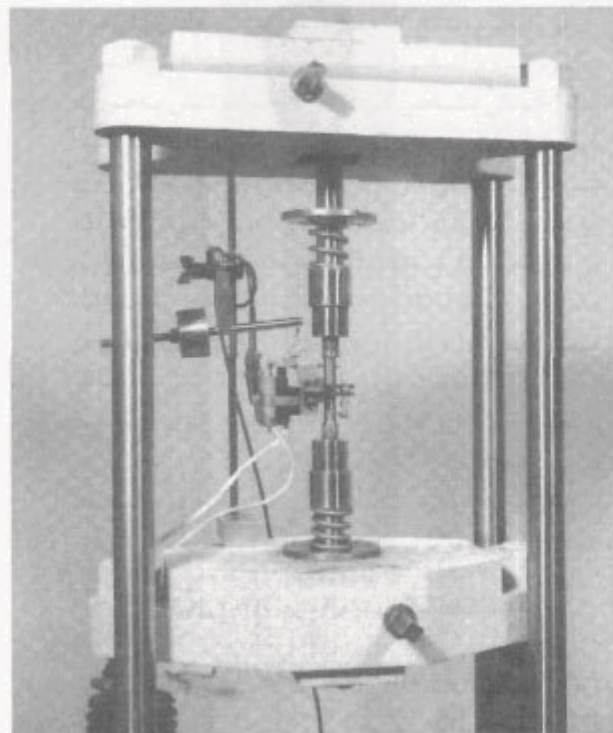
$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \mu\text{m}}{0.600 \text{ m}} = 250 \mu\text{m/m} = 250 \mu$$

(μ تلفظ می‌شود "میکرو").

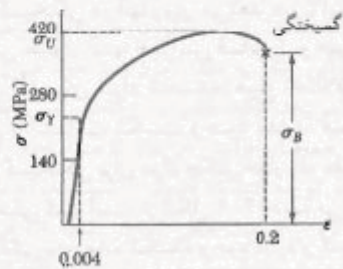
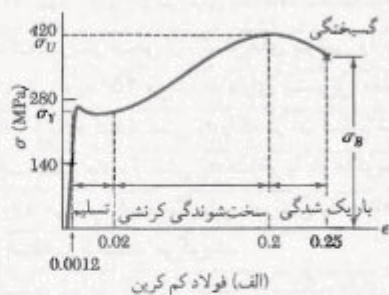
۳-۲ نمودار تنش-کرنش

در قسمت ۲-۲ دیدیم که نمودار تنش-کرنش، یکی از مشخصه‌های مهم مواد است. برای تعیین نمودار تنش-کرنش یک ماده، معمولاً نمونه‌ای از آن را تحت آزمایش کشش قرار می‌دهند. در شکل ۶-۲، یکی از این نمونه‌ها نشان داده شده است. مساحت مقطع عرضی قسمت استوانه‌ای مرکزی نمونه را به‌دقت تعیین کرده و دو علامت ثانوی این قسمت

مواد چکش خوار، شامل فولاد ساختمانی و بسیاری از آلیاژهای فلزی، با قابلیت شان برای تسلیم در دماهای معمولی مشخص می‌شوند. وقتی نمونه تحت بار افزایشی قرار می‌گیرد، ابتدا طول آن برحسب بار با آهنگ خیلی کم به طور خطی افزایش می‌یابد. لذا، قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش یک خط راست با شیب تند است (شکل ۲-۹). ولی، پس از اینکه نمونه به تنش بحرانی σ_y می‌رسد، با افزایش بار به مقدار کم دستخوش تغییر شکل بزرگی می‌شود. این تغییر شکل بر اثر لغزش ماده در امتداد سطوح مایل است؛ یعنی، عمدتاً از تنش‌های برشی ناشی می‌شود. همانطور که از نمودارهای تنش-کرنش دو ماده چکش خوار نوعی (شکل ۲-۹) می‌توان دید، افزایش طول نمونه پس از شروع تسلیم ممکن است ۲۰۰ برابر تغییر شکل آن قبل از تسلیم باشد. پس از اینکه بار به مقدار ماکزیمم معینی می‌رسد، قطر قسمتی از نمونه شروع به کاهش می‌کند که ناشی از ناپایداری محلی است (شکل ۲-۱۰ الف). این پدیده را باریک‌شدگی می‌گویند. پس از شروع باریک‌شدگی، بارهای کمتری برای افزایش بیشتر نمونه مورد نیازند، تا سرانجام گسیختگی نهایی روی می‌دهد (شکل ۲-۱۰ ب). توجه داریم که گسیختگی در امتداد یک سطح مخروطی روی می‌دهد که با سطح اولیه نمونه تقریباً زاویه 45° می‌سازد. این نشان می‌دهد که شکست مواد چکش خوار اساساً ناشی از برش است و

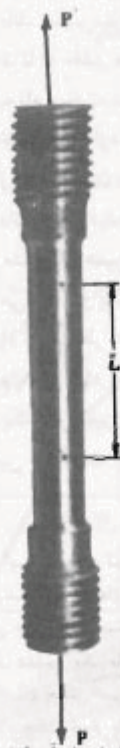


شکل ۲-۷ از این ماشین برای آزمایش نمونه‌های کششی، مانند آنچه که در این فصل نشان داده شدند، استفاده می‌شود.



(ب) آلیاژ آلومینیوم

شکل ۲-۹ نمودارهای تنش-کرنش دو ماده چکش خوار نوعی



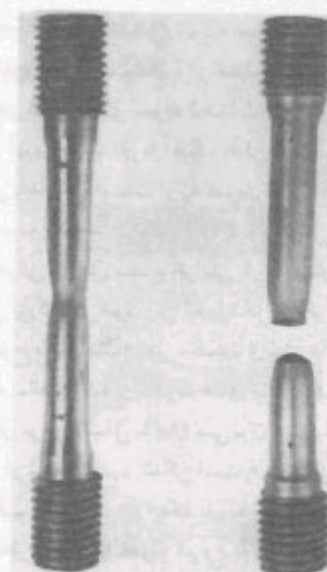
شکل ۲-۸ نمونه آزمایشی یا بار کششی.



شکل ۱۲-۲ نمونه آزمایش یک ماده شکسته.

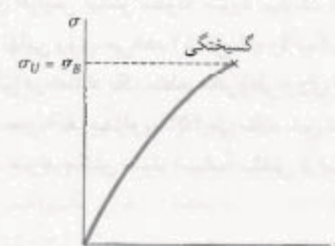
نمودارهای تنش-کرنش شکل ۹-۲ نشان می‌دهند که فولاد و آلومینیوم ساختمانی، که هر دو چکش‌خوارند، دارای مشخصه‌های تسلیم متفاوت‌اند. در فولاد ساختمانی (شکل ۹-۲ الف)، پس از شروع تسلیم، تنش در گستره بزرگی از مقادیر کرنش ثابت می‌ماند. سپس، برای حفظ افزایش طول نمونه باید تنش افزایش یابد تا به مقدار ماکزیمم σ_U برسد. این ناشی از خاصیتی از ماده به نام سخت شوندگی کرنشی است. استقامت تسلیم فولاد ساختمانی در آزمون کششی را با رؤیت بلری که روی ماشین آزمون نشان داده می‌شود می‌توان تعیین کرد. پس از افزایش دائمی بار، دیده می‌شود که بار ناگهان کمی کاهش یافته و برای مدتی در همین مقدار می‌ماند؛ ولی، افزایش طول نمونه ادامه می‌یابد. در یک آزمایش بسیار دقیق، می‌توان نقطه تسلیم بالایی را (که متناظر است با بار درست قبل از شروع تسلیم) از نقطه تسلیم پایینی (که متناظر است با بار مورد نیاز برای حفظ تسلیم) از یکدیگر تمیز داد. چون نقطه تسلیم بالایی گذراست، برای تعیین استقامت نهایی ماده باید از نقطه تسلیم پایینی استفاده کرد.

* آزمایش‌های کشش که در این قسمت توصیف شدند در دماهای معمولی در نظر گرفته می‌شوند. ولی، ماده‌ای که در دماهای معمولی چکش‌خوار است در دماهای خیلی پایین ممکن است مشخصه‌های یک ماده شکننده را از خود نشان دهد، و یک ماده شکننده معمولی ممکن است، در دماهای خیلی زیاد چکش‌خوار شود. لذا، در دماهای غیر معمولی، باید به جای «از» چکش‌خوار یا شکننده از واژه در حالت چکش‌خواری یا در حالت شکنندگی صحبت کرد.



(الف) (ب)

شکل ۱۰-۲ نمونه آزمایش یک ماده چکش‌خوار.



شکل ۱۱-۲ نمودار تنش-کرنش برای یک ماده شکننده نوعی.

نشان می‌دهد که، دربار محوری، تنش‌های برشی وارد بر سطوحی که با بار زاویه 45° می‌سازند دارای بیشترین مقدارند (به قسمت ۱۱-۱ نگاه کنید). تنش σ_p را که در آن تسلیم شروع می‌شود استقامت تسلیم ماده، و تنش σ_U متناظر با بار ماکزیمم را که بر نمونه وارد می‌شود استقامت نهایی، و تنش σ_B متناظر با گسیختگی را استقامت شکست می‌گویند.

مواد شکننده، شامل چدن، شیشه و سنگ، دارای این مشخصه‌اند که گسیختگی در آنها روی می‌دهد بدون اینکه قبلاً آهنگ افزایش طول آنها افزایش قابل توجهی دهد (شکل ۱۱-۲). لذا، برای مواد شکننده، هیچ اختلافی بین استقامت نهایی و استقامت شکست وجود ندارد. همچنین، کرنش در زمان گسیختگی برای مواد چکش‌خوار، در مقایسه با مواد شکننده، خیلی کمتر است. از شکل ۱۲-۲ دیده می‌شود که حالت پاریک‌شدگی برای ماده شکننده وجود ندارد و گسیختگی در امتداد سطح عمود بر بار روی می‌دهد. یعنی، تنش‌های قائم عامل اصلی شکست مواد شکننده‌اند.

RES

برای فولادهای معمولی با استقامت تسلیم تا ۵۰ ksi برابر با ۲۱٪ است. یعنی، مینیمم کرنش متوسط هنگام گسیختگی باید ۰/۲۱ mm/mm باشد.

یکی دیگر از معیارهای چکش خواری، درصد کاهش مساحت است، با تعریف زیر

$$\text{درصد کاهش مساحت} = 100 \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

که در آن A_0 و A_B ، به ترتیب، مساحت مقطع عرضی نمونه و مینیمم مساحت مقطع عرضی آن هنگام گسیختگی است. برای فولاد ساختمانی، درصد کاهش مساحت معمولاً ۶۰ تا ۷۰ درصد است.

تا به حال، فقط درباره آزمایش‌های کشش بحث کرده‌ایم. اگر نمونه‌ای از یک ماده چکش خوار تحت فشار قرار گیرد، منحنی تنش-کرنش حاصل اساساً از لحاظ قسمت خطی اولیه و شروع قسمت متناظر با تسلیم و سخت‌شوندگی کرنشی مانند منحنی تنش-کرنش در آزمایش کشش است. گفتنی است که برای یک فولاد معین، استقامت تسلیم در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. برای مقادیر بزرگتر کرنش، منحنی‌های تنش-کرنش در کشش و فشار از هم فاصله می‌گیرند. باید توجه داشت که باریک‌شدگی در آزمایش فشار روی نمی‌دهد. در اغلب مواد شکننده، دیده می‌شود که استقامت نهایی در فشار خیلی بیشتر از استقامت نهایی آن در کشش است و این ناشی از وجود نقص‌ها، مانند ترک‌ها یا حفره‌های میکروسکوپی است که باعث تضعیف ماده در کشش می‌شوند، ولی بر مقاومت آن در مقابل گسیختگی فشاری تأثیر قابل توجهی ندارند.

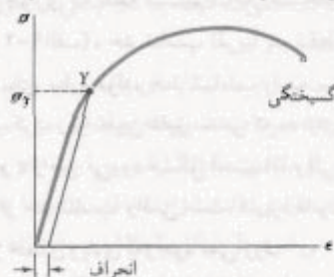
بنی، یک نمونه از ماده شکننده با خواص مختلف در کشش و فشار است و نمودار تنش-کرنش آن در شکل ۱۴-۲ نشان داده شده است. در سمت کششی نمودار، ابتدا یک ناحیه الاستیک خطی را می‌بینیم که در آن کرنش با تنش متناسب است. پس از نقطه تسلیم، کرنش سریع‌تر از تنش افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. ماده در فشار رفتار متفاوتی دارد. اول اینکه، ناحیه الاستیک خطی به طور قابل توجه وسیع‌تر است. دوم، وقتی تنش به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد، گسیختگی روی نمی‌دهد بلکه مقدار تنش کاهش می‌یابد، در حالی که کرنش همچنان افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. توجه کنید که مدول الاستیسیته، که با شیب منحنی تنش-کرنش قسمت خطی نمودار نشان داده می‌شود، در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. این موضوع برای اغلب مواد شکننده صحت دارد.

در آلومینیم (شکل ۹-۲ ب) و بسیاری از مواد چکش خوار دیگر، شروع تسلیم را نمی‌توان با قسمت افقی منحنی تنش-کرنش مشخص کرد. در این مواد، تنش به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد تا اینکه به استقامت نهایی می‌رسد. سپس، باریک‌شدگی شروع می‌شود و سرانجام گسیختگی روی می‌دهد. در این مواد، استقامت نهایی σ_y را با روش انحراف می‌توان تعریف کرد. مثلاً، با توسیع یک خط از نقطه‌ای روی محور افقی به طول $\epsilon = 0.002$ (یا $\epsilon = 0.2\%$) به موازات قسمت خطی اولیه نمودار تنش-کرنش، استقامت نهایی در انحراف ۰/۲ به دست می‌آید (شکل ۱۳-۲). تنش σ_y متناظر با نقطه Y که به این طریق به دست می‌آید به عنوان استقامت نهایی در انحراف ۰/۲ تعریف می‌شود.

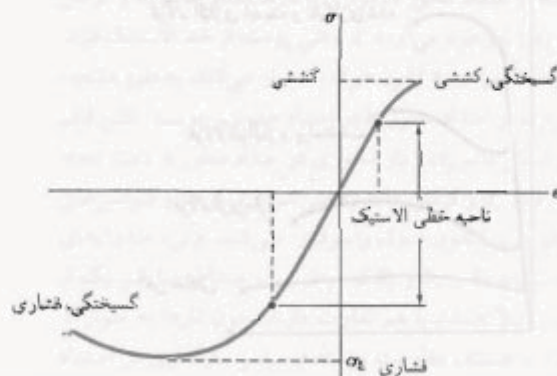
یکی از معیارهای استاندارد برای چکش خواری یک ماده، درصد افزایش طول آن است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{درصد افزایش طول} = 100 \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

که در آن L_0 و L_B ، به ترتیب، طول اولیه نمونه تحت کشش و طول نهایی آن هنگام گسیختگی است. مینیمم افزایش طولی که برای طول سنج ۵۰ mm در نظر می‌گیرند



شکل ۱۳-۲ تعیین استقامت تسلیم با روش انحراف.



شکل ۱۴-۲ نمودار تنش-کرنش برای بتن.

۲-۵ قانون هوک؛ مدول الاستیسیته

اغلب سازه‌های مهندسی که برای تغییر شکل‌های نسبتاً کوچک طراحی می‌شوند، فقط شامل قسمت خطی نمودار تنش-کرنش هستند. برای آن قسمت اولیه نمودار (شکل ۲-۹)، تنش σ با کرنش ϵ به طور مستقیم متناسب است و می‌توان نوشت:

$$\sigma = E \epsilon \quad (۲-۴)$$

این رابطه را، به افتخار ریاضی‌دان انگلیسی رابرت هوک (۱۷۰۳ - ۱۶۳۵)، قانون هوک می‌گویند. ضریب E را، به افتخار دانشمند انگلیسی توماس یانگ (۱۸۲۹ - ۱۷۷۳)، مدول الاستیسیته یا مدول یانگ ماده می‌گویند. چون ϵ یک کمیت بی‌بعد است، E با آحاد σ بیان می‌شود؛ در SI، E بر حسب پاسکال یا یکی از مضرب‌های آن است.

بیشترین مقدار تنشی که به ازای آن می‌توان قانون هوک را برای ماده‌ای به کار برد حد تناسب آن ماده می‌گویند. در مواد چکش‌خواری که نقطه تسلیم کاملاً مشخصی دارند (مانند شکل ۲-۱۹ الف)، حد تناسب تقریباً بر نقطه تسلیم منطبق است. برای سایر مواد، حد تناسب را به سهولت نمی‌توان تعریف کرد، زیرا تعیین دقیق تنشی که به ازای آن رابطه خطی بین σ و ϵ از بین می‌رود مشکل است. اما وقتی مقدار تنش کمی بیشتر از حد تناسب واقعی است، کاربرد قانون هوک برای مواد مذکور خطای زیادی به رجوع نمی‌آورد.



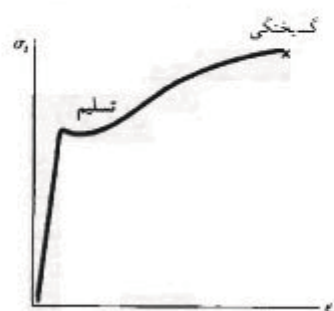
شکل ۲-۱۶ نمودارهای تنش-کرنش برای آهن و فولاد در درجات مختلف فولاد.

۲-۴ تنش حقیقی و کرنش حقیقی

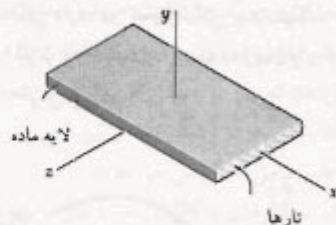
به خاطر داریم که تنش رسم شده در نمودارهای ۲-۹ و ۲-۱۱ از تقسیم بار P بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه، A_0 ، به دست آمد. چون مساحت مقطع عرضی نمونه با افزایش P کاهش می‌یابد، تنش در این نمودارها تنش حقیقی در نمونه نیست. در مواد چکش‌خوار، پس از شروع تسلیم، بین تنش مهندسی محاسباتی $\sigma = P/A_0$ و تنش حقیقی $\sigma_t = P/A_t$ که از تقسیم P بر مساحت مقطع عرضی نمونه تغییر شکل داده به دست می‌آید، اختلاف وجود دارد. تنش مهندسی σ ، که با بار P متناسب است، در حالت باریک‌شدگی با افزایش P کاهش می‌یابد؛ ولی، تنش حقیقی σ_t ، که با P تناسب مستقیم و با A_t تناسب معکوس دارد، همچنان افزایش می‌یابد تا نمونه گسیخته می‌شود. اغلب به جای رابطه $\sigma = \delta/L_0$ که آن را کرنش مهندسی می‌گویند، از کرنش حقیقی ϵ_t با تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$\epsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (۲-۳)$$

نموداری که با ترسیم تنش حقیقی بر حسب کرنش حقیقی به دست می‌آید (شکل ۲-۱۵)، رفتار ماده را دقیق‌تر توضیح می‌دهد. همانطور که قبلاً دیدیم، تنش حقیقی در حالت باریک‌شدگی کاهش نمی‌یابد. همچنین، با استفاده از تنش حقیقی و کرنش حقیقی، نتایج حاصل از آزمایش‌های کشش و فشار اساساً نمودار یکسان را می‌دهند؛ ولی، با ترسیم تنش مهندسی بر حسب کرنش مهندسی، برای مقادیر بزرگ کرنش چنین نیست. البته، مهندسان که مسئولیت آنها بررسی این موضوع است که آیا بار P باعث ایجاد یک تنش و تغییر شکل قابل قبول در عضو می‌شود یا نه، از نمودار مبنی بر تنش مهندسی $\sigma = P/A_0$ و کرنش مهندسی $\epsilon = \delta/L_0$ استفاده می‌کنند، زیرا این عبارات شامل مساحت مقطع عرضی A_0 و طول اولیه L_0 است و اینها داده‌های قابل دسترسی هستند.



شکل ۲-۱۵ تنش حقیقی بر حسب کرنش حقیقی برای یک ماده چکش‌خوار نوعی.



شکل ۱۷-۲ پوسته ماده مرکب تقویت شده با تار.

با ترکیب تعدادی پوسته، یک ورقه به دست می‌آید. اگر ورقه فقط تحت بار محوری کششی قرار گیرد، تارها در تمام پوسته‌ها باید دارای همان وضعیت بار باشند تا بیشترین استقامت ممکن حاصل شود. اما اگر ورقه تحت فشار قرار گیرد، ماده ماتریس ممکن است آنقدر محکم باشد که از کمانش تارها جلوگیری کند. در این حالت، پایداری جانبی ورقه را با استقرار بعضی از پوسته‌ها به طوری که تارهای آنها بر بار عمود باشند می‌توان افزایش داد. استقرار بعضی از پوسته‌ها به گونه‌ای که تارهای آنها تحت زاویه 30° ، 45° یا 60° نسبت به بار باشد نیز می‌تواند مقاومت ورقه را در برابر برش صفحه‌ای افزایش دهد. در قسمت ۱۶-۲، مواد مرکب تقویت شده با تار و رفتار آنها تحت بارگذاری‌های چند محوری بررسی می‌شود.

۶-۲ مقایسه رفتار الاستیک و پلاستیک ماده

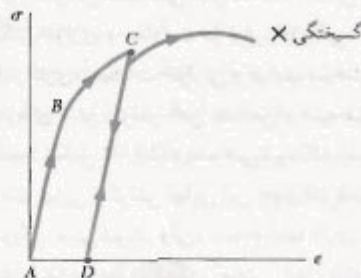
اگر کرنش‌هایی که با اعمال بار معینی در یک نمونه آزمایشی به وجود می‌آیند هنگام حذف بار از بین بروند، می‌گویند ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند. بیشترین مقدار تنش که به ازای آن ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند حد الاستیک آن ماده نام دارد.

اگر ماده دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخصی باشد (شکل ۹-۲ الف)، حد الاستیک، حد تناسب (قسمت ۵-۲) و نقطه تسلیم آن اساساً با هم برابرند. به عبارت دیگر، تا وقتی تنش کمتر از نقطه تسلیم است، ماده به صورت الاستیک و خطی رفتار می‌کند. در حالت تسلیم (قسمت ۳-۳)، با حذف بار، تنش و کرنش در امتداد خط CD ، که به موازات قسمت خطی AB منحنی بارگذاری است (شکل ۱۸-۲)، به صورت خطی کاهش می‌یابد. این موضوع که ϵ پس از حذف بار به صفر برمی‌گردد نشان می‌دهد که تغییر شکل پلاستیک (دائمی) روی داده است. در اغلب مواد، تغییر شکل پلاستیک نه فقط به

بعضی از خواص فیزیکی فلزات ساختمانی، مانند استقامت، چکش‌خواری و مقاومت در برابر خوردگی، بستگی شدیدی به آلیاژ کاری، عملیات حرارتی و فرایند ساخت دارند. مثلاً، از نمودارهای تنش-کرنش آهن خالص و سه فولاد با درجات مختلف (شکل ۱۶-۲) دیده می‌شود که استقامت تسلیم، استقامت نهایی و کرنش نهایی این چهار فلز دستخوش تغییرات بزرگی می‌شوند. ولی، تمام آنها دارای مدول الاستیسته یکسانند؛ به عبارت دیگر، "سفتی" آنها (مقاومت در برابر تغییر شکل در ناحیه خطی) یکسان است. بنابراین، اگر فولاد پراستقامتی را در یک سازه جایگزین فولاد با استقامت کمتر کنیم و هیچ یک از ابعاد را تغییر ندهیم، سازه دارای ظرفیت بارپذیری بیشتری خواهد شد، اما سفتی آن تغییر نمی‌کند.

برای هر یک از موادی که تا به حال بررسی شده‌اند، رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم، $\sigma = E\epsilon$ ، مستقل از امتداد بارگذاری بود زیرا خواص مکانیکی، از قبیل الاستیسته E ، مستقل از امتداد تحت بررسی بود. این مواد را همسانگرد و موادی را که خواص آنها به امتداد بستگی دارد ناهمسانگرد می‌گویند. مواد مرکب تقویت شده با تار یکی از مواد مهم ناهمسانگرد هستند.

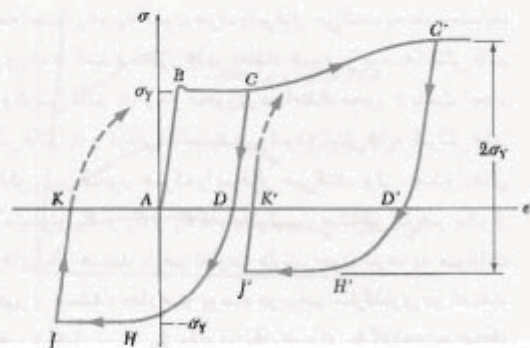
این مواد مرکب با قرار دادن تارهای یک ماده سفت و با استقامت در یک ماده نرم ضعیف‌تر، که به آن ماتریس می‌گویند، ساخته می‌شوند. از موادی مانند گرافیت، شیشه و پلیمرها به عنوان تار، و از موادی مانند انواع مختلف رزین‌ها به عنوان ماتریس استفاده می‌شود. در شکل ۱۷-۲، پوسته ماده مرکبی نشان داده شده است؛ این ماده از تعداد زیادی تارهای موازی که در ماتریسی قرار دارند تشکیل شده است. بار محوری وارد بر پوسته در امتداد محور x (موازی با تارها) تنش قائم σ_x و کرنش قائم ϵ_x را به وجود می‌آورد. تا وقتی پوسته از حد الاستیک فراتر نرفته است، σ_x و ϵ_x قانون هوک را برقرار می‌کنند. به طور مشابه، بار وارده در امتداد محور y (در امتداد عمود بر پوسته) تنش قائم σ_y و کرنش قائم ϵ_y ، و بار محوری در امتداد محور z باعث ایجاد تنش قائم σ_z و کرنش قائم ϵ_z می‌شود؛ تنش‌ها و کرنش‌های مذکور نیز قانون هوک را برقرار می‌کنند. ولی، مدول‌های الاستیسته E_x و E_y و E_z که، به ترتیب، متناظر با هر یک از بارهای بالا هستند با هم تفاوت دارند. چون تارها به موازات محور x هستند، مقاومت پوسته در برابر بارگذاری در امتداد محور x خیلی بیشتر از مقاومت آن در برابر بارگذاری در امتداد محورهای y و z است، و E_x از E_y یا E_z خیلی بزرگتر است.



شکل ۱۹-۲

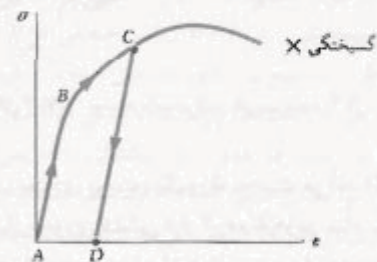
فرض می‌کنیم ماده از نوع فولاد متوسط است که استقامت تسلیم آن در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. بار اولیه کششی است و تا نقطه C در نمودار تنش-کرنش اعمال می‌شود (شکل ۲-۲۰). پس از باربرداری (نقطه D)، یک بار فشاری اعمال می‌شود و ماده را به نقطه H می‌رساند. در این نقطه، تنش برابر است با σ_y . دیده می‌شود که قسمت DH نمودار تنش-کرنش خمیده است و نقطه تسلیم کاملاً مشخصی ندارد. این را اثر باثینگر می‌گویند. با حفظ بار فشاری، ماده در امتداد خط HJ تسلیم می‌شود.

اگر بار پس از نقطه I حذف شود، تنش در امتداد خط JK به صفر برمی‌گردد، و توجه داریم که شیب JK با مدول الاستیسته E برابر است. تغییر شکل پلاستیک حاصل، یعنی AK ، برحسب طول پاره‌خط‌های BC و HJ می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. با اعمال مجدد بار کششی، قسمتی از نمودار تنش-کرنش که از K شروع می‌شود (قسمت خط‌چین) به طرف بالا و سمت راست خمیده می‌شود تا سرانجام، تنش به مقدار تسلیم σ_y می‌رسد.



شکل ۲۰-۲

ماکزیمم مقدار تنش، بلکه به مدت اعمال این تنش قبل از حذف بار نیز بستگی دارد. در تغییر شکل پلاستیک، قسمت وابسته به تنش را لغزش، و قسمت وابسته به زمان را -که به دما نیز بستگی دارد- خزش می‌گویند.



شکل ۱۸-۲

وقتی ماده‌ای دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخصی نیست، حد الاستیک را نمی‌توان با دقت تعیین کرد. ولی، این فرض که حد الاستیک با استقامت تسلیم برابر است (روش انحراف در قسمت ۲-۳)، فقط خطای کمی را وارد می‌کند. در حقیقت، از شکل ۲-۱۳ دیده می‌شود خط مستقیم که برای تعیین نقطه Y به کار می‌رود منحنی بار برداری را پس از اینکه تنش به مقدار ماکزیمم σ_y می‌رسد نیز نشان می‌دهد. وقتی ماده به صورت الاستیک رفتار نمی‌کند، کرنش پلاستیک حاصل به همان کوچکی انحراف انتخابی است.

اگر نمونه، پس از بارگذاری و بار برداری (شکل ۲-۱۹)، مجدداً بارگذاری شود، منحنی بارگذاری جدید تقریباً از همان منحنی بار برداری اولیه پیروی می‌کند تا اینکه تقریباً به نقطه C می‌رسد؛ سپس، به سمت راست خمیده می‌شود و به قسمت خمیده نمودار تنش-کرنش اولیه متصل می‌شود. توجه داریم که قسمت خط مستقیم منحنی بارگذاری جدید از قسمت متناظر منحنی اولیه طولانی‌تر است. لذا، بر اثر سخت‌شوندگی کرنشی که در بارگذاری اولیه نمونه روی می‌دهد، حد تناسب و حد الاستیک افزایش می‌یابند. ولی، چون نقطه گسیختگی بی‌تغییر می‌ماند، چکش‌خواری نمونه، که اکنون باید از نقطه D اندازه‌گیری شود، کاهش می‌یابد.

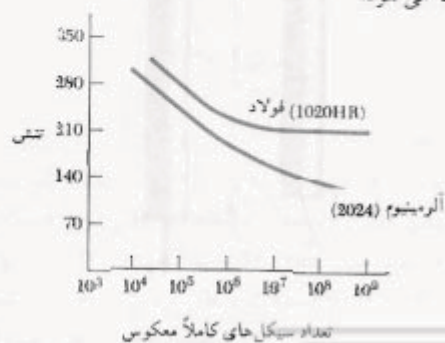
در این بحث، فرض شد که نمونه در هر دو حالت در جهت یکسان بارگذاری شده است. حال، می‌خواهیم حالتی را بررسی می‌کنیم که یک بار ثانوی در جهت مخالف با بار اولیه وارد شود.

بعضی بارگذاری‌ها دارای ماهیت نوسانی‌اند. مثلاً، عبور اتومبیل‌ها از روی یک پل باعث می‌شود تنش‌های حاصل حول مقدار تنش ناشی از وزن پل نوسان کنند. حالت شدیدتر وقتی روی می‌دهد که بار در سیکل بارگذاری به طور کامل معکوس شود. مثلاً، تنش‌ها در اکسل یک واگن قطار پس از هر نیم دور از چرخ به طور کامل معکوس می‌شوند.

تعداد سیکل‌های بارگذاری مورد نیاز برای ایجاد خستگی در یک نمونه از طریق بارگذاری‌های تک‌مرحله‌ای متوالی و بارگذاری‌های معکوس را می‌توان برای هر مقدار ماکزیمم تنش به طور آزمایشی تعیین کرد. با انجام مجموعه‌ای از این آزمایش‌ها، با استفاده از مقادیر مختلف ماکزیمم تنش، داده‌های حاصل را به صورت منحنی $\sigma-N$ می‌توان رسم کرد. در هر آزمایش، ماکزیمم تنش σ در عرض و تعداد سیکل‌ها، N ، در طول رسم می‌شود؛ چون تعداد زیادی سیکل برای گسیختگی نیاز است، N در مقیاس لگاریتمی رسم می‌شود.

در شکل ۲-۲۱، یک منحنی نوعی $\sigma-N$ برای فولاد نشان داده شده است. توجه داریم که اگر تنش ماکزیمم وارده زیاد باشد، تعداد نسبتاً اندکی سیکل باعث گسیختگی می‌شود. با کاهش مقدار تنش ماکزیمم، تعداد سیکل‌های لازم برای گسیختگی افزایش می‌یابد تا اینکه تنش به حد دوام می‌رسد. حد دوام، تنشی است که به ازای آن خستگی روی نمی‌دهد، حتی اگر تعداد سیکل‌های بارگذاری نامحدود باشد. حد دوام برای یک فولاد کم کربن، مانند فولاد ساختمانی، تقریباً نصف استقامت نهایی فولاد است.

برای فلزات غیر آهنی، مانند آلومینیم و مس، منحنی نوعی $\sigma-N$ (شکل ۲-۲۲) نشان می‌دهد که با افزایش تعداد سیکل‌های بارگذاری، تنش در خستگی دائماً کاهش می‌یابد. در این فلزات، حد خستگی به عنوان تنش متناظر با خستگی حاصل پس از تعداد معینی سیکل بارگذاری، مثلاً ۵۰۰ میلیون سیکل، تعریف می‌شود.



شکل ۲-۲۱

اگر بارگذاری اولیه آنقدر بزرگ باشد که باعث سخت‌شوندگی کرنشی ماده شود (نقطه C)، باربرداری در امتداد خط $C'D'$ روی می‌دهد. با اعمال بار معکوس، تنش از نوع فشاری می‌شود، در نقطه H' به مقدار ماکزیمم می‌رسد و تا تسلیم ماده در امتداد خط $H'J'$ ثابت می‌ماند. توجه داریم که مقدار ماکزیمم تنش فشاری کمتر از σ_y است، و تغییر کلی تنش بین C' و H' هنوز با $2\sigma_y$ برابر است.

اگر نقطه K یا K' بر مبدأ A منطبق باشد، تغییر شکل دائمی برابر با صفر است و نمونه ممکن است به حالت اولیه‌اش برگردد. ولی، تغییرات داخلی روی خواهند داد و در صورتی که همان سیکل بارگذاری تکرار شود، نمونه پس از چند تکرار گسیخته می‌شود بدون اینکه قبلاً علامتی از خود نشان دهد. این موضوع نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های پلاستیک اضافی نمونه باعث می‌شود مشخصه‌های ماده به شدت تغییر کنند. بنابراین، در ناحیه پلاستیک به ندرت می‌توان بارگذاری معکوس را به کار برد و فقط در شرایط دقیقاً کنترل شده، مانند اصلاح مواد آسیب دیده یا تنظیم سازه یا ماشین، از آن استفاده می‌شود.

۲-۷ بارگذاری‌های تکراری؛ خستگی

در قسمت‌های قبل، رفتار یک نمونه آزمایشی را تحت بارگذاری محوری بررسی کردیم. توجه داریم که اگر ماکزیمم تنش در نمونه از حد الاستیک ماده فراتر نرود، نمونه پس از حذف بار به حالت اولیه‌اش برمی‌گردد. می‌توان نتیجه گرفت که یک بارگذاری معین را می‌توان به دفعات تکرار کرد، به شرطی که تنش‌ها در ناحیه الاستیک باشند. این نتیجه‌گیری برای بارگذاری‌هایی که حتی صدها مرتبه تکرار می‌شوند صحت دارد. ولی، همانطور که بعداً خواهید دید برای بارگذاری‌هایی که هزاران یا میلیون‌ها مرتبه تکرار می‌شوند صحت ندارد. در چنین مواردی، تحت تنشی که خیلی کمتر از استقامت شکست استاتیکی است، گسیختگی روی می‌دهد؛ این پدیده را خستگی می‌گویند. گسیختگی ناشی از خستگی، حتی برای موادی که در حالت عادی چکش‌خوارند، دارای ماهیت شکنندگی است.

در طراحی تمام اجزای ساختمانی و ماشین‌آلات که تحت بارهای تکراری یا نوسانی قرار دارند باید خستگی را در نظر گرفت. تعداد سیکل‌های بارگذاری که در طی عمر مفید یک جزء می‌توان پیش‌بینی کرد خیلی تغییر می‌کند. مثلاً، تیری که یک جرقه‌بیل صنعتی را نگه می‌دارد ممکن است دو میلیون مرتبه در ۲۵ سال بارگذاری شود (تقریباً ۳۰۰ بارگذاری در یک روز کاری). میل‌لنگ اتومبیلی که ۲۰۰۰۰۰ مایل کار می‌کند تقریباً نیم میلیارد مرتبه بارگذاری می‌شود. تیغه یک توربین در عمر خود ممکن است صدها میلیارد مرتبه بارگذاری می‌شود.

با جایگذاری ϵ از (۵-۲) در (۶-۲):

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (۷-۲)$$

از معادله (۷-۲) وقتی می‌توان استفاده کرد که میله همگن (دارای E) باشد، مساحت A مقطع عرضی آن یکنواخت باشد و از دو سر بارگذاری شده باشد. اگر میله در نقاط دیگری بارگذاری شده باشد یا از چند قسمت با مقطع عرضی متفاوت و از مواد مختلف ساخته شده باشد، باید آن را به اجزای مختلفی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز را برای کاربرد فرمول (۷-۲) برقرار کند. اگر P_i, L_i, A_i, E_i به ترتیب، نیروی داخلی، طول، مساحت مقطع عرضی و مدول الاستیسیته جزء i باشند، تغییر شکل کلی میله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (۸-۲)$$

طبق قسمت ۲-۲، کرنش ϵ در میله‌ای با مقطع عرضی متغیر (شکل ۵-۲) به وضعیت نقطه Q (که ϵ در آنجا محاسبه می‌شود) بستگی دارد و به صورت $\epsilon = d\delta/dx$ تعریف می‌شود. با حل $d\delta$ و با جایگذاری ϵ از معادله (۵-۲)، تغییر شکل یک جزء با طول dx چنین است:

$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE}$$

با انتگرال‌گیری از عبارت بالا در طول میله، تغییر شکل کلی میله به دست می‌آید:

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE} \quad (۹-۲)$$

وقتی مساحت مقطع عرضی A تابعی از x است یا نیروی داخلی P به x بستگی دارد (مانند میله آویزانی که تحت وزن خود قرار دارد)، باید به جای فرمول (۷-۲) از فرمول (۹-۲) استفاده کرد.

مثال ۱-۳

تغییر شکل میله فولادی نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ الف را تحت بارهای داده شده بیابید. ($E = 200 \text{ GPa}$).

آزمایش بر روی نمونه‌های آزمایشی شفت‌ها، فنرها و سایر اجزایی که گسیخته شدند نشان داد که گسیختگی ابتدا با یک ترک میکروسکوپی، یا نقص مشابه آن، شروع می‌شود و در هر بارگذاری کمی بزرگتر می‌شود. در بارگذاری‌های متوالی، این ترک در ماده پیش می‌رود تا اینکه گسیختگی روی می‌دهد. چون گسیختگی ناشی از خستگی می‌تواند در هر ترک با نقص شروع شود، شرایط در سطح یک نمونه تأثیر مهمی بر حد دوام دارد. حد دوام نمونه‌های ماشین‌کاری و پرداخت شده بیشتر از حد دوام نمونه‌های نورد شده، آهنگری شده، یا خورده شده است. در کاربردهای داخل آب دریا، یا در سایر کاربردهایی که احتمال خوردگی وجود دارد، حد دوام ممکن است تا ۵۰٪ کاهش یابد.

۸-۲ تغییر شکل عضوها تحت بارگذاری محوری
میله همگن BC به طول L با مساحت مقطع عرضی یکنواخت A تحت بار محوری مرکزی P قرار دارد (شکل ۲۲-۲). اگر تنش محوری از حد تناسب ماده فراتر نرود، می‌توان قانون هوک را به کار برد:

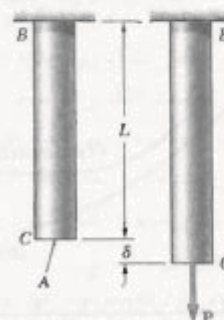
$$\sigma = E\epsilon \quad (۴-۲)$$

در نتیجه،

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \quad (۵-۲)$$

طبق قسمت ۲-۲، $\epsilon = \delta/L$ ، در نتیجه،

$$\delta = \epsilon L \quad (۶-۲)$$

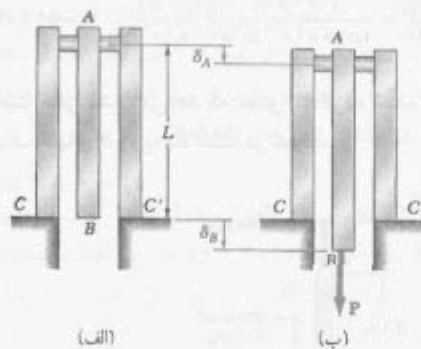


شکل ۲۲-۲

میله BC در شکل ۲-۲۲، که از آن برای استنتاج فرمول (۷-۲) استفاده شد، و میله AD در شکل ۲-۲۳ که در مثال ۲-۱۰ به کار رفت، هر دو از یک سر به تکیه‌گاه ثابت متصل‌اند. از این‌رو، تغییر شکل δ میله با تغییر مکان سر آزاد آن برابر بود. ولی اگر هر دو سر میله حرکت کنند، تغییر شکل میله با تغییر مکان نسبی یک سر میله نسبت به سر دیگر سنجیده می‌شود. مثلاً، مجموعه نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ الف را در نظر بگیرید. این مجموعه از سه میله الاستیک به طول L ، که با مفصل صلب A به هم متصل‌اند، تشکیل شده است. اگر بار P بر B وارد شود (شکل ۲-۲۴ ب)، هر یک از سه میله تغییر شکل می‌دهند. چون میله‌های AC و AC' در C و C' به تکیه‌گاه‌های ثابت متصل شده‌اند، تغییر شکل مشترک آنها با تغییر مکان نقطه A اندازه‌گیری می‌شود. از طرف دیگر، چون هر دو سر میله AB حرکت می‌کنند، تغییر شکل AB با اختلاف تغییر مکان‌های δ_B و δ_A نقاط A و B ، یعنی با تغییر مکان B نسبت به A ، سنجیده می‌شود. اگر این تغییر مکان نسبی را با $\delta_{B/A}$ نشان دهیم،

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \quad (۱۰-۲)$$

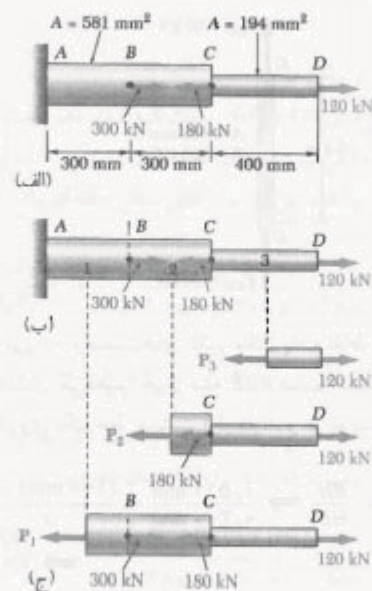
که در آن A مساحت مقطع عرضی AB و E مدول الاستیسیته آن است.



شکل ۲-۲۴

مسئله نمونه ۲-۱

میله صلب BDE توسط دو بازوی AB و CD نگه داشته شده است. بازوی AB از آلومینیم ($E = 70 \text{ GPa}$) و دارای مساحت مقطع عرضی 500 mm^2 است؛ بازوی CD از فولاد ($E = 200 \text{ GPa}$) و با مساحت مقطع عرضی 600 mm^2 است. برای نیروی 3 kN وارده، مطلوب است انحراف نقاط: B (الف)، E (ب)، D (ج).



شکل ۲-۲۳

میله را به سه قسمت نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ تقسیم می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm} \quad L_3 = 400 \text{ mm} \\ A_1 = A_2 = 581 \text{ mm}^2 \quad A_3 = 194 \text{ mm}^2$$

برای تعیین نیروهای داخلی P_1 ، P_2 و P_3 ، هر یک از این سه قسمت را مقطع می‌زنیم و نمودار آزاد قسمتی از میله را که در سمت راست آن مقطع قرار دارد رسم می‌کنیم (شکل ۲-۲۳ ج). با توجه به تعادل این قسمت‌ها،

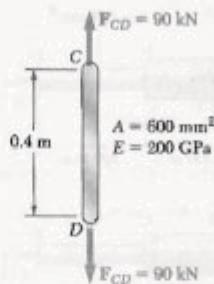
$$P_1 = 240 \text{ kN} = 240 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_2 = -60 \text{ kN} = -60 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_3 = 120 \text{ kN} = 120 \times 10^3 \text{ N}$$

با جایگذاری در معادله (۸-۲)،

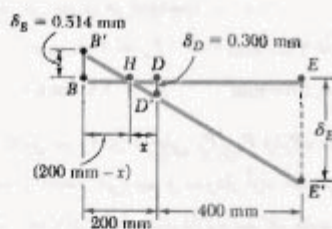
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \\ = \frac{1}{200 \times 10^9} \left[\frac{(240 \times 10^3)(0.3)}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(-60 \times 10^3)(0.3)}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(120 \times 10^3)(0.4)}{194 \times 10^{-6}} \right] \\ = \frac{0.3457 \times 10^3}{200 \times 10^9} = 1.73 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.73 \text{ mm}$$



ج- انحراف E . وضعیت‌های تغییر مکان یافته نقاط B و D را با B' و D' نشان می‌دهیم. چون میله BDE صلب است، نقاط B' ، D' و E' روی یک خط مستقیم قرار دارند و می‌نویسیم:

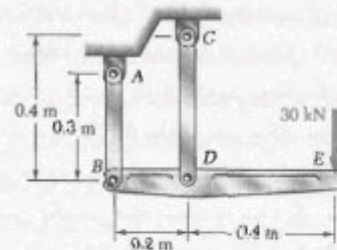
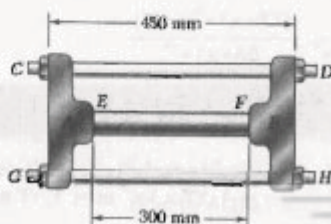
$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \Rightarrow \frac{0.1514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(700 \text{ mm}) - x}{x} \Rightarrow x = 737.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(700 \text{ mm}) + (737.7 \text{ mm})}{737.7 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$$



مسئله نمونه ۲-۲

قطعات ریختگی A و B توسط دو پیچ و مهره فولادی CD و GH به قطر ۱۸ mm به هم متصل‌اند و با دوسر میله آلومینیومی EF به قطر ۳۸ mm تماس دارند. پیچ‌ها تک راهه و با گام ۲.۵ mm هستند. پس از اینکه پیچ و مهره‌ها محکم می‌شوند، مهره‌های D و H به اندازه یک چهارم دور سفت می‌شوند. اگر E برای فولاد ۲۰۰ GPa و برای آلومینیوم ۷۰ GPa باشد، تنش قائم در میله را بیابید.



حل

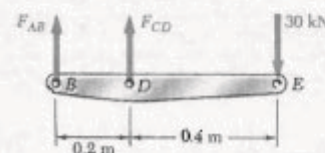
نمودار آزاد: میله BDE

$$\sum M_B = 0 : -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ (کششی)}$$

$$\sum M_D = 0 : -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) - F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \text{ (فشاری)}$$



الف- انحراف B . چون نیروی داخلی در بازوی AB فشاری

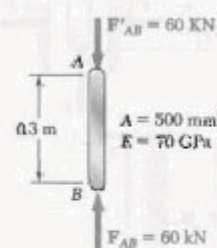
است، $P = -60 \text{ kN}$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.2 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -0.171 \times 10^{-3} \text{ m}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که عضو AB کوتاه شده است.

لذا، انحراف انتهای B رو به بالاست. در نتیجه،

$$\delta_B = 0.171 \text{ mm} \uparrow$$



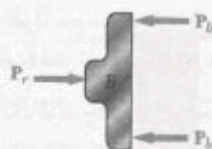
ب- انحراف D . در میله CD ، $P = 90 \text{ kN}$. در نتیجه،

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.2 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\delta_D = 0.150 \text{ mm} \uparrow$$

$$\delta_D = 0.150 \text{ mm} \downarrow$$

حل



نیرو در پیچ‌ها و در میله

با جایگذاری P_r از (۶) در (۵)،

$$0.625 \text{ mm} = 8.842 \times 10^{-5} P_b + 3.779 \times 10^{-5} (2P_b)$$

$$\Rightarrow P_b = 28.1 \times 10^3 \text{ N} \approx 28.1 \text{ kN}$$

$$P_r = 2P_b = 2(28.1 \text{ kN}) = 56.2 \text{ kN}$$

تنش در میله

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{56.2 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi (38 \text{ mm})^2} \Rightarrow \sigma_r = 67.19 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

مسائل

۱-۲ یک میله فولادی به طول ۲/۲ m است و تحت بار ۸/۵ kN نباید بیش از ۱/۲ mm افزایش طول دهد. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) تنش قائم متناظر تحت بار ۸/۵ kN.

۲-۲ یک سیم فولادی به طول ۶ m تحت نیروی کششی ۶ kN است. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ و افزایش طول میله ۴۸ mm باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر سیم، (ب) تنش قائم متناظر.

۳-۲ یک میله کنترل از جنس برنج زرد تحت کشش ۳/۲ kN نباید بیش از ۳ mm کشیده شود. اگر $E = 105 \text{ GPa}$ و ماکزیمم تنش قائم مجاز ۱۸۰ MPa باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) ماکزیمم طول متناظر میله.

۴-۲ دو علامت‌سنج به دقیقاً به فاصله ۲۵۰ mm روی یک میله آلومینیومی، با $E = 73 \text{ GPa}$ و با استقامت نهایی ۱۴۰ MPa و به قطر ۱۴ mm قرار دارند. اگر فاصله بین این دو علامت پس از اعمال نیرو ۲۵۰/۲۸ mm باشد، مطلوبست: (الف) تنش در میله، (ب) ضریب اطمینان.

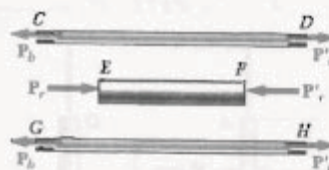
تغییر شکل‌ها

پیچ‌های CD و GH، سفت کردن مهره‌ها باعث ایجاد کشش در پیچ‌ها می‌شود. به علت تقارن، هر دو پیچ تحت نیروی داخلی یکسان P_b قرار می‌گیرند و تغییر شکل یکسان δ_b را می‌دهند:

$$\delta_b = \frac{P_b L_b}{A_b E_b} = \frac{P_b (250 \text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi (18 \text{ mm})^2 (200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \\ = 8.842 \times 10^{-5} P_b \quad (1)$$

میله EF، این میله تحت فشار است. اگر مقدار نیرو در میله را با P_r و تغییر شکل میله را با δ_r نشان دهیم،

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r (300 \text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi (38 \text{ mm})^2 (70 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \\ = -2.779 \times 10^{-5} P_r \quad (2)$$



تغییر شکل D نسبت به B، سفت کردن مهره‌ها به اندازه یک چهارم دور باعث می‌شود دو سر D و H تغییر مکان $\frac{1}{4} (2.5 \text{ mm})$ را نسبت به قطعه B بدهند. با در نظر گرفتن سر D، می‌نویسیم:

$$\delta_{DB} = \frac{1}{4} (2.5 \text{ mm}) = 0.625 \text{ mm} \quad (3)$$

اما $\delta_{DB} = \delta_D - \delta_B$ ، که در آن δ_D و δ_B تغییر مکان‌های D و B هستند. اگر فرض کنیم قطعه A در یک مکان ثابت نگه داشته می‌شود و مهره‌های D و H سفت می‌شوند، این تغییر مکان‌ها، به ترتیب، با تغییر شکل پیچ‌ها و میله برابرند. بنابراین،

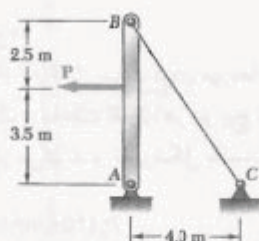
$$\delta_{DB} = \delta_b - \delta_r \quad (4)$$

با جایگذاری از (۱)، (۲) و (۳) در (۴)،

$$0.625 \text{ mm} = 8.842 \times 10^{-5} P_b + 3.779 \times 10^{-5} (2P_b) \quad (5)$$

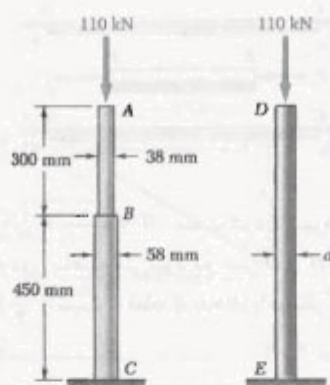
جسم آزاد: قطعه B

$$\sum F = 0: P_r - 2P_b = 0 \Rightarrow P_r = 2P_b \quad (6)$$



شکل م ۱۳-۲

۱۴-۲ میله آلومینیومی ABC ($E = 70 \text{ GPa}$)، از دو قسمت AB و BC تشکیل شده است و می‌خواهیم آن را با میله فولادی استوانه‌ای DE ($E = 200 \text{ GPa}$) با همان طول کلی جایگزین کنیم. تحت بار یکسان، تغییر شکل میله فولادی نباید بیشتر از تغییر شکل میله آلومینیومی باشد و تنش مجاز آن 65 MPa است. قطر میله فولادی را بیابید.



شکل م ۱۴-۲

۱۵-۲ قطعه نشان داده شده از ورقی به ضخامت 5 mm ساخته شده است. برای $E = 37.10 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) تغییر شکل کلی قطعه، (ب) تغییر شکل قسمت مرکزی BC .



شکل م ۱۵-۲

۵-۲ یک نخ نایلونی تحت نیروی کششی 8 N قرار دارد. اگر $E = 5 \text{ GPa}$ و طول نخ به اندازه 1.1 درصد افزایش یابد، مطلوب است: (الف) قطر نخ، (ب) تنش در نخ.

۶-۲ از یک لوله چدنی برای تحمل بار فشاری استفاده می‌شود. اگر $E = 69 \text{ GPa}$ و ماکزیمم تغییر مجاز طول لوله 0.25% باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش قائم در لوله، (ب) مینیمم ضخامت دیواره لوله برای بار 7.2 kN در صورتی که قطر لوله 50 mm باشد.

۷-۲ سیم فولادی به طول 9 mm و به قطر 6 mm تحت نیروی کششی P به اندازه 11 mm افزایش طول می‌دهد. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) مقدار P ، (ب) تنش قائم متناظر در سیم.

۸-۲ سیم چهارگوش آلومینیومی تحت بار کششی نباید بیش از 1.4 mm افزایش طول دهد. اگر $E = 70 \text{ GPa}$ و تنش مجاز کششی 120 MPa باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم طول مجاز سیم، (ب) ابعاد مورد نیاز مقطع عرضی برای بار کششی 28 kN .

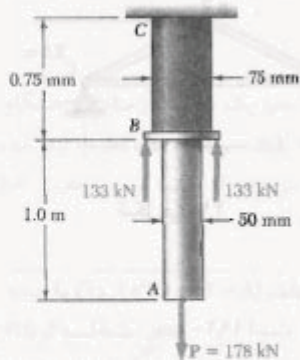
۹-۲ بار کششی 9 kN بر یک سیم فولادی، به طول 50 m و با $E = 200 \text{ GPa}$ ، وارد می‌شود. اگر تنش قائم در سیم نباید از 150 MPa و افزایش طول آن نباید از 25 mm بیشتر شود، کمترین قطر سیم را بیابید.

۱۰-۲ قطعه‌ای به طول 250 mm و با مقطع عرضی $40 \times 50 \text{ mm}$ برای تحمل بار فشاری مرکزی P به کار می‌روند. این قطعه از برنز، با $E = 95 \text{ GPa}$ ، ساخته شده است. اگر تنش قائم در قطعه نباید از 80 MPa و کاهش طول آن نباید از 0.12% طول اولیه‌اش بیشتر شود، ماکزیمم باری را که می‌توان بر قطعه وارد کرد بیابید.

۱۱-۲ میله آلومینیومی به طول 1.5 mm تحت بار محوری 3 kN نباید بیش از 1 mm افزایش طول دهد و تنش قائم در آن نباید بیش از 40 MPa باشد. اگر $E = 70 \text{ GPa}$ ، قطر مورد نیاز میله را بیابید.

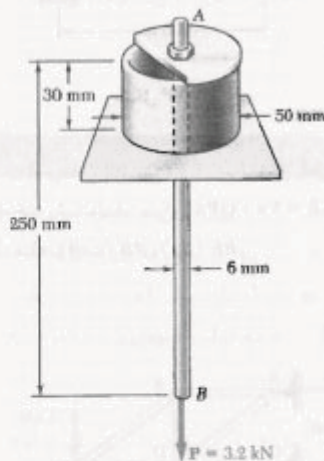
۱۲-۲ نخ نایلونی تحت بار 10 N قرار دارد. $E = 37.5 \text{ GPa}$ و ماکزیمم تنش قائم مجاز 42 MPa است. افزایش طول نخ نباید بیش از 1% باشد. قطر نخ را بیابید.

۱۳-۲ کابل BC به قطر 4 mm از فولاد، $E = 200 \text{ GPa}$ ، ساخته شده است. اگر ماکزیمم تنش در کابل نباید از 190 MPa و افزایش طول کابل نباید از 6 mm بیشتر شود، ماکزیمم بار P را که می‌توان وارد کرد بیابید.



شکل م ۱۹-۲

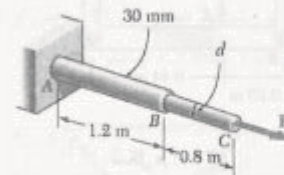
۲۰-۲ استوانه توخالی با ضخامت دیواره ۳ mm از جنس پلی استیرن ($E = 3 \text{ GPa}$)، و ورق دایره‌ای (که فقط قسمتی از آن نشان داده شده است) میله فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) به قطر ۶ mm را نگه داشته‌اند. برای $P = 3.2 \text{ kN}$ ، مطلوب است: (الف) افزایش طول AB ، (ب) انحراف نقطه B ، (ج) تنش قائم متوسط در میله AB .



شکل م ۲۰-۲

۲۱-۲ برای خربای فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) و بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است تغییر شکل عضوهای AD و AB ، در صورتی که مساحت مقطع عرضی آنها، به ترتیب، 2400 mm^2 و 1800 mm^2 باشد.

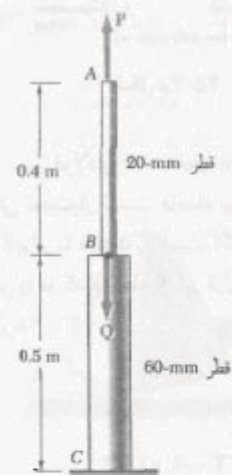
۱۶-۲ بار محوری با مقدار $P = 58 \text{ kN}$ بر انتهای C میله برنجی ABC وارد می‌شود. اگر $E = 105 \text{ GPa}$ ، مطلوب است قطر قسمت BC که به ازای آن انحراف نقطه C برابر با ۳ mm باشد.



شکل م ۱۶-۲

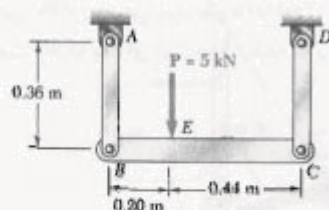
۱۷-۲ میله ABC از آلومینیم ($E = 70 \text{ GPa}$) ساخته شده است. اگر $P = 6 \text{ kN}$ و $Q = 42 \text{ kN}$ ، مطلوب است: (الف) مقدار Q به طوری که انحراف نقطه A صفر باشد، (ب) انحراف نقطه B .

۱۸-۲ میله ABC از آلومینوم ($E = 70 \text{ GPa}$) ساخته شده است. برای $P = 6 \text{ kN}$ و $Q = 42 \text{ kN}$ ، مطلوب است: (الف) انحراف A ، (ب) انحراف B .



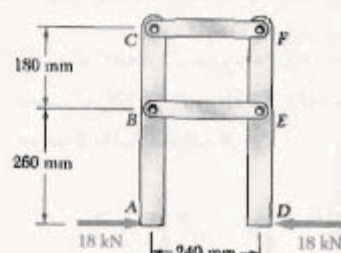
شکل م ۱۷-۲ و م ۱۸-۲

۱۹-۲ دو میله استوانه‌ای در B به هم متصل شده‌اند. میله AB از فولاد ($E = 200 \text{ GPa}$) و BC از برنج ($E = 105 \text{ GPa}$) است. مطلوب است: (الف) تغییر شکل کلی میله مرکب ABC ، (ب) انحراف نقطه B .



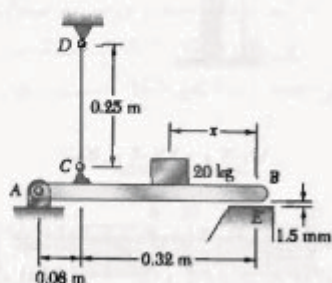
شکل م ۲۴-۲

۲۵-۲ عضوهای ABC و DEF توسط عضوهای فولادی BE ($E = ۲۰۰$ GPa) به هم متصل شده‌اند. هر یک از بازوها از زوج ورق‌های ۲۵×۲۵ mm ساخته شده است. مطلوب است تغییر طول: (الف) عضو BE ، (ب) عضو CF .

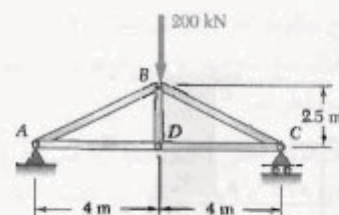


شکل م ۲۵-۲

۲۶-۲ سیم فولادی CD به قطر ۲ mm طوری تنظیم شده است که وقتی تحت بار نیست فاصله بین سر B از تیر ACB با نقطه تماس E برابر با ۱٫۵ mm است. اگر $E = ۲۰۰$ GPa، قطعه ۲۰ کیلوگرمی را در کدام نقطه از تیر قرار دهیم تا نقاط B و E با هم تماس گیرند؟

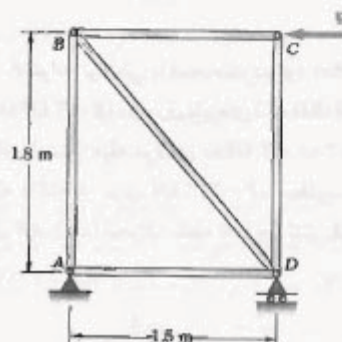


شکل م ۲۶-۲



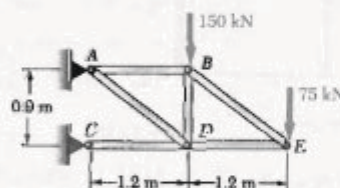
شکل م ۲۱-۲

۲۲-۲ قاب فولادی ($E = ۲۰۰$ GPa) نشان داده شده دارای مهار قطری BD با مساحت ۱۹۲۰ mm^۲ است. اگر تغییر طول عضو BD نباید از ۱٫۶ mm بیشتر شود، بیشترین بار مجاز P را بیابید.



شکل م ۲۲-۲

۲۳-۲ عضوهای AB و BE از میله‌های فولادی به قطر ۲۵ mm ساخته شده‌اند. برای $E = ۲۰۰$ GPa، مطلوب است افزایش طول میله: (الف) AB ، (ب) BE .



شکل م ۲۳-۲

۲۴-۲ هر یک از بازوهای AB و CD از آلومینیم ($E = ۷۵$ GPa) ساخته شده است و دارای مساحت مقطع عرضی ۱۲۵ mm^۲ است. اگر این بازوها عضو صلب BC را نگه دارند، انحراف نقطه F را بیابید.

۳۱-۲ اگر کرنش مهندسی^۲ در یک نمونه کششی را با ϵ نشان دهیم، ثابت کنید که کرنش حقیقی عبارت است از

$$\epsilon_f = \ln(1 + \epsilon)$$

۳۲-۲ حجم یک نمونه آزمایشی هنگام تغییر شکل پلاستیک اساساً ثابت می ماند. اگر قطر اولیه نمونه d_1 باشد، نشان دهید که وقتی قطر d است، کرنش حقیقی عبارت است از

$$\epsilon_f = 2 \ln(d_1/d)$$

۹-۲ مسائل نامعین استاتیکی

در قسمت قبل، برای تعیین نیروهای داخلی در قسمت‌های مختلف عضوی که تحت بارگذاری قرار داشت از نمودار آزاد و معادله‌های تعادل استفاده می کردیم. سپس، با جایگذاری مقادیر حاصل در معادله (۸-۲) یا (۹-۲)، تغییر شکل عضو را به دست می آوردیم.

ولی، در بسیاری از مسائل نمی توان به صورت بالا عمل کرد. در این مسائل، معادله‌های تعادل را باید با رابطه‌هایی که شامل تغییر شکل‌ها هستند تکمیل کرد؛ این تغییر شکل‌ها از هندسه مسئله تعیین می شوند. چون صرفاً با استاتیک نمی توان واکنش‌ها یا نیروهای داخلی را پیدا کرد، این نوع مسائل را نامعین استاتیکی می گویند.

مثال ۹-۲

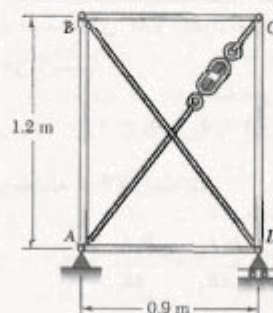
میله‌ای به طول L ، مساحت مقطع عرضی A_1 ، و مدول الاستیسیته E_1 در داخل لوله‌ای به طول L و با مساحت مقطع عرضی A_2 و مدول الاستیسیته E_2 قرار دارد (شکل ۲۵-۲ الف). اگر نیروی P بر صفحه صلب انتهایی وارد شود، تغییر شکل میله و لوله را بیابید.

نیروهای محوری در میله و لوله را، به ترتیب، با P_1 و P_2 نشان می دهیم و نمودار آزاد سه جزء نشان داده شده را رسم می کنیم (شکل ۲۵-۲ ب، ج، د). در نمودار آخر،

$$P_1 + P_2 = P \quad (11-2)$$

با این معادله نمی توان دو نیروی داخلی مجهول P_1 و P_2 را حل کرد و مسئله نامعین استاتیکی است.

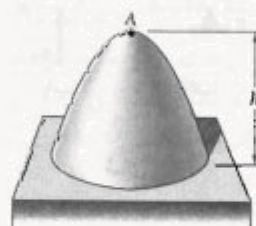
۲۷-۲ عضوهای AB و CD از نوع میله‌های فولادی به قطر 30 mm و عضوهای BC و AD از نوع میله‌های فولادی به قطر 22 mm هستند. وقتی بست قوریایه‌ای سفت می شود، عضو قطر AC تحت کشش قرار می گیرد. اگر $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است بیشترین کشش مجاز در AC به طوری که تغییر شکل عضوهای AB و CD از $1/0 \text{ mm}$ بیشتر نشود.



شکل م ۲۷-۲

۲۸-۲ برای سازه داده شده در مسئله ۲۷-۲، مطلوب است: (الف) فاصله h به طوری که تغییر شکل عضوهای AB ، BC ، CD و AD برابر باشند، (ب) کشش متناظر در عضو AC .

۲۹-۲ انحراف رأس A مخروط همگن دایره‌ای به ارتفاع h ، چگالی ρ و مدول الاستیسیته E را تحت تأثیر وزن مخروط بیابید.



شکل م ۲۹-۲

۳۰-۲ کابل همگنی به طول L و با مقطع عرضی یکنواخت از یک سر آویزان شده است. (الف) اگر چگالی کابل را با ρ و مدول الاستیسیته آن را با E نشان دهیم، افزایش طول کابل را بر اثر وزن آن بیابید. (ب) نشان دهید که اگر کابل افقی بود و نیرویی برابر با نصف وزنش بر هر سر آن وارد می شد، همان افزایش طول را می داد.

نمودار آزاد میله را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۲۶) و معادله تعادل را می‌نویسیم:

$$R_A + R_B = P \quad (۲-۱۴)$$

این معادله شامل دو واکنش مجهول R_A و R_B است. لذا، مسئله نامعین استاتیکی است.

طبق شکل هندس، افزایش طول کلی میله صفر است. افزایش طول قسمت‌های AC و BC را، به ترتیب، با δ_1 و δ_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

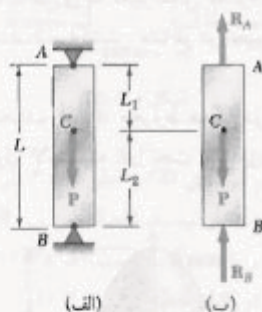
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

با استفاده از معادله ۲-۷ و رابطه بالا،

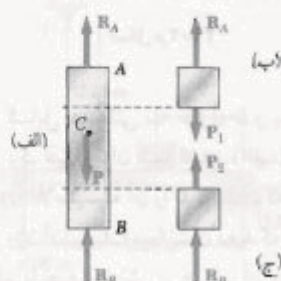
$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \quad (۲-۱۵)$$

از نمودار آزاد قسمت‌های ب و ج شکل ۲-۲۷، به ترتیب، $P_1 = R_A$ و $P_2 = R_B$ ، با جایگذاری این مقادیر در معادله (۲-۱۵)، نتیجه می‌شود:

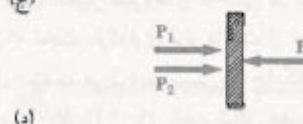
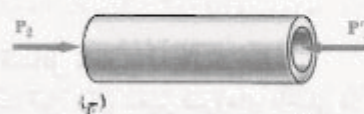
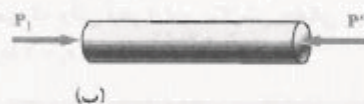
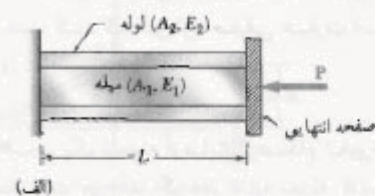
$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \quad (۲-۱۶)$$



شکل ۲-۲۶



شکل ۲-۲۷



شکل ۲-۲۵

باتوجه به شکل هندسی، تغییر شکل‌های میله و لوله با هم برابرند. طبق معادله (۲-۷)،

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (۲-۱۲)$$

این دو تغییر شکل را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \quad (۲-۱۳)$$

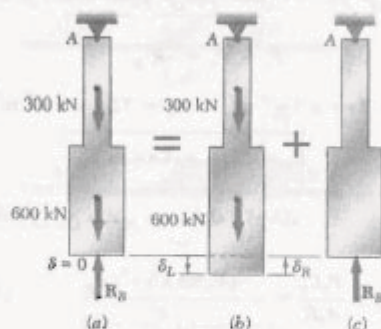
با حل معادله‌های (۲-۱۱) و (۲-۱۳)،

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

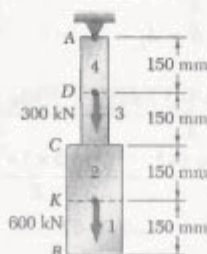
هر یک از معادله‌های (۲-۱۲) را برای تعیین تغییر شکل مشترک میله و لوله می‌توان به کار برد.

مثال ۲-۳

میله AB به طول L و با مقطع عرضی یکنواخت، قبل از بارگذاری به تکیه‌گاههای صلب A و B متصل است. تنش در قسمت‌های AC و BC را بر اثر بار P که در نقطه C وارد شده است بیابید (شکل ۲-۲۶ الف).



شکل ۲۹-۲



شکل ۳۰-۲

میله را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۰-۲)، و تغییر شکل δ_L را از معادله (۸-۲) می‌یابیم. با استفاده از مثال ۲-۱۰، می‌نویسیم:

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۸-۲)،

$$\begin{aligned} \delta_L &= \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0.150 \text{ m}}{E} \\ &\Rightarrow \delta_L = \frac{1.125 \times 10^{-4}}{E} \quad (17-2) \end{aligned}$$

در قسمت ۲-۱۰ شرایط کلی را که به موجب آن می‌توان با این روش اثر ترکیبی چند بار را به‌دست آورد مورد بحث قرار می‌دهیم.

با حل همزمان معادله‌های (۱۴-۲) و (۱۶-۲)، $R_A = PL_1/L$ و $R_B = PL_1/L$. تنش‌های خواسته شده در AC و BC ، به ترتیب، از تقسیم $P_1 = R_A$ و $P_1 = -R_B$ بر مساحت مقطع عرضی میله به‌دست می‌آیند:

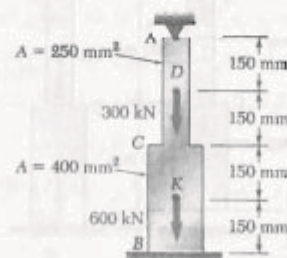
$$\sigma_1 = \frac{PL_1}{AL} \quad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

روش برهم‌نهی (ترکیب). اگر تعداد تکیه‌گاه‌های سازه‌ای بیش از تعداد لازم برای حفظ تعادل سازه باشد، سازه نامعین استاتیکی است. در این حالت، تعداد واکنش‌های مجهول بیش از تعداد معادله‌های تعادل است. اغلب، یکی از این واکنش‌ها را زائد گرفته و تکیه‌گاه متناظر آن را حذف می‌کنیم (واکنش زائد را می‌توان بار مجهولی دانست که، همراه با سایر بارها، تغییر شکل‌های سازگار با قیدها را ایجاد می‌کند). سپس، تغییر شکل‌های حاصل از بارهای داده شده و حاصل از واکنش زائد را به‌طور جداگانه در نظر گرفته، و با ترکیب این تغییر شکل‌ها به نتیجه دلخواه می‌رسیم.*

مثال ۲-۴

در شکل ۲۸-۲، واکنش در A و B را بیابید. فرض کنید میله قبل از بارگذاری به هر دو تکیه‌گاه کاملاً متصل است.

واکنش در B را زائد می‌گیریم و میله را از تکیه‌گاهش جدا می‌کنیم. حال، واکنش R_B را به عنوان بار مجهول می‌گیریم (شکل ۲۹-۲ الف) و آن را از این شرایط به‌دست می‌آوریم که تغییر شکل میله صفر است. با در نظر گرفتن جداگانه تغییر شکل ناشی از بارهای داده شده (شکل ۲۹-۲ ب) و تغییر شکل ناشی از واکنش زائد R_B (شکل ۲۹-۲ ب)، مسئله را می‌توان حل کرد.



شکل ۲۸-۲

واکنش R_A در تکیه‌گاه فوقانی از نمودار آزاد میله (شکل ۳۲-۲) به دست می‌آید. می‌نویسیم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

با تعیین واکنش‌ها، به سهولت می‌توان تنش و کرنش در میله را به دست آورد. باید توجه داشت که تغییرشکل کلی میله صفر است، ولی هر قسمت آن تحت بارگذاری و قیدهای داده شده تغییرشکل می‌دهد.

مثال ۵-۲

مثال قبل را با این فرض حل کنید که، قبل از بارگذاری، فاصله $\delta = 4.5 \text{ mm}$ وجود دارد (شکل ۳۳-۲). $E = 200 \text{ GPa}$ از همان روش مثال ۴-۲ استفاده می‌کنیم. واکنش در B را زائد می‌گیریم، و با استفاده از بارهای داده شده و واکنش زائد R_B به ترتیب، تغییرشکل‌های δ_L و δ_R را می‌یابیم. در این حالت، تغییرشکل کلی صفر نیست و $\delta = 4.5 \text{ mm}$ ، بنابراین،

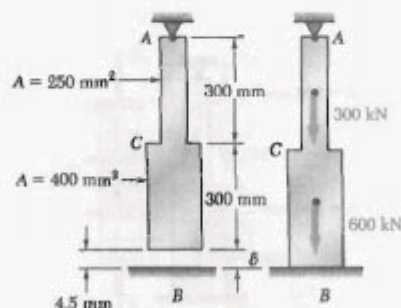
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (20-2)$$

با جایگذاری δ_L و δ_R از (۱۷-۲) و (۱۸-۲) در (۲۰-۲) و با توجه به اینکه $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

$$\delta = \frac{1/125 \times 10^4}{200 \times 10^9} - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

در نتیجه،

$$R_B = 115.4 \times 10^3 \text{ N} = 115.4 \text{ kN}$$



شکل ۳۳-۲

حال، با در نظر گرفتن تغییرشکل ناشی از واکنش زائد R_B ، میله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۱-۲) و می‌نویسیم:

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.3 \text{ m}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۸-۲)،

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{E} \quad (18-2)$$

تغییرشکل کلی میله را مساوی صفر قرار می‌دهیم، و می‌نویسیم:

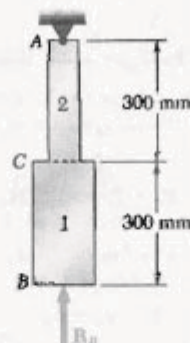
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \quad (19-2)$$

با جایگذاری δ_L و δ_R از (۱۷-۲) و (۱۸-۲) در (۱۹-۲)،

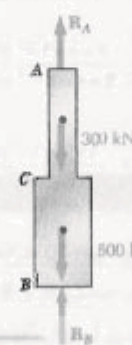
$$\delta = \frac{1/125 \times 10^4}{E} - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{E} = 0$$

در نتیجه،

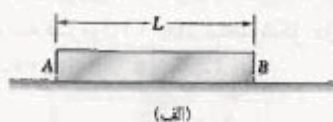
$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$



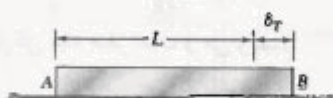
شکل ۳۱-۲



شکل ۳۲-۲

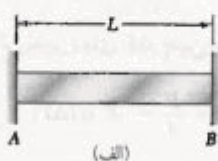


(الف)

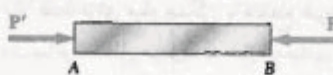


(ب)

شکل ۳۴-۲

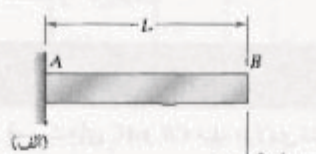


(الف)

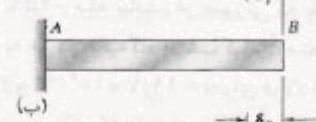


(ب)

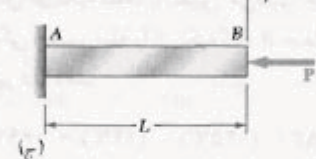
شکل ۳۵-۲



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳۶-۲

برای تعیین تنش σ ناشی از تغییر دمای ΔT در این حالت، با یک مسئله نامعین (استاتیکی رو به رو هستیم. بنابراین، ابتدا باید واکنش در تکیه‌گاهها را از شرط صفر بودن کشیدگی میله محاسبه کنیم. با استفاده از روش ترکیب، که در قسمت ۹-۲ توصیف شد، میله را از تکیه‌گاه B جدا می‌کنیم (شکل ۳۶-۲ الف) و می‌گذاریم تحت تغییر دمای ΔT آزادانه کشیده شود (شکل ۳۶-۲ ب). طبق فرمول (۲۱-۲)، کشیدگی متناظر چنین است:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

از نمودار آزاد میله (شکل ۳۲-۲)، واکنش در A را می‌یابیم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0: R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115.4 \text{ kN} = 784.6 \text{ kN}$$

۲-۱۰ مسائل مربوط به تغییرات دما

تا به حال، تمام اعضوها و سازه‌ها هنگام یارگذاری در دمای ثابت بودند. حال می‌خواهیم اثر تغییر دما را بررسی کنیم.

میله همگن AB با مقطع عرضی یکنواخت و به طول L را روی یک سطح صاف افقی در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴-۲ الف). اگر دمای میله به اندازه ΔT افزایش یابد، میله به اندازه δ_T کشیده می‌شود (شکل ۳۴-۲ ب). به طوری که:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (21-2)$$

α مشخصه‌ای از ماده، به نام ضریب اتساع گرمایی، است. δ_T و L برحسب واحدهای طول، و α برحسب $1/^\circ\text{C}$ یا $1/^\circ\text{F}$ بیان می‌شود.

تغییر شکل δ_T با کرنش $\epsilon_T = \delta_T/L$ همراه است. با توجه به معادله (۲۱-۲)،

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \quad (22-2)$$

ϵ_T را کرنش گرمایی می‌گویند. در حالت بالا، هیچ تنشی در ارتباط با کرنش وجود ندارد زیرا میله آزادانه روی سطح قرار دارد.

حال فرض می‌کنیم که میله AB بین دو تکیه‌گاه ثابت به فاصله L از هم قرار دارد (شکل ۳۵-۲ الف). ابتدا هیچ تنشی یا کرنشی وجود ندارد. اگر دمای میله را به اندازه ΔT افزایش دهیم، میله کشیده نمی‌شود زیرا قیدهایی در دو انتهای آن قرار دارند؛ لذا، کشیدگی δ_T میله صفر است. چون میله دارای مقطع عرضی یکنواخت است، کرنش ϵ_T در هر نقطه عبارت است از $\epsilon_T = \delta_T/L$ و آنهم صفر است. ولی، پس از افزایش دما، تکیه‌گاهها دوتیروی مساوی و متضاد P و P' را بر میله وارد می‌کنند و مانع کشیدگی آن می‌شوند (شکل ۳۵-۲ ب). لذا، تنش (بدون کرنش) در میله به وجود می‌آید.



حال، با اعمال نیروی مجهول R_B در انتهای B (شکل ۲-۳۸ ج)، از معادله (۸-۲) برای تغییر شکل متناظر δ_R استفاده می‌کنیم. مقادیر زیر را در معادله ۸-۲ جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = 300 \text{ mm} \\ A_1 &= 380 \text{ mm}^2 & A_2 &= 750 \text{ mm}^2 \\ P_1 &= P_2 = R_B & E &= 200 \text{ GPa} \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{R_B}{200 \text{ GPa}} \left(\frac{300 \text{ mm}}{380 \text{ mm}^2} + \frac{300 \text{ mm}}{750 \text{ mm}^2} \right) \\ &= (0.95 \times 10^{-6} \text{ mm/N}) R_B \end{aligned}$$

تغییر شکل کلی میله بر اثر وجود قیدها صفر است و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_T + \delta_R = 0 \\ &= -0.484 \text{ mm} + (0.95 \times 10^{-6} \text{ mm/N}) R_B = 0 \end{aligned}$$

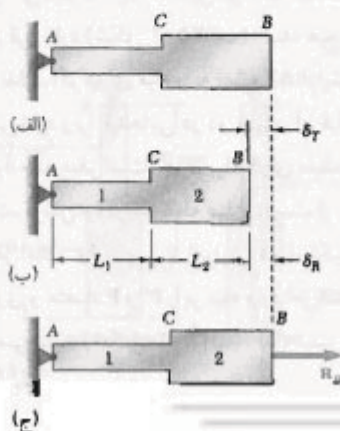
در نتیجه،

$$R_B = 81,34 \times 10^3 \text{ N} = 81,34 \text{ kN}$$

واکنش در A مساوی و متضاد با واکنش بالاست.

نیروها در دو قسمت میله عبارتند از $P_1 = P_2 = 81,34 \text{ kN}$. لذا، تنش در قسمت‌های AC و CB میله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_1}{A_1} = \frac{81,34 \text{ kN}}{380 \text{ mm}^2} = 214,1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{P_2}{A_2} = \frac{81,34 \text{ kN}}{750 \text{ mm}^2} = 107,8 \text{ MPa} \end{aligned}$$



شکل ۲-۳۸

حال، با اعمال نیروی P به عنوان واکنش زائد در انتهای B و با توجه به فرمول (۷-۲)، تغییر شکل دوم را می‌یابیم (شکل ۲-۳۶ ج):

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

تغییر شکل کلی میله صفر است و می‌نویسیم:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

در نتیجه،

$$P = -AE \alpha(\Delta T)$$

تنش در میله بر اثر تغییر دمای ΔT چنین است:

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E \alpha(\Delta T) \quad (2-32)$$

نتیجه بالا فقط برای میله همگن با مقطع عرضی یکنواخت به کار می‌رود. سایر مسائل مربوط به سازه مقیدی را که تغییر دما می‌دهد باید برحسب شرایط مسئله تحلیل کرد. برای این منظور، از یک روش کلی می‌توان استفاده کرد؛ یعنی، تغییر شکل ناشی از تغییر دما و ناشی از واکنش زائد را به طور جداگانه محاسبه، و با ترکیب آنها مسئله را حل کرد.

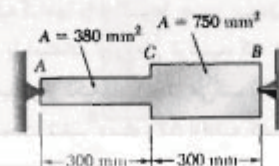
مثال ۲-۶

مقدار تنش در قسمت‌های AC و CB میله فولادی نشان داده شده را برای دمای -45°C میله بیابید، در صورتی که بدانیم میله در دمای $+24^\circ\text{C}$ به هر دو تکیه‌گاه صلب کاملاً متصل است. از $E = 200 \text{ GPa}$ و $\alpha = 11,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ برای فولاد استفاده کنید. ابتدا واکنش در تکیه‌گاه‌ها را تعیین می‌کنیم. چون مسئله نامعین استاتیکی است، میله را از تکیه‌گاه B جدا می‌کنیم و می‌گذاریم تغییر دما دهد:

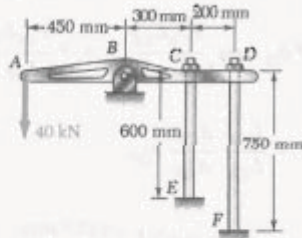
$$\Delta T = (-45^\circ\text{C}) - (24^\circ\text{C}) = -69^\circ\text{C}$$

تغییر شکل متناظر (شکل ۲-۳۸ ب) چنین است:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \alpha(\Delta T)L = (11,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-69^\circ\text{C})(600 \text{ mm}) \\ &= -0,484 \text{ mm} \end{aligned}$$



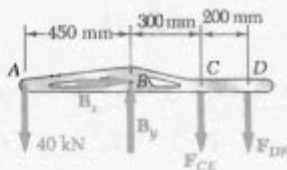
شکل ۲-۳۷



حل

استاتیک، نمودار آزاد میله ABCD را رسم، و توجه می‌کنیم که واکنش در B و نیروهای وارده از میله‌ها نامعین استاتیکی‌اند. با استفاده از استاتیک، می‌نویسیم:

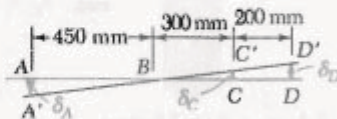
$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 : \\ (40 \text{ kN})(450 \text{ mm}) - F_{CE}(300 \text{ mm}) - F_{DF}(500 \text{ mm}) &= 0 \\ \Rightarrow 300 F_{CE} + 500 F_{DF} &= 18000 \quad (1) \end{aligned}$$



هندس. پس از اعمال بار ۴۰ kN، وضعیت میله به صورت از مثلث‌های متشابه BAA'، BCC' و BDD' در می‌آید. از مثلث‌های متشابه BCC' و BDD' :

$$\frac{\delta_C}{300 \text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_C = 0.6 \delta_D \quad (2)$$

$$\frac{\delta_A}{450 \text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_A = 0.9 \delta_D \quad (3)$$



تغییر شکل‌ها، با استفاده از معادله (۲-۳)،

$$\delta_C = \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} \quad \delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

گرچه تغییر شکل کلی میله صفر است، ولی تغییر شکل قسمت‌های AC و CB صفر نیست. لذا، کرنش ϵ_{AC} در AC را محاسبه می‌کنیم. کرنش ϵ_{AC} را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد: (۱) کرنش گرمایی ϵ_T ناشی از تغییر دمای ΔT در میله مقید نشده (شکل ۲-۳۸ ب)، از معادله (۲-۲۲)،

$$\begin{aligned} \epsilon_T &= \alpha \Delta T = (11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-69^\circ\text{C}) \\ &= -807.3 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

(۲) کرنش ناشی از تنش σ_1 ، که آن هم از نیروی R_B وارد بر میله ناشی می‌شود (شکل ۲-۳۸ ج). با توجه به قانون هوک، این مولفه کرنش چنین است:

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{+214.1 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = +1070.5 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \epsilon_{AC} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -807.3 \times 10^{-6} + 1070.5 \times 10^{-6} \\ &= +263.2 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

با محاسبه مشابه، کرنش در قسمت میله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_{CB} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -807.3 \times 10^{-6} + 542.5 \times 10^{-6} \\ &= -264.8 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

تغییر شکل‌های δ_{AC} و δ_{CB} در دو قسمت میله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \delta_{AC} &= \epsilon_{AC}(AC) = (+263.2 \times 10^{-6})(300 \text{ mm}) \\ &= +0.079 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{CB} &= \epsilon_{CB}(CB) = (-264.8 \times 10^{-6})(300 \text{ mm}) \\ &= -0.079 \text{ mm} \end{aligned}$$

دیده می‌شود که مجموع این دو تغییر شکل، $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ ، صفر است در حالی که هیچیک از آنها صفر نیست.

مسئله نمونه ۳-۲

میله CE به قطر ۱۲ mm و میله DF به قطر ۱۸ mm به صلب ABCD متصل شده‌اند. اگر میله‌ها از آلومینیم ($E = 70 \text{ GPa}$) باشند، مطلوبست: (الف) نیرو در هر میله، (ب) انحراف در نقطه A.

NUEB

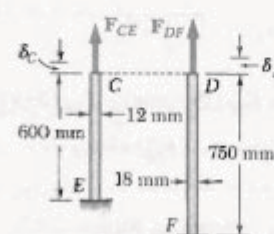
با جایگذاری δ_D و δ_C در (۲)،

$$\delta_C = 0.16 \delta_D \Rightarrow \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} = 0.16 \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 0.16 \frac{L_{DF}}{L_{CE}} \frac{A_{CE}}{A_{DF}} F_{DF}$$

$$= 0.16 \left(\frac{750 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \right) \left[\frac{\frac{1}{4} \pi (12 \text{ mm})^2}{\frac{1}{4} \pi (18 \text{ mm})^2} \right] F_{DF}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 0.222 F_{DF}$$



نیرو در هر میله با جایگذاری F_{CE} در (۱) و با توجه به اینکه نیروها بر حسب kN هستند، داریم

$$300 (0.222 F_{DF}) + 500 F_{DF} = 18000$$

$$\Rightarrow F_{DF} = 30 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$F_{CE} = 0.222 F_{DF} = 0.222 (30 \text{ kN})$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 6.66 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

انحراف‌ها، انحراف نقطه D چنین است:

$$\delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E} = \frac{(30 \times 10^3 \text{ N})(750 \text{ mm})}{\frac{1}{4} \pi (18)^2 (70 \text{ GPa})}$$

$$\Rightarrow \delta_D = 1.26 \text{ mm}$$

با استفاده از (۳)،

$$\delta_A = 0.9 \delta_D = 0.9 (1.26 \text{ mm})$$

$$\Rightarrow \delta_A = 1.13 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

مسئله نمونه ۲-۴

میله صلب CDE دارای تکیه‌گاه مفصلی E است و روی استوانه برنجی BD به قطر 30 mm قرار دارد. میله فولادی AC به قطر 22 mm از سوراخ داخلی میله CDE گذشته است. وقتی دمای

مجموعه 20°C است، میله AC با پیچ و مهره سفت می‌شود. سپس، دمای استوانه برنجی تا 50°C افزایش می‌یابد ولی میله فولادی در 20°C می‌ماند. اگر قبل از تغییر دما تنش وجود نداشته باشد، تنش در استوانه را بیابید.

میله فولادی AC:

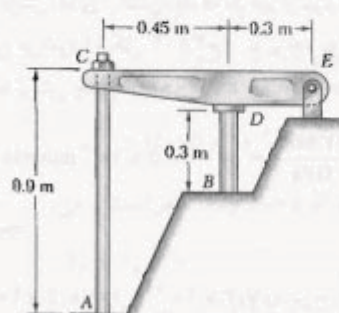
$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

استوانه برنجی BD:

$$E = 105 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$$



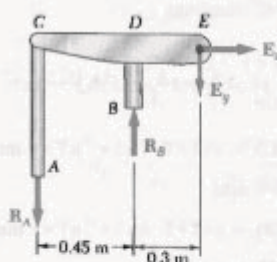
حل

استاتیک. نمره‌دار آزاد تمام مجموعه را رسم می‌کنیم و

می‌نویسیم

$$\sum M_B = 0: R_A (0.75 \text{ m}) - R_D (0.3 \text{ m}) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0.4 R_D \quad (1)$$



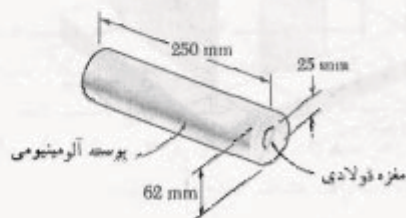
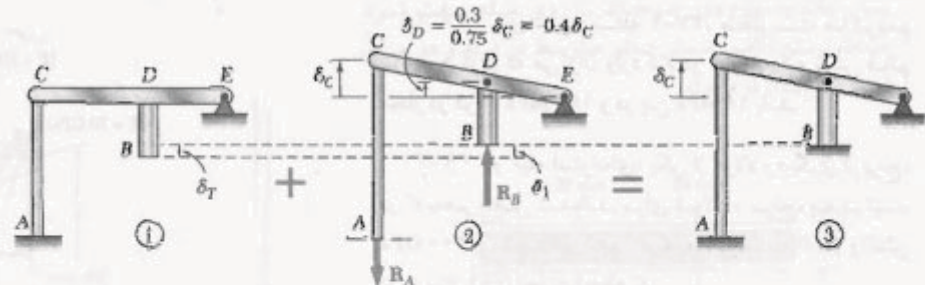
تغییر شکل‌ها. با در نظر گرفتن R_D به عنوان واکنش زائد، از روش ترکیب استفاده می‌کنیم. با حذف تکیه‌گاه B، افزایش دمای استوانه باعث می‌شود نقطه B به اندازه δ_T پایین آید. واکنش R_D باعث انحراف δ ، برابر با δ_T ، می‌شود. در نتیجه، انحراف نهایی B صفر است (شکل ۳).

انحراف δ_T . به علت افزایش دمای $30^\circ\text{C} = 50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}$

طول استوانه برنجی به اندازه δ_T افزایش می‌یابد:

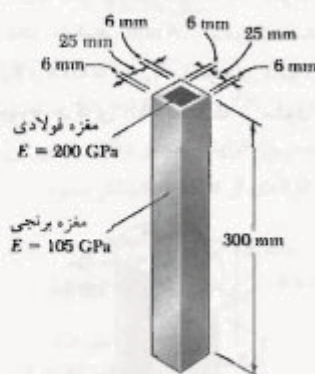
$$\delta_T = L (\Delta T) \alpha = (0.3 \text{ m})(30^\circ\text{C})(20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C})$$

$$= 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \downarrow$$



شکل ۲۳-۲

۳۴-۲ با اعمال یک نیروی محوری از جانب صفحات صلب انتهایی بر مجموعه، طول مجموعه به اندازه ۰٫۱۵ mm کاهش می‌یابد. مطلوبست: (الف) مقدار نیروی وارده، (ب) تنش در مغزه فولادی.



شکل ۲۴-۲

۳۵-۲ نیروی محوری مرکزی با مقدار $P = 450$ kN از صفحه صلب انتهایی بر قطعه مرکب وارد شده است. اگر $h = 10$ mm، مطلوبست: (الف) تنش قائم در مغزه برنجی، (ب) تنش قائم در صفحات آلومینیومی.

انحراف δ_1 . توجه داریم که $\delta_D = 0.4 \delta_C$ و $\delta_B/D = 0.75 \delta_C$

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A (0.9 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0.022 \text{ m})^2 (700 \text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-4} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0.4 \delta_C = 0.4 (11.84 \times 10^{-4} R_A) = 4.74 \times 10^{-4} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B (0.7 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0.02 \text{ m})^2 (100 \text{ GPa})} = 7.04 \times 10^{-4} R_B \uparrow$$

از (۱) دیده می‌شود که $R_A = 0.4 R_B$ و می‌نویسیم:

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74 (0.4 R_B) + 7.04 R_B] 10^{-4} = 5.94 \times 10^{-4} R_B \uparrow$$

$$\delta_T = \delta_1 : 1.88 \times 10^{-2} \text{ m} = 5.94 \times 10^{-4} R_B$$

$$\Rightarrow R_B = 31.7 \text{ kN}$$

تنش در استوانه:

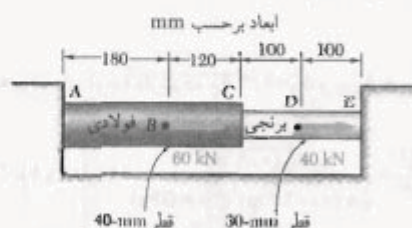
$$\sigma_B = \frac{R_B}{A} = \frac{31.7 \text{ kN}}{\frac{1}{4} \pi (0.02)^2} \Rightarrow \sigma_B = 44.8 \text{ MPa} \leftarrow$$

مسائل

۳۳-۲ نیروهای فشاری مرکزی ۲۶۰ kN از طریق صفحات صلب بر هر دوسر مجموعه نشان داده شده وارد شده‌اند. اگر $E_s = 200$ GPa و $E_a = 70$ GPa، مطلوبست: (الف) تنش قائم در هسته فولادی و در پوسته آلومینیومی، (ب) تغییر شکل مجموعه

۳۸-۲ برای ستون مسئله ۲-۳۷، مطلوبست ماکزیمم نیروی مرکزی که می‌توان وارد کرد در صورتی که تنش قائم مجاز در فولاد 160 MPa و در بتن 18 MPa باشد.

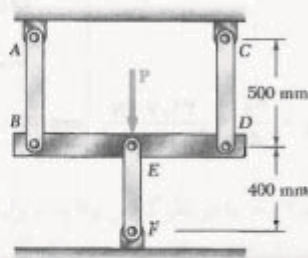
۳۹-۲ دو میله استوانه‌ای، یکی از فولاد و دیگری از برنج، در C به هم متصل شده‌اند. برای فولاد و برنج، به ترتیب، $E_s = 200 \text{ GPa}$ و $E_b = 105 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) واکنش در A و E ، (ب) انحراف نقطه C .



شکل م ۳۹-۲

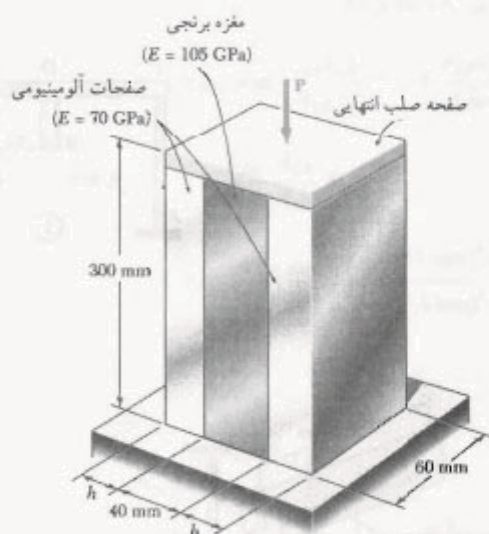
۴۰-۲ مسئله ۲-۳۹ را با این فرض حل کنید که میله AC از برنج و میله CE از فولاد باشد.

۴۱-۲ سه میله فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) با P با مقدار 36 kN را تحمل می‌کنند. مساحت مقطع عرضی میله‌های AB ، CD و EF ، به ترتیب، 200 mm^2 ، 200 mm^2 و 625 mm^2 است. مطلوبست: (الف) تغییر طول میله EF ، (ب) تنش در هر میله.



شکل م ۴۱-۲

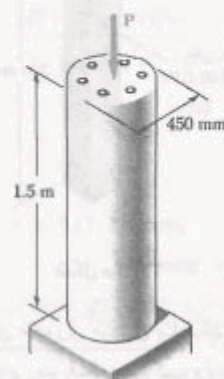
۴۲-۲ لوله آلومینیومی به طول 250 mm ، با قطر خارجی 36 mm و با قطر داخلی 28 mm است. یک میله برنجی به قطر 25 mm داخل این لوله قرار داده می‌شود. سپس، دو بوش پیچ‌دار در دو انتهای لوله پیچ می‌شود گام پیچ 1.5 mm است. برای آلومینیوم و برنج، به ترتیب، $E_a = 70 \text{ GPa}$ و $E_b = 105 \text{ GPa}$. چون میله کمی بلندتر از لوله است، بوش را



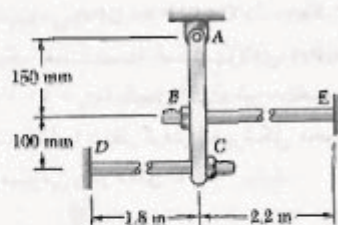
شکل م ۳۵-۲

۳۶-۲ برای قطعه مرکب نشان داده شده در مسئله ۲-۳۶، مطلوبست: (الف) مقدار h در صورتی که قسمت تحت بار صفحات آلومینیومی نصف قسمت تحت بار مغزه برنجی باشد، (ب) بار کل در صورتی که تنش در مغزه برنجی 80 MPa باشد.

۳۷-۲ ستون بتنی به طول 1.5 mm توسط شش میله فولادی، هر یک به قطر 28 mm ، تقویت شده است. اگر $E_c = 25 \text{ GPa}$ و $E_s = 200 \text{ GPa}$ ، تنش‌های قائم در فولاد و بتن را برای بار محوری مرکزی 1550 kN که بر ستون وارد می‌شود بیابید.

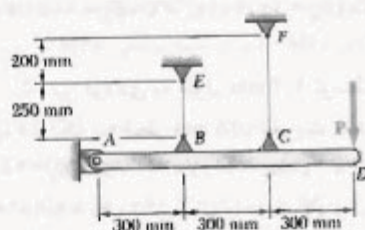


شکل م ۳۷-۲



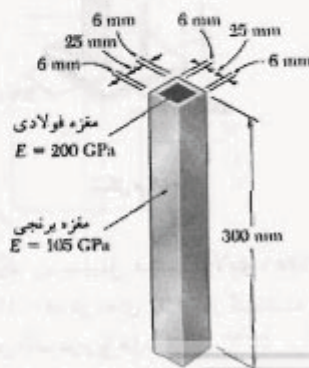
شکل م ۴۵-۲

۴۴-۲ میله صلب AD توسط دو سیم فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) به قطر 1.5 mm و مفصل A نگه داشته شده است. اگر سیم‌ها در ابتدا در حالت کشیده باشند، (الف) کشش اضافی در هر سیم را بر اثر اعمال بار P با مقدار 900 N در D بیابید، (ب) انحراف متناظر نقطه D را بیابید.



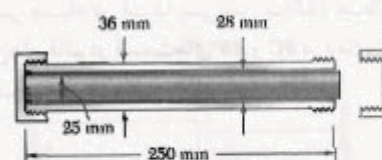
شکل م ۴۶-۲

۴۷-۲ پوسته برنجی ($\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) کاملاً به مغزه فولادی ($\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) متصل شده است. مطلوب‌ترین افزایش مجاز دما در صورتی که بخواهیم تنش در مغزه فولادی از 55 MPa بیشتر نشود.



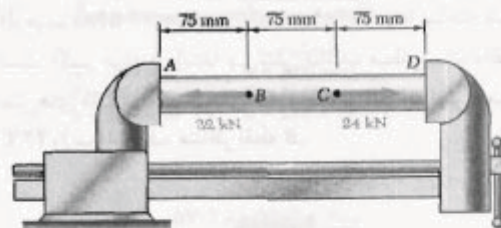
شکل م ۴۷-۲

باید یک چهارم دور چرخاند تا روی میله سفت شود. مطلوب‌ست: (الف) تنش قائم متوسط در لوله و در میله، (ب) انحراف لوله و میله.



شکل م ۴۲-۲

۴۳-۲ یک لوله فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) با قطر خارجی 30 mm و ضخامت 3 mm در گیره‌ای قرار گرفته است. این گیره طوری تنظیم می‌شود که فک‌هایش درست با دو انتهای لوله تماس می‌گیرند بدون اینکه فشار وارد کنند. سپس، دو نیروی نشان داده شده بر لوله وارد می‌شوند. پس از اعمال نیروها، گیره تنظیم می‌شود به طوری که فاصله بین فک‌هایش 0.2 mm کاهش می‌یابد. مطلوب‌ست: (الف) نیروی وارده از گیره بر لوله در A و D ، (ب) تغییر طول قسمت BC لوله.



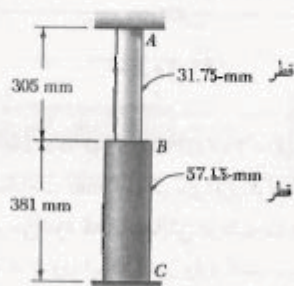
شکل م ۴۳-۲

۴۴-۲ مسئله ۴۳-۲ را با این فرض حل کنید که گیره، پس از اعمال نیروها، طوری تنظیم شود که فاصله بین فک‌هایش 0.1 mm کاهش یابد.

۴۵-۲ قطر هر یک از میله‌های فولادی BE و CD ($E = 200 \text{ GPa}$) برابر با 16 mm است. گام پیچ‌های انتهایی 2.5 mm است. مهره B ، پس از محکم شدن، به اندازه یک دور کامل سفت می‌شود. مطلوب‌ست: (الف) کشش در میله CD ، (ب) انحراف نقطه C عضو صلب ABC .

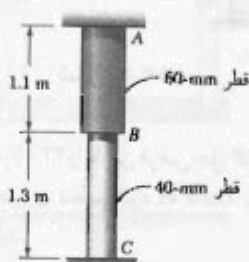


۵۲-۲ میل‌های از دو قسمت استوانه‌ای AB و BC تشکیل شده است و از دو انتها مسقیم است. قسمت AB از فولاد ($\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_s = 200 \text{ GPa}$) و قسمت BC از برنج ($\alpha_b = 18.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_b = 120 \text{ GPa}$) ساخته شده است. اگر میل در ابتدا بی‌تنش باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم در قسمت‌های AB و BC در دمای 18°C ، (ب) انحراف متناظر نقطه B .



شکل م ۵۲-۲

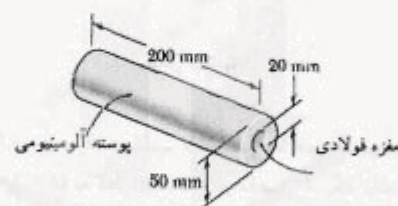
۵۳-۲ میل‌های از دو قسمت AB و BC تشکیل شده است و از دو انتها مسقیم است. قسمت AB از برنج ($\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_b = 105 \text{ GPa}$) و قسمت BC از آلومینیم ($\alpha_a = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_a = 72 \text{ GPa}$) ساخته شده است. اگر میل در ابتدا بی‌تنش باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم در قسمت‌های AB و BC بر اثر افزایش دمای 42°C ، (ب) انحراف متناظر نقطه B .



شکل م ۵۳-۲

۵۴-۲ در مسئله ۴۲-۲، تنش قائم متوسط را در لوله و میل با این فرض بیابید که مهره‌ها در دمای 15°C سفت شوند و دمای نهایی 55°C باشد، (برای آلومینیم، $\alpha = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ و برای برنج، $\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$).

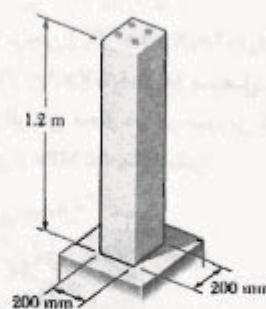
۴۸-۲ مجموعه نشان داده شده متشکل است از یک پوسته آلومینیومی ($\alpha_a = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_a = 70 \text{ GPa}$) که به یک هسته فولادی ($\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_s = 200 \text{ GPa}$) متصل است. این مجموعه در دمای 20°C فقط با در نظر گرفتن تغییر شکل محوری، تنش در پوسته آلومینیومی را در دمای 180°C بیابید.



شکل م ۴۸-۲

۴۹-۲ مسئله ۴۸-۲ را با این فرض حل کنید که هسته از برنج ($\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_b = 105 \text{ GPa}$) باشد.

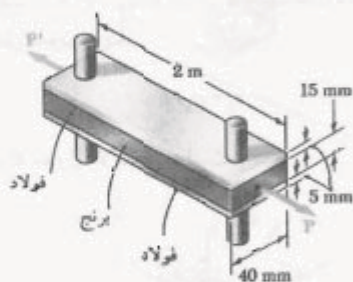
۵۰-۲ تیر فولادی به طول 1.2 mm توسط چهار میل فولادی، هر یک به قطر 18 mm تقویت شده است. اگر $E_c = 25 \text{ GPa}$, $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, $E_s = 200 \text{ GPa}$ و $\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، تنش قائم را در فولاد و بتن در دمای 27°C بیابید.



شکل م ۵۰-۲

۵۱-۲ یک ریل فولادی ($E = 200 \text{ GPa}$) در دمای 6°C کار گذاشته شده است. مطلوب است تنش قائم در ریل‌ها در دمای 52°C ، با این فرض که ریل‌ها: (الف) به هم جوش شده باشند و مسیر پیوسته‌ای را تشکیل داده باشند، (ب) به طول 12 m و با فاصله 6 mm از هم باشند.

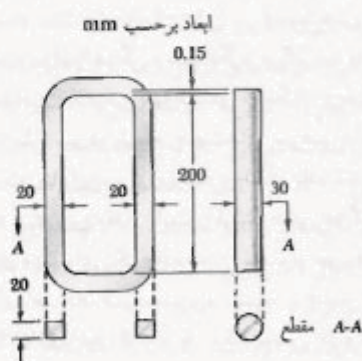
پس از ساخت، دمای میله‌های فولادی را به دمای اتاق برمی‌گردانند. مطلوبست: (الف) افزایش دمایی که برای جا زدن مفصل‌ها در میله‌های فولادی نیاز است. (ب) تنش در میله بزنجنی پس از اینکه تحت بار قرار می‌گیرد.



شکل م ۵۸-۲

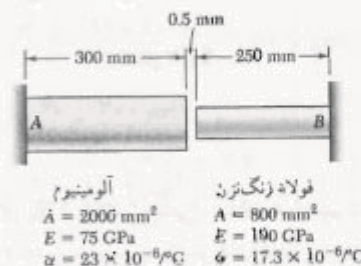
۵۹-۲ مطلوبست ماکزیمم بار P که می‌توان بر میله بزنجنی مسئله ۵۸-۲ وارد کرد در صورتی که بخواهیم تنش مجاز در میله‌های فولادی 30 MPa و در میله بزنجنی 25 MPa باشد.

۶۰-۲ یک بسازوی بسرنجنی ($E_b = 70 \text{ GPa}$ ، $E_s = 200 \text{ GPa}$) و یک میله فولادی ($\alpha_b = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ و $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) در دمای 20°C دارای ابعاد نشان داده شده‌اند. میله فولادی سرد می‌شود تا اینکه آزادانه در بازو جا می‌خورد. سپس، دمای کل مجموعه تا 150°C افزایش می‌یابد. مطلوبست: (الف) تنش قائم نهایی در میله فولادی، (ب) طول نهایی میله فولادی.



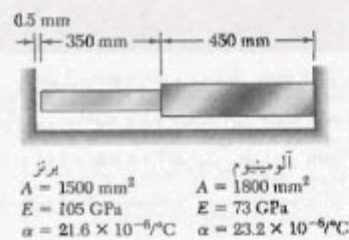
شکل م ۶۰-۲

۵۵-۲ در دمای اتاق (20°C) فاصله 0.5 mm بین دو انتهای میله‌های نشان داده شده وجود دارد. در لحظه بعد، وقتی دما به 140°C می‌رسد، مطلوبست: (الف) تنش قائم در میله آلومینیومی، (ب) تغییر طول میله آلومینیومی.



شکل م ۵۵-۲

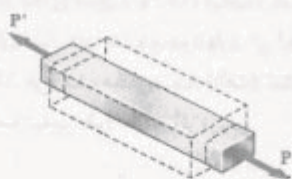
۵۶-۲ اگر در دمای 24°C فاصله 0.5 mm رجود داشته باشد، مطلوبست: (الف) دمایی که به ازای آن تنش قائم در میله آلومینیومی 75 MPa است، (ب) طول دقیق متناظر میله آلومینیومی.



شکل م ۵۶-۲ و ۵۷-۲

۵۷-۲ مطلوبست: (الف) نیروی فشاری در میله‌های نشان داده شده پس از اینکه دما به اندازه 82°C افزایش یابد، (ب) تغییر طول متناظر میله بزنجنی.

۵۸-۲ از دو میله فولادی ($E_s = 200 \text{ GPa}$ و $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) برای تقویت میله بزنجنی ($E_b = 105 \text{ GPa}$ و $\alpha_b = 21.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)، که تحت بار $P = 25 \text{ kN}$ قرار دارد، استفاده شده است. هنگام ساخت میله‌های فولادی، فاصله بین مراکز سوراخ‌هایی که برای تعبیه مفصل‌هاست به اندازه 0.5 mm کمتر از 2 m (فاصله مورد نیاز) در می‌آید. لذا، میله‌های فولادی را در کوره‌ای قرار می‌دهند تا طول آنها افزایش یابد به طوری که مفصل‌ها را بتوان جا زد.



شکل ۴۰-۲

یا

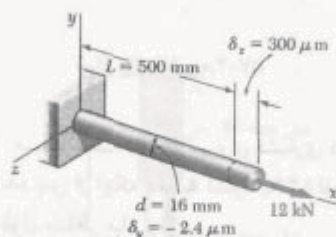
$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (۲۶-۲)$$

در معادله‌های بالا از علامت منفی استفاده می‌کنیم تا مقدار مثبتی برای ν به دست آید، زیرا کرنش‌های محوری و جانبی در تمام مواد صنعتی دارای علامت مخالف‌اند^{**}. با حل معادله (۲۶-۲) برای ϵ_y و ϵ_z و با توجه به معادله (۲۴-۲)،

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (۲۷-۲)$$

مثال ۷-۲

میله‌ای به طول ۵۰۰ mm و به قطر ۱۶ mm از ماده همگن و همسانگردی ساخته شده است. این میله تحت بار محوری ۱۲ kN به اندازه ۳۰۰ μ m افزایش طول و ۲/۴ μ m کاهش قطر می‌دهد. مدول الاستیسته و نسبت پواسون آن را بیابید.



شکل ۴۱-۲

* شاید فکر کنید به علت اثر ترکیبی کشیدگی محوری و انقباض عرضی، حجم میله ثابت می‌ماند، ولی اینطور نیست.

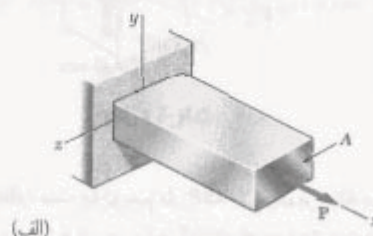
** البته، بعضی از مواد آزمایشی، مانند فوم‌های پلیمر، هنگام کشیدگی به‌طور جانبی منبسط می‌شوند. در این حالت، چون کرنش‌های محوری و جانبی دارای علامت یکسانند، نسبت پواسون این مواد منفی است (See Roderic Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio," *Science*, 27 February 1987, Volume 235, p. 1038-1040.)

۱۱-۲ نسبت پواسون

در قسمت اول این فصل دیدیم که وقتی میله باریک همگنی به‌طور محوری بارگذاری می‌شود، تا مادامی که ماده از حد الاستیک خود فراتر نرفته است، تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می‌کنند. اگر بار P در امتداد محور x وارد شود (شکل ۳۹-۲ الف)، $\sigma_x = P/A$ که در آن A مساحت مقطع عرضی است. طبق قانون هوک،

$$\epsilon_x = \sigma_x / E \quad (۲۴-۲)$$

که در آن E مدول الاستیسته است.



(الف)



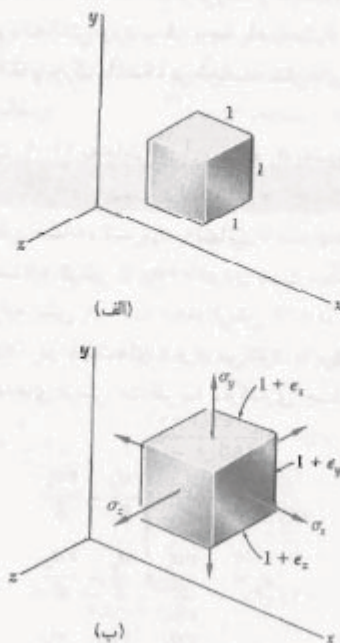
(ب)

شکل ۳۹-۲

گفتنی است که تنش‌های قائم وارد بر وجوه عمود بر محورهای y و z صفر هستند؛ یعنی، $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (شکل ۳۹-۲ ب). ولی، کرنش‌های ϵ_y و ϵ_z صفر نیستند. در تمام مواد، کشیدگی حاصل از اعمال نیروی محوری P با انقباض عرضی همراه است (شکل ۴۰-۲)*. در قسمت‌های ۱۲-۲ تا ۱۵-۲، تمام مواد را همگن و همسانگرد می‌گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم خواص مکانیکی آنها مستقل از مکان و جهت است. در نتیجه، کرنش نیز در تمام جهت‌های عرضی دارای مقدار یکسان است. بنابراین، برای بارگذاری نشان داده شده در شکل ۳۹-۲، $\epsilon_y = \epsilon_z$. این مقدار ثابت را کرنش جانبی می‌گویند. یکی از ثابت‌های مهم برای یک ماده معین، نسبت پواسون است که به افتخار ریاضی‌دان فرانسوی، سیمون دنیس پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰) نامیده شده و با حرف یونانی ν (نو) نشان داده می‌شود. برای بارگذاری نشان داده شده در شکل ۳۹-۲،

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \quad (۲۵-۲)$$

PNUEB



شکل ۴۳-۲

یک جزء مکعبی به ضلع واحد از ماده همسانگرد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۳-۲ الف). تحت بارگذاری چند محوری داده شده، این جزء به صورت مکعب مستطیلی به اضلاع $1 + \epsilon_x$ ، $1 + \epsilon_y$ و $1 + \epsilon_z$ در می‌آید، که در آن ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z کرنش قائم در سه جهت هستند (شکل ۴۳-۲ ب). بر اثر تغییر شکل سایر اجزاء، جزء تحت بررسی می‌تواند حرکت انتقالی نیز داشته باشد، ولی در اینجا فقط تغییر شکل واقعی جزء را در نظر گرفته‌ایم، نه هر تغییر مکان ممکن جسم صلب را.

برای بیان مولفه‌های کرنش ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z بر حسب مولفه‌های تنش σ_x ، σ_y و σ_z ، تأثیر هر مولفه تنش را به‌طور جداگانه در نظر می‌گیریم و با جمع این آثار به نتیجه دلخواه می‌رسیم. برای این منظور، از اصل ترکیب استفاده می‌کنیم. طبق این اصل، با تعیین جداگانه تأثیر بارهای مختلف و با ترکیب نتایج حاصل می‌توان تأثیر بارگذاری ترکیبی را بر یک سازه به‌دست آورد، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند:

۱- رابطه هر اثر با باری که این اثر را ایجاد می‌کند به صورت

خطی باشد.

۲- تغییر شکل ناشی از هر بار دارای مقدار کوچکی باشد و بر شرایط کاربرد سایر بارها تأثیر نگذارد.

مساحت مقطع عرضی میله،

$$A = \pi r^2 = \pi (8 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 201 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

با انتخاب محور x در امتداد محور میله (شکل ۴۱-۲)، می‌نویسیم:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{201 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 59.7 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300 \text{ } \mu\text{m}}{500 \text{ mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4 \text{ } \mu\text{m}}{16 \text{ mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

از قانون هوک، $\sigma_x = E \epsilon_x$ ، در نتیجه،

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7 \text{ MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5 \text{ GPa}$$

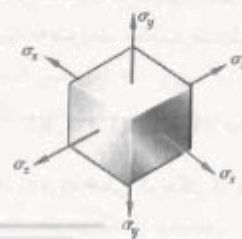
از معادله (۲-۲۶)،

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

۱۲-۲ بارگذاری چند محوری: قانون عمومی هوک

تا به حال، عضوهای باریکی را که تحت بار محوری قرار دارند بررسی کردیم. بار محوری در امتداد یک محور تنها وارد می‌شود. اگر این محور را محور x و نیروی داخلی در مکان خاصی را P بگیریم، مولفه‌های تنش متناظر عبارتند از $\sigma_x = P/A$ و $\sigma_y = 0$ و $\sigma_z = 0$.

حال، عضوهایی را در نظر می‌گیریم که تحت نیروهای وارده در سه جهت مختصاتی قرار دارند. این نیروها تنش‌های قائم غیر صفر σ_x ، σ_y و σ_z را ایجاد می‌کنند (شکل ۴۲-۲). این حالت را بارگذاری چند محوری می‌گویند. گفتنی است که حالت تنش موجود مانند حالت کلی تنش در قسمت ۱-۱۲ نیست، زیرا تنش برشی در شکل ۴۲-۲ وجود ندارد.



شکل ۴۲-۲

اما،

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \delta_x / AB = (-300 \times 10^{-6} \text{ mm}) / (100 \text{ mm}) \\ &= -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

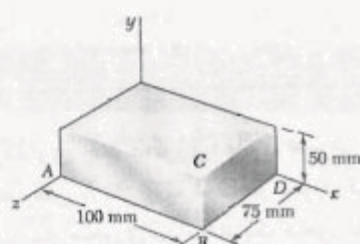
لذا،

$$\delta_y = \epsilon_y (BC) = (-300 \times 10^{-6}) (50 \text{ mm}) = -15 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\delta_z = \epsilon_z (BD) = (-300 \times 10^{-6}) (75 \text{ mm}) = -22.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(ب) فشار از معادله (۲۹-۲)،

$$\begin{aligned}p &= -\frac{E\epsilon_x}{1-2\nu} = -\frac{(200 \text{ GPa})(-300 \times 10^{-6})}{1-0.58} \\ p &= 142.9 \text{ MPa}\end{aligned}$$



شکل ۴۴-۲

۳-۱۳ اتساع: مدول کپه‌ای

در این قسمت، اثر تنش‌های قائم σ_x ، σ_y و σ_z وارد بر جزء حجم یک ماده همسانگرد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، جزء نشان داده شده در شکل ۴۴-۲ را در نظر می‌گیریم. این جزء در حالت بی‌تنش به شکل مکعب با حجم واحد است، و تحت تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z به صورت مکعب مستطیل با حجم زیر درمی‌آید:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

چون کرنش‌های ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z خیلی کوچکتر از واحد هستند، از حاصلضرب آنها صرف‌نظر می‌شود. در نتیجه،

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

در بارگذاری چند محوری، شرط اول وقتی برقرار می‌شود که تنش‌ها از حد تناسب ماده فراتر نروند، و شرط دوم نیز وقتی برقرار می‌شود که تنش وارد بر هر وجه باعث نشود تغییر شکل سایر وجوه آنقدر بزرگ باشد که بر محاسبه تنش‌های وارد بر آن وجوه تأثیر بگذارد.

از قسمت ۲-۱۱ به‌خاطر می‌آوریم که σ_x به‌تنهایی باعث ایجاد کرنش σ_x/E در جهت x و کرنش در جهت‌های y و z می‌شود. به‌طور مشابه، تنش σ_y به‌تنهایی باعث ایجاد کرنش σ_y/E در جهت y و کرنش $-\nu\sigma_y/E$ در دو جهت دیگر می‌شود. سرانجام، مولفه تنش σ_z باعث ایجاد کرنش σ_z/E در جهت z و کرنش $-\nu\sigma_z/E$ در جهت‌های x و y می‌شود. با ترکیب نتایج حاصل، مولفه‌های کرنش متناظر با بارگذاری چند محوری عبارتند از:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned} \quad (28-2)$$

رابطه‌های (۲۸-۲) را قانون عمومی هوک برای بارگذاری چندمحوری یک ماده همگن همسانگرد می‌گویند. همانطور که قبلاً گفتیم، نتایج حاصل فقط تا وقتی صحت دارند که تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند و تغییر شکل‌ها کوچک باشند. مقدار مثبت برای مولفه تنش می‌رساند که این مولفه کششی است، و مقدار منفی می‌رساند که فشاری است. به‌طور مشابه، مقدار مثبت برای مولفه کرنش به معنای انبساط و مقدار منفی به معنای انقباض است.

مثال ۸-۲

قطعه فولادی نشان داده شده (شکل ۴۴-۲) تحت فشار یکنواختی است که بر تمام وجوه آن وارد می‌شود. اگر تغییر طول ضلع AB برابر با $30 \times 10^{-3} \text{ mm}$ باشد، مطلوب است: (الف) تغییر طول دو ضلع دیگر، (ب) فشار P وارده بر وجوه قطعه. فرض کنید $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.29$.

(الف) تغییر طول اضلاع دیگر. با جایگذاری

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ در رابطه‌های (۲۸-۲)، دیده می‌شود که مولفه کرنش دارای مقدار یکسان زیر هستند:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \quad (29-2)$$



از طرف دیگر، یک ماده ایده‌آل با $\nu = \frac{1}{2}$ ($k = \infty$) کاملاً تراکم‌ناپذیر است ($e = 0$). در ناحیه الاستیک $\nu < \frac{1}{2}$ ، لذا، از معادله ۳۱-۲ نتیجه می‌شود کشیدگی یک ماده در یک جهت باعث افزایش حجم آن می‌شود (مثلاً، در جهت x ، $\sigma_x > 0$ و $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ، در نتیجه، $e > 0$).

مثال ۲-۹

تغییر حجم قطعه فولادی نشان داده شده را تحت تأثیر فشار هیدروستاتیکی $p = 180 \text{ MPa}$ بسایید. $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.29$.

از معادله (۳۳-۲)، مدول کپهای فولاد را می‌یابیم:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3(1 - 0.58)} = 158.7 \text{ GPa}$$

از معادله (۳۴-۲)،

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158.7 \text{ GPa}} = -1.134 \times 10^{-3}$$

حجم قطعه در حالت بی تنش برابر است با:

$$V = (80 \text{ mm})(40 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 192 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

e تغییر حجم واحد است، یعنی $e = \Delta V / V$ ، در نتیجه،

$$\Delta V = eV = (-1.134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3 \text{ mm}^3) \\ \Delta V = -218 \text{ mm}^3$$

۲-۱۴ کرنش برشی

در قسمت ۲-۱۲، هنگام استنتاج رابطه‌های (۲۸-۲) بین تنش‌های قائم و کرنش‌های قائم در یک ماده همگن و همسانگرد، فرض کردیم که تنش برشی وجود ندارد. در حالت کلی‌تر شکل ۲-۴۵، تنش‌های برشی τ_{xy} ، τ_{yz} و τ_{zx} (و نیز، تنش‌های برشی متناظر τ_{yx} ، τ_{zy} ، τ_{xz}) وجود دارند. این تنش‌ها تأثیری روی کرنش‌های قائم ندارند و تا وقتی تمام تغییرشکل‌های موجود کوچک هستند، بر استنتاج یا صحت

* چون اتساع e تغییر حجم را نشان می‌دهد، از وضعیت جزء تحت بررسی مستقل است. لذا، از معادله‌های (۳۰-۲) و (۳۱-۲) نتیجه می‌شود که کمیت‌های $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ و $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ نیز مستقل از وضعیت جزء هستند. این خاصیت را در فصل ۷ اثبات می‌کنیم. ** در ناحیه پلاستیک، حجم ماده تقریباً ثابت می‌ماند.

اگر تغییر حجم جزء را با e نشان دهیم، داریم:

$$e = v - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

یا

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (30-2)$$

چون این جزء در ابتدا دارای حجم واحد بوده است، کمیت e تغییر حجم واحد را نشان می‌دهد و آن را اتساع ماده می‌گویند. با جایگذاری ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z از معادله (۲۸-۲) در معادله (۳۰-۲)،

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (31-2)^*$$

در حالت خاصی که جسم تحت فشار یکنواخت هیدروستاتیکی p قرار دارد، هر یک از مولفه‌های تنش برابر با p است. از معادله (۳۱-۲)،

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E} p \quad (32-2)$$

با تعریف ثابت زیر،

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (33-2)$$

معادله (۳۲-۲) به صورت زیر در می‌آید:

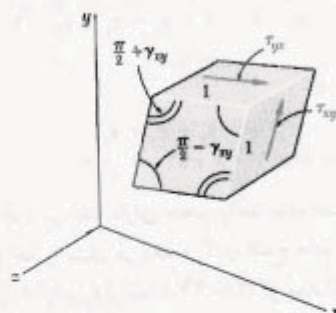
$$e = -\frac{p}{k} \quad (34-2)$$

ثابت k را مدول کپهای یا مدول تراکم ماده می‌گویند، و مانند مدول الاستیسیته E برحسب پاسکال است.

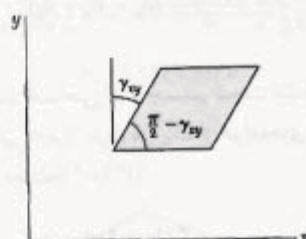
ماده پایداری که تحت فشار هیدروستاتیکی است فقط کاهش حجم می‌دهد؛ لذا اتساع e در معادله (۳۴-۲) منفی است یعنی، مدول کپهای k یک کمیت مثبت است. با توجه به معادله (۳۳-۲)، $e > 0$ یا $\frac{1}{2} > \nu$. اما، طبق قسمت ۲-۱۱، برای تمام مواد صنعتی دارای مقدار مثبت است. لذا، برای این مواد،

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (35-2)$$

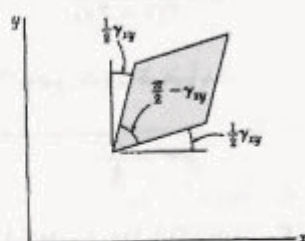
گفتنی است ماده ایده‌آلی که مقدار ν آن صفر است می‌تواند در یک جهت کشیده شود بدون اینکه انقباض جانبی داشته باشد.



شکل ۴۷-۲



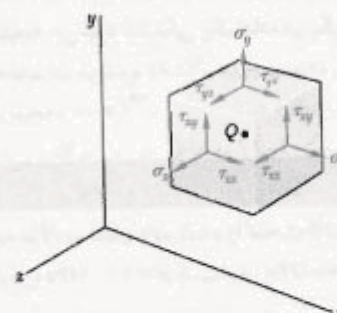
شکل ۴۸-۲



شکل ۴۹-۲

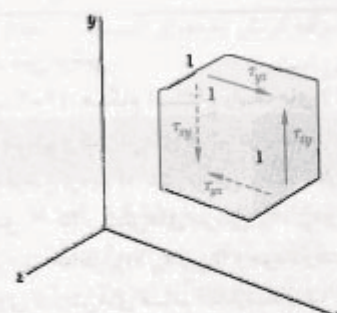
* طبق قسمت ۱-۱۲، $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

** بعضی مؤلفین، در تعریف کرنش γ_{xy} فرض می‌کنند که تغییر شکل واقعی جزء با چرخش صلب‌گونه‌ای همراه است که در آن وجوه افقی جزء نمی‌چرخند. لذا کرنش γ_{xy} را با زاویه چرخش دو جزء دیگر نشان می‌دهند (شکل ۴۸-۲). بعضی دیگر چرخش صلب‌گونه‌ای را در نظر می‌گیرند که در آن وجوه افقی به اندازه $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ پادساعتگرد، و وجوه عمودی به اندازه $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ ساعتگرد می‌چرخند (شکل ۴۹-۲). در این کتاب ترجیح می‌دهیم کرنش برشی γ_{xy} را به جای اینکه چرخش بک وجه معین تحت شرایط محدودی بگیریم، به عنوان تغییر زاویه بین دو وجه در نظر بگیریم.



شکل ۴۵-۲

رابطه‌های (۲-۲۸) تأثیر نمی‌گذارند. البته، تنش‌های برشی گرایش دارند جزء مکعبی را به صورت مکعب مستطیل مایل درآورند. ابتدا، یک جزء مکعبی با اضلاع واحد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۶-۲). فقط تنش‌های برشی τ_{xy} و τ_{yx} بر وجوهی از این جزء که، به ترتیب، بر محورهای x و y عمودند وارد می‌شوند و آن را به صورت متوازی‌السطوحی با اضلاع واحد در می‌آورند (شکل ۴۷-۲). دو تا از زوایای بین چهار وجهی که تحت تنش قرار دارند از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4} - \gamma_{xy}$ کاهش می‌یابند، و دو نای دیگر از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4} + \gamma_{xy}$ افزایش می‌یابند. زاویه کوچک γ_{xy} (که برحسب رادیان بیان می‌شود) کرنش برشی متناظر با امتدادهای x و y است. اگر زاویه بین دو وجهی که در جهت‌های مثبت محورهای x و y هستند در ضمن تغییر شکل جزء کاهش یابد (شکل ۴۷-۲)، کرنش برشی مثبت است؛ در غیر این صورت، منفی است.



شکل ۴۶-۲

بر اثر تغییر شکل سایر اجزاء، جزء تحت بررسی می‌تواند دستخوش چرخش کلی نیز بشود. ولی، همانطور که در بررسی کرنش‌های قائم داشتیم، در اینجا فقط تغییر شکل واقعی جزء را در نظر می‌گیریم، نه هر گونه تغییر مکان ممکن صلب‌گونه‌ای**.



حال، جزء کوچکی از ماده‌ای را که تحت تنش‌های برشی τ_{xy} و τ_{yz} قرار دارد (شکل ۲-۵۰ الف) در نظر گرفته، و کرنش برشی γ_{yz} را به عنوان تغییر زاویه بین وجوهی که تحت تنش قرار دارند تعریف می‌کنیم. به طور مشابه، با در نظر گرفتن میزنی که تحت تنش‌های برشی τ_{yz} و τ_{zx} قرار دارد (شکل ۲-۵۰ ب)، کرنش برشی γ_{zx} را تعریف می‌کنیم. اگر تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند، دو رابطه اضافی زیر داریم:

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (۳۷-۲)$$

که در آن ثابت G همان است که در معادله (۳۶-۲) به کار رفت. برای حالت کلی تنش داده شده در شکل ۲-۴۵ و تا وقتی که هیچ یک از تنش‌های موجود از حد تناسب فراتر نرفته‌اند، با استفاده از اصل ترکیب می‌توان نتایج این قسمت و قسمت ۲-۱۲ را با هم ترکیب کرد. برای ماده همگن و همسانگردی که تحت کلی‌ترین حالت تنش است، گروه معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (۳۸-۲)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

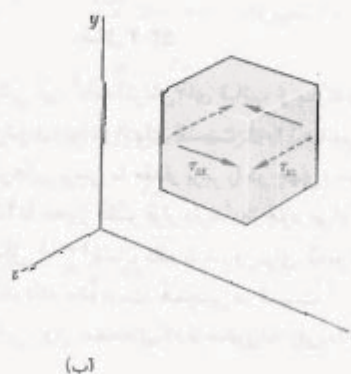
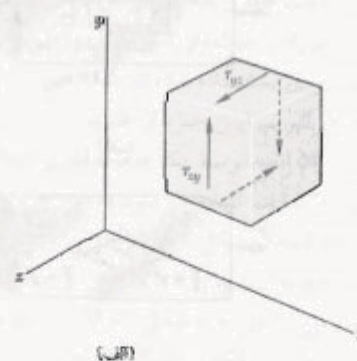
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

برای هر ماده‌ای فقط باید دو تا از این ثابت‌ها را به طور آزمایشی تعیین کرد. همانطور که در قسمت بعد خواهید دید، ثابت سوم را با محاسبه بسیار ساده‌ای می‌توان به‌دست آورد.

با ترسیم مقدار τ_{xy} برحسب مقدار γ_{xy} ، نمودار تنش-کرنش برشی به‌دست می‌آید. همانطور که در فصل ۳ خواهید دید، این کار با آزمایش پیش انجام می‌شود. نمودار حاصل مشابه است با نمودار تنش-کرنش قائم که از آزمایش کشش به‌دست می‌آید. ولی، استقامت تسلیم برشی، استقامت نهایی برشی و غیره تقریباً نصف استقامت تسلیم کششی، استقامت نهایی کششی و غیره است. همانطور که در بررسی کرنش‌ها و تنش‌های قائم داشتیم، قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش برشی یک خط راست است. در مواد همگن و همسانگرد و در حالتی که مقدار تنش برشی از حد تناسب برش بیشتر نیست، داریم:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (۳۹-۲)$$

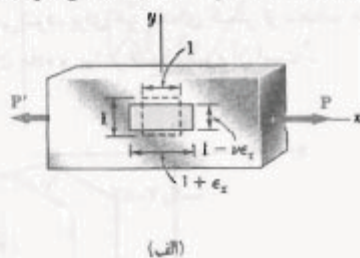
این رابطه را قانون هوک برای تنش و کرنش برشی، و ثابت G را مدول صلابت یا مدول برشی ماده می‌گویند. کرنش زاویه‌ای γ_{xy} برحسب رادیان و بی‌بعد است مدول G ، که مانند τ_{xy} برحسب پاسکال بیان می‌شود، برای هر ماده‌ای کمتر از نصف مدول الاستیسته E آن ماده و بیشتر از یک سوم آن است*.



۲-۱۵ توضیح بیشتر درباره تغییر شکل ها در

بارگذاری محوری؛ رابطه بین E و G

فرض کنید میله باریکی تحت بار کششی P ، واقع در جهت x ، قرار می گیرد. در قسمت ۲-۱۱ دیدیم که این میله در جهت x کشیده می شود و در جهت های y و z منقبض می شود. اگر ϵ_x کرنش محوری باشد، کرنش های جانبی با $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$ بیان می شوند، که در آن ν نسبت پواسون است. لذا، یک جرم مکعبی، به ضلع واحد (شکل ۲-۵۳ الف) به صورت مکعب مستطیل با اضلاع $1 + \epsilon_x$ ، $1 - \nu \epsilon_x$ و $1 - \nu \epsilon_x$ در می آید. (فقط یک وجه این جزء در شکل نشان داده شده است). از سوی دیگر، اگر این جزء تحت زاویه 45° نسبت به محور بار قرار داشته باشد (شکل ۲-۵۳ ب)، وجه نشان داده شده در شکل به صورت لوزی در می آید. یعنی، بار محوری P باعث می شود کرنش برشی γ' برابر با افزایش یا کاهش هر یک از زوایای نشان داده شده در شکل ۲-۵۳ ب، در این جزء به وجود آید*.



(الف)



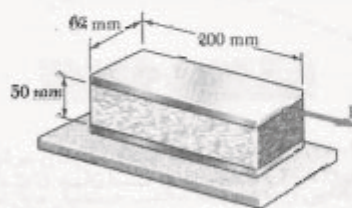
(ب)

شکل ۲-۵۳

کرنش های برشی نیز، مانند کرنش های قائم، از بارگذاری محوری ناشی می شوند زیرا در انتهای قسمت ۱-۱۲ دیدیم که بار محوری P تنش های برشی با مقدار برابر را در چهار وجهی که تحت زاویه 45° با محور عضو قرار دارند به وجود می آورد. این موضوع در شکل ۱-۴۰ نشان داده شد، و برای سهولت مجدداً در اینجا نشان داده شده است. همچنین در قسمت ۱-۱۱ دیدیم که تنش برشی روی صفحه ای که با محور بار زاویه 45°

* توجه کنید که بار P باعث ایجاد کرنش های قائم در جزء نشان داده شده در شکل ۲-۵۳ ب نیز می شود (به مسئله ۲-۷۴ نگاه کنید).

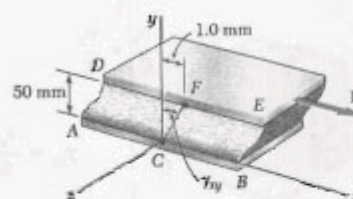
قطعه مستطیلی، که از ماده ای با مدول صلابت $G = 630 \text{ MPa}$ ساخته شده است، به دو صفحه صلب افقی متصل است. صفحه پایینی ثابت است و صفحه بالایی تحت تأثیر نیروی افقی P قرار دارد (شکل ۲-۵۱). صفحه بالایی تحت تأثیر این نیرو به اندازه 1 mm حرکت می کند. مطلوب است: (الف) کرنش برشی در ماده، (ب) نیروی P وارد بر صفحه بالایی.



شکل ۲-۵۱

(الف) کرنش برشی. محورهای مختصات را در جهت های نشان داده شده، و مبدأ را در نقطه میانی C از ضلع AB در نظر می گیریم (شکل ۲-۵۲). طبق تعریف، کرنش برشی γ_{xy} با زاویه بین عمود و خط CF ، که نقاط میانی اضلاع AB و DE را به هم متصل می کند، برابر است. چون این زاویه کوچک است،

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \Rightarrow \gamma_{xy} = 0.02 \text{ rad}$$



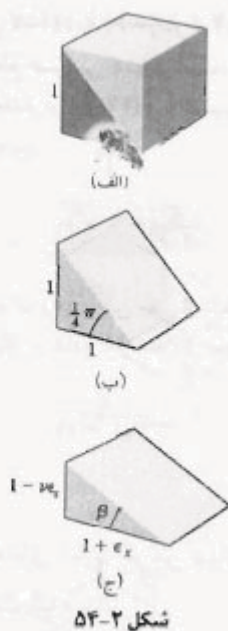
شکل ۲-۵۲

(ب) نیروی وارد بر صفحه بالایی. ابتدا، تنش برشی τ_{xy} را می یابیم. با استفاده از قانون هوک،

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (630 \text{ MPa})(0.02 \text{ rad}) = 12.6 \text{ MPa}$$

نیروی وارد بر صفحه بالایی چنین است:

$$P = \tau_{xy} A = (12.6 \text{ MPa})(200 \text{ mm})(50 \text{ mm}) = 156.4 \text{ kN}$$



از شکل ۲-۵۴ ج.

$$\tan \beta = \frac{1 - \nu \epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \quad (۴۰-۲)$$

عضوهای سمت راست (۲-۳۹) و (۲-۴۰) را مساوی هم قرار می‌دهیم و γ_m را می‌یابیم:

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu) \epsilon_x}{1 + \frac{1 - \nu}{2} \epsilon_x}$$

چون $\epsilon_x \ll 1$ ، مخرج عبارت بالا را می‌توان واحد گرفت. در نتیجه،

$$\gamma_m = (1 + \nu) \epsilon_x \quad (۴۱-۲)$$

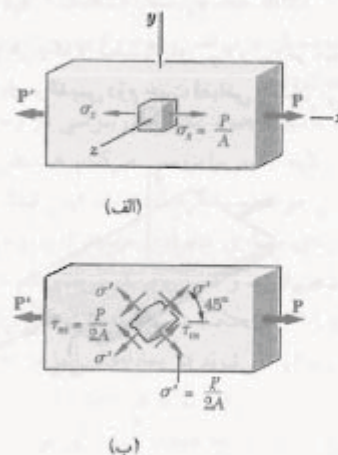
که رابطه دلخواه بین ماکزیمم کرنش برشی γ_m و کرنش محوری ϵ_x است.

برای تعیین رابطه میان ثابت‌های E ، ν و G از قانون هوک استفاده می‌کنیم. طبق این قانون، $\gamma_m = \tau_m / G$ و در بارگذاری محوری، $\epsilon_x = \sigma_x / E$ ، لذا، معادله (۲-۴۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{\tau_m} \quad (۴۲-۲)$$

دارد دارای مقدار ماکزیمم است. طبق قانون هوک، کرنش برشی γ' برای جزء شکل ۲-۵۳ به نیز ماکزیمم است؛ یعنی $\gamma' = \gamma_m$.



شکل ۱-۴۰ (تکراری)

مطالعه تبدیلات تنش را تا فصل ۷ به تعویق می‌اندازیم. و در این قسمت فقط رابطه بین کرنش برشی ماکزیمم $\gamma_m = \gamma'$ و کرنش قائم ϵ_x در جهت بار را به دست می‌آوریم. برای این منظور، جزء منشوری نشان داده شده در شکل‌های ۲-۵۴ الف و ب را در نظر می‌گیریم. این جزء از طریق برش جزء مکعبی در شکل ۲-۵۳ الف توسط یک صفحه قطری ایجاد شده است. از شکل ۲-۵۳ الف نتیجه می‌شود که این جزء جدید به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۵۴ ج درمی‌آید، که وجوه افقی و عمودی آن، به ترتیب، $1 + \epsilon_x$ و $1 - \nu \epsilon_x$ است. اما زاویه بین وجوه مایل و افقی جزء شکل ۲-۵۴ ب دقیقاً نصف یکی از زوایای قائم جزء مکعبی نشان داده شده در شکل ۲-۵۳ ب است. لذا، تغییر زاویه فوق‌الذکر نصف $\pi/2 - \gamma_m$ است.

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

با کاربرد فرمول تانژانت تفاضل زوایا، داریم

$$\tan \beta = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan \frac{\gamma_m}{2}}$$

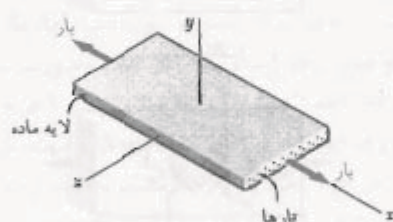
چون $\gamma_m/2$ خیلی کوچک است،

$$\tan \beta = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}} \quad (۳۹-۲)$$

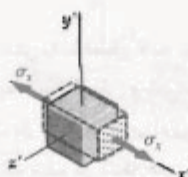
نسبت‌های پواسون متناظر دارای مقادیر متفاوت‌اند:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad \text{و} \quad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (۴۴-۲)$$

اندیس اول در هر یک از نسبت‌های ν_{xz} و ν_{xy} در معادله‌های (۴۴-۲) امتداد بار، و اندیس دوم جهت انقباض را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۵۵-۲

از بحث بالا نتیجه می‌شود که در حالت بارگذاری چند محوری یک لایه از ماده مرکب، برای توصیف رابطه تنش- کرنش می‌توان از معادله‌های مشابه با معادله‌های (۲۸-۲) استفاده کرد. ولی، در حال حاضر، با سه مدول الاستیسته مختلف و شش نسبت پواسون متفاوت سر و کار داریم. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

معادله‌های (۴۵-۲) را به عنوان تبدیلات تنش-کرنش برای لایه داده شده می‌توان در نظر گرفت. از این تبدیلات نتیجه می‌شود که ضرایب مولفه‌های تنش متقارن هستند؛ یعنی،

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z} \quad (۴۶-۲)$$

با توجه به شکل ۴۰-۱، $\sigma_x = P/A$ و $\tau_m = P/2A$ که در آن A مساحت مقطع عرضی عضو است. لذا، $\sigma_x/\tau_m = 2$. جایگذاری این مقدار در (۴۲-۲) و با تقسیم عضوهای آن بر ۲، رابطه زیر را می‌یابیم:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad (۴۳-۲)$$

از رابطه بالا می‌توان برای تعیین یکی از ثابت‌های E ، ν یا G از روی دو ثابت دیگر استفاده کرد. مثلاً، از معادله (۴۳-۲)،

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (۴۳'-۲)$$

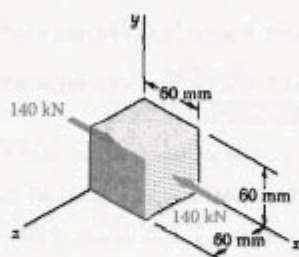
۲-۱۶ رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار

در قسمت ۲-۵، مواد مرکب تقویت شده با تار به‌طور خلاصه بررسی شدند. در آن قسمت نشان دادیم که این مواد را با استقرار تارهای یک ماده محکم و سفت در داخل ماده ضعیف‌تر و نرم‌تری، به نام ماتریس، می‌سازند. همچنین، نشان دادیم که رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم متناظر در یک لایه از ماده مرکب بستگی به جهت اعمال بار دارد. بنابراین، برای توصیف رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم، مدول‌های مختلف الاستیسته E_x ، E_y و E_z مورد نیازند (زیرا ممکن است بار به موازات تارها، در امتداد عمود بر لایه یا در جهت عرضی وارد شود).

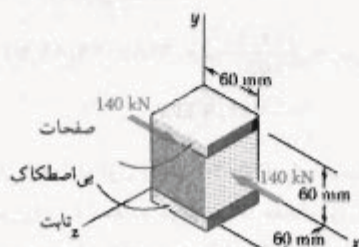
مجدداً لایه ماده مرکب توصیف شده در قسمت ۲-۵ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تحت بار کششی تک محوری قرار دارد. این بار به موازات تارهای لایه، یعنی در جهت x (شکل ۵۵-۲الف)، وارد می‌شود. برای سهولت، یک ماده خیالی همگن را که خواص آن از ترکیب خواص تارها و ماتریس به‌دست آمده است در نظر می‌گیریم. حال، جزء کوچکی از این ماده را انتخاب می‌کنیم (شکل ۵۵-۲ب). تنش قائم متناظر را با σ_x نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که $\sigma_y = \sigma_z = 0$ همانطور که در قسمت ۲-۵ نشان داده شد، کرنش قائم متناظر در امتداد x عبارت است از $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$ ، که در آن E_x مدول الاستیسته ماده مرکب در جهت x است.

همانطور که برای مواد همسانگرد دیدیم، کشیدگی ماده در جهت x با انقباض در جهت‌های y و z همراه است. این انقباض‌ها به نحوه استقرار تارها در ماتریس بستگی دارد و معمولاً مقادیر مختلفی دارند. در نتیجه، کرنش‌های جانبی ϵ_y و ϵ_z و نیز

صفحه بی اصطکاک ثابت از انبساط آن در امتداد y جلوگیری کنند (شکل ۲-۵۷).



شکل ۲-۵۶



شکل ۲-۵۷

(الف) انبساط آزاد در امتدادهای y و z . تنش σ_x را در امتداد بارگذاری می‌پاییم:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0.060 \text{ m})(0.060 \text{ m})} = -38,89 \text{ MPa}$$

چون مکعب در امتدادهای y و z بارگذاری نشده است و مقید نیست، $\sigma_y = \sigma_z = 0$. با جایگذاری داده‌ها در معادله‌های ۲-۴۵، داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38,89 \text{ MPa}}{155,0 \text{ GPa}} = -250,9 \times 10^{-6} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0,248)(-38,89 \text{ MPa})}{155,0 \text{ GPa}} \\ &= +62,22 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = \frac{(0,248)(-38,89 \text{ MPa})}{155,0 \text{ GPa}} \\ &= +62,22 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

* برای اطلاعات بیشتر درباره مواد مرکب تقویت شده با تار، نگاه کنید به Hyer, M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, McGraw-Hill, New York, 1998.

این معادله‌ها نشان می‌دهند که نسبت‌های پواسون ν_{yx} و ν_{xy} گرچه متفاوت‌اند اما از هم مستقل نیستند، و اگر مدول‌های الاستیسته متناظر معلوم باشند، هر یک از آنها را از دیگری می‌توان به‌دست آورد. همین موضوع برای ν_{yz} و ν_{zy} و برای ν_{zx} و ν_{xz} صحت دارد.

حال، تأثیر وجود تنش‌های برشی در وجوه یک جزء کوچک از لایه ترکیبی را بررسی می‌کنیم. همانطور که در قسمت ۲-۱۴ برای مواد همسانگرد گفته شد، این تنش‌ها به صورت زوج بردارهای مابوی متضادی هستند که بر وجوه متقابل یک جزء وارد می‌شوند و تأثیری بر کرنش‌های قائم ندارند. لذا، معادله‌های (۲-۵۴) صحت دارند. البته، تنش‌های برشی باعث ایجاد کرنش‌های برشی می‌شوند که معادله‌های آنها مشابه سه معادله آخر (۲-۳۸) است، با این تفاوت که در اینجا باید از سه مدول صلابت مختلف G_{yz} ، G_{zx} و G_{xy} استفاده کرد. به این ترتیب،

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \quad (2-47)$$

موادی را که مؤلفه‌های کرنش ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z آنها فقط به تنش‌های قائم بستگی دارند مواد اورتوتروپیک می‌گویند و با همین خاصیت از مواد ناهمسانگرد تفکیک می‌شوند.

همانطور که در قسمت ۲-۵ دیدیم، با ترکیب تعدادی لایه می‌توان یک پوسته تخت به‌دست آورد. اگر تارها در تمام لایه‌ها دارای وضعیت یکسان باشند، پوسته مقاومت بیشتری در برابر بار کششی محوری دارد و از نوع اورتوتروپیک خواهد بود. اگر بعضی از لایه‌های پوسته طوری قرار گیرند که تارهای آنها تحت زاویه عمود بر تارهای سایر لایه‌ها باشد، پوسته دارای پایداری جانبی بیشتری است و مجدداً از نوع اورتوتروپیک است. از سوی دیگر، اگر هر یک از لایه‌ها طوری قرار گیرند که تارهای آنها به موازات تارهای سایر لایه‌ها نباشد و عمود بر آنها نیز نباشد، پوسته اورتوتروپیک نخواهد بود.*

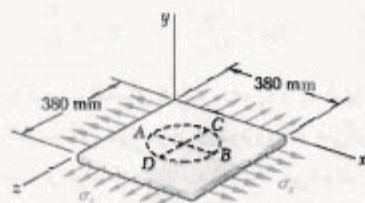
مثال ۲-۱۱

مکعبی به ضلع ۶۰ mm از لایه‌های اپوکسی گرافیت، که تارهای آن در امتداد x است، ساخته شده است. این مکعب تحت بار فشاری ۱۴۰ kN در امتداد x قرار دارد. خواص این ماده مرکب عبارتند از: $E_y = 12,10 \text{ GPa}$ ، $E_x = 155 \text{ GPa}$ ، $E_z = 12,10 \text{ GPa}$ و $\nu_{yz} = 0,248$ ، $\nu_{xy} = 0,248$ ، $\nu_{zx} = 0,458$. با این فرض که (الف) مکعب در امتدادهای y و z آزادانه منبسط شود (شکل ۲-۵۶)؛ (ب) مکعب در امتداد z آزادانه منبسط شود، اما در

با مقایسه نتایج قسمت‌های الف و ب، دیده می‌شود که اختلاف بین مقادیر δ_y در امتداد تارها ناچیز است. ولی، اختلاف بین مقادیر تغییر شکل جانبی δ_z ناچیز نیست. بدیهی است که وقتی مکعب نتواند در امتداد y تغییر شکل دهد، تغییر شکل جانبی δ_z بیشتر خواهد بود.

مسئله نمونه ۲-۵

سوراخی به قطر $d = 225 \text{ mm}$ روی یک ورق بی‌تنش آلومینیومی با ضخامت $t = 18 \text{ mm}$ با سوزن خط‌کشی شده است. نیروهای وارد بر ورق باعث ایجاد تنش‌های قائم $\sigma_x = 84 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 140 \text{ MPa}$ شده‌اند. برای $E = 70 \text{ GPa}$ و $\nu = \frac{1}{3}$ ، مطلوب است: (الف) تغییر قطر AB ، (ب) تغییر قطر CD ، (ج) تغییر ضخامت ورق، (د) تغییر حجم ورق.



حل

قانون هوک. در اینجا $\sigma_z = 0$. با استفاده از معادله‌های (۲-۲۸)، کرنش در هر یک از جهت‌های مختصاتی را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= + \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[(84 \text{ MPa}) - 0 - \frac{1}{3} (140 \text{ MPa}) \right] \\ &= +0.523 \times 10^{-3} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= - \frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[- \frac{1}{3} (84 \text{ MPa}) + 0 - \frac{1}{3} (140 \text{ MPa}) \right] \\ &= -1.067 \times 10^{-3} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[- \frac{1}{3} (84 \text{ MPa}) - 0 + (140 \text{ MPa}) \right] \\ &= +1.600 \times 10^{-3} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

با ضرب کردن کرنش‌های متناظر در طول ضلع مکعب، تغییرات ابعاد مکعب به‌دست می‌آیند:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250.9 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -15.05 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \mu\text{m}$$

(ب) انبساط آزاد در امتداد z ، مقید در امتداد y . تنش در امتداد x مانند قسمت الف است، یعنی، $\sigma_x = -38.89 \text{ MPa}$. مکعب می‌تواند در امتداد z منبسط شود، و $\sigma_z = 0$. مکعب نمی‌تواند در امتداد y منبسط شود، و $\delta_y = 0$. لذا $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$ و $\epsilon_y = 0$. $\sigma_y = 0$ را در معادله دوم (۲-۴۵) جایگذاری و σ_y را می‌یابیم. پس از جایگذاری داده‌ها،

$$\begin{aligned} \sigma_y - \left(\frac{E_y}{E_x} \right) \nu_{xy} \sigma_x &= \left(\frac{12.10}{155.0} \right) (0.248)(-38.89 \text{ MPa}) \\ &= -752.9 \text{ kPa} \end{aligned}$$

اکنون از معادله اول و آخر (۲-۴۵) برای محاسبه مولفه‌های کرنش ϵ_x و ϵ_z استفاده می‌کنیم. اما معادله اول (۲-۴۵) شامل نسبت بواسون ν_{yx} است. همانطور که قبلاً دیدیم، این نسبت با ν_{xy} برابر نیست. برای تعیین ν_{yx} از معادله اول (۲-۴۶) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x} \right) \nu_{xy} = \left(\frac{12.10}{155.0} \right) (0.248) = 0.01936$$

با قرار دادن $\sigma_z = 0$ در معادله‌های اول و سوم (۲-۴۵) و با جایگذاری مقادیر داده شده E_x ، E_y ، ν_{xy} و ν_{yx} و نیز مقادیر حاصل برای σ_y و σ_x در این معادله‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx} \sigma_y}{E_y} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} \\ &\quad - \frac{(0.01936)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = -249.7 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= - \frac{\nu_{xz} \sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz} \sigma_y}{E_y} = - \frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} \\ &\quad - \frac{(0.458)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = +90.72 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

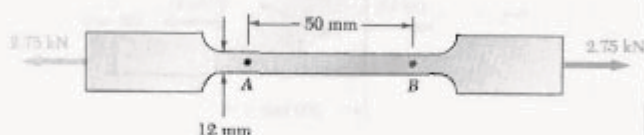
با ضرب کردن کرنش‌های متناظر در طول ضلع مکعب، تغییرات ابعاد مکعب به‌دست می‌آیند:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249.7 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -14.98 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0.060 \text{ m}) = 0$$

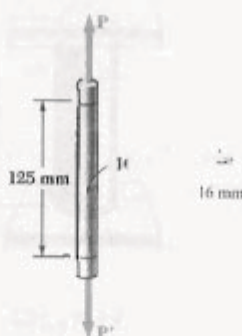
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90.72 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +5.44 \mu\text{m}$$

- الف. تغییر طول آن عبارت است از $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$
 ب. تغییر عرض قسمت AB ، (ج) تغییر ضخامت قسمت AB ،
 (د) تغییر مساحت مقطع عرضی AB .



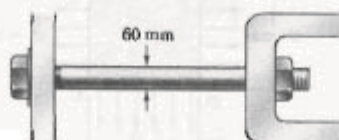
شکل ۶۲-۲

۶۳-۲ از آزمایش کشش استاندارد برای تعیین خواص یک پلاستیک آزمایشی استفاده می‌شود. نمونه آزمایشی میله‌ای به قطر ۱۶ mm است و تحت نیروی کششی ۳/۲ kN قرار دارد. اگر کشیدگی ۱۱ mm و کاهش قطر ۰/۶۲۵ mm را برای طول سنج ۱۲۵ mm داشته باشیم، مدول الاستیسیته، مدول صلابت، و نسبت پواسون ماده را بیابید.



شکل ۶۳-۲

۶۴-۲ تغییر قطر یک پیچ بزرگ فولادی، هنگام سفت شدن مهره، با دقت اندازه‌گیری می‌شود. اگر $E = ۲۰۰ \text{ GPa}$ و $\nu = ۰/۲۹$ ، نیروی داخلی در پیچ را برای کاهش قطر ۱۳ μm بیابید.



شکل ۶۴-۲

الف. قطر AB . تغییر طول آن عبارت است از $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+۰/۵۲۳ \times ۱۰^{-۳} \text{ mm/mm})(۲۲۵ \text{ mm})$$

$$\delta_{B/A} = +۰/۱۲ \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

ب. قطر CD .

$$\delta_{CD} = \epsilon_z d = (+۱/۶۰۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ mm/mm})(۲۲۵ \text{ mm})$$

$$\delta_{CD} = +۰/۳۶ \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

ج. ضخامت. با توجه به $t = ۱۸ \text{ mm}$

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-۱/۰۶۷ \times ۱۰^{-۳} \text{ mm/mm})(۱۸ \text{ mm})$$

$$\delta_t = -۰/۰۱۹۲ \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

د. حجم ورق. با استفاده از معادله (۲-۳۰)،

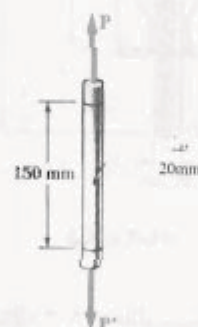
$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (+۰/۵۲۳ - ۱/۰۶۷ + ۱/۶۰۰) ۱۰^{-۳} \\ = +۱/۰۶۷ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\Delta V = eV = +۱/۰۶۷ \times ۱۰^{-۳} [(۳۸۰ \text{ mm})(۳۸۰ \text{ mm})(۱۸ \text{ mm})]$$

$$\Delta V = +۲۷۳۳ \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

مسائل

۶۱-۲ در آزمایش کشش استاندارد، یک میله فولادی به قطر ۲۰ mm تحت نیروی کششی ۱۷ kips قرار دارد. اگر $E = ۷۰ \text{ GPa}$ و $\nu = ۰/۳۵$ ، (الف) کشیدگی میله با طول سنج ۱۵۰ mm، (ب) تغییر قطر میله.

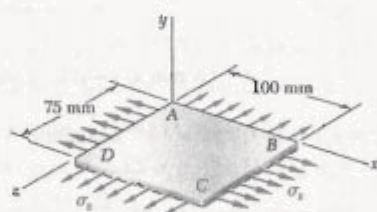


شکل ۶۱-۲

۶۲-۲ قطعه نشان داده شده از ورق تخت فولادی

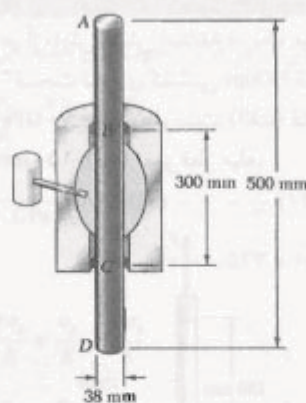
به ضخامت ۱/۶ mm ساخته شده است. برای $E = ۲۰۰ \text{ GPa}$

۶۸-۲ بافتی که در سازه‌های بادشو به کار می‌رود تحت بارگذاری دو محوری قرار دارد و تنش‌های قائم $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 160 \text{ MPa}$ در آن به وجود آمده است. اگر خواص بافت را به صورت $E = 87 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.34$ تقریب بزنیم، مطلوبست تغییر طول: (الف) ضلع AB ، (ب) ضلع BC ، (ج) قطر AC .



شکل م ۶۸-۲

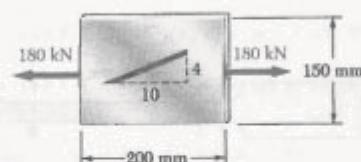
۶۹-۲ میله پرنجی AD در ژاکتی جازده شده است و فشار هیدروستاتیکی 42 MPa بر قسمت BC میله به طول 300 mm وارد شده است. اگر $E = 70 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.36$ ، مطلوبست: (الف) تغییر طول کل AD ، (ب) تغییر قطر قسمت BC میله.



شکل م ۶۹-۲

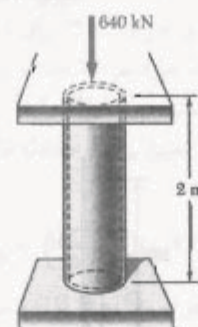
۷۰-۲ در مسئله ۶۹-۲، مطلوبست نیرویی که باید بر سر A و D وارد کرد تا: (الف) کرنش محوری در قسمت BC صفر بماند، (ب) طول کل AD تغییر نکند.

۶۵-۲ خط مایلی با شیب $4:10$ روی ورق پرنج زرد، به عرض 150 mm و ضخامت 6 mm ، حک شده است. با استفاده از پیوست ب، شیب این خط را تحت بار محوری 180 kN بیابید.



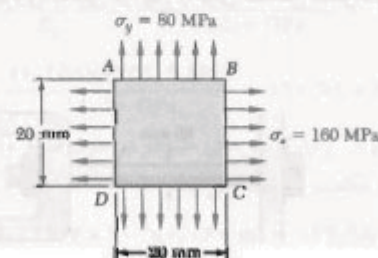
شکل م ۶۵-۲

۶۶-۲ از یک لوله آلومینیومی به طول 2 m و با قطر خارجی 240 mm و با ضخامت دیواره 10 mm به عنوان یک ستون کوتاه استفاده می‌شود. این لوله، بار محوری مرکزی 640 kN را تحمل می‌کند. اگر $E = 73 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.33$ ، مطلوبست: (الف) تغییر طول لوله، (ب) تغییر قطر خارجی، (ج) تغییر ضخامت دیواره آن.



شکل م ۶۶-۲

۶۷-۲ مربعی به ضلع 20 mm روی مخزن فولادی بزرگی حک شده است. پس از این که مخزن تحت فشار قرار می‌گیرد، حالت تنش دومحوری نشان داده شده در مربع به وجود می‌آید. با استفاده از پیوست ب برای فولاد ساختمانی، درصد تغییر شیب قطر DB را بیابید.



شکل م ۶۷-۲

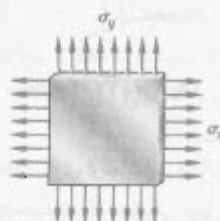


۷۴-۲ معمولاً، تنش قائم در یک جهت معین صفر است؛ مثلاً، برای صفحه نازک نشان داده شده، $\sigma_z = 0$. در این حالت، که آن را تنش صفحه ای می گویند، نشان دهید که اگر کرنش های ϵ_x و ϵ_y به طور آزمایشی تعیین شوند، σ_x ، σ_y و ϵ_z را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu}$$

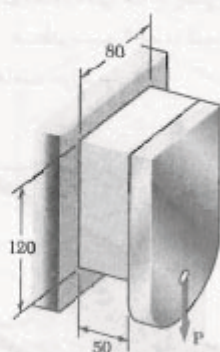
$$\sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$



شکل م ۷۴-۲

۷۵-۲ قطعه پلاستیکی نشان داده شده به یک تکیه گاه صلب و صفحه قائم متصل است. بار $P = 240 \text{ kN}$ بر قطعه وارد می شود. اگر برای پلاستیک $G = 1050 \text{ MPa}$ ، انحراف صفحه را بیابید.



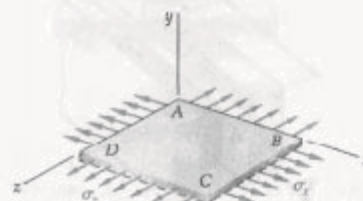
ابعاد بر حسب mm

شکل م ۷۵-۲

۷۶-۲ در مسئله ۷۵-۲، مطلوب است بار P به طوری که انحراف $1/5 \text{ mm}$ در قطعه به وجود آید.

۷۱-۲ برای عضوی که تحت بارگذاری محوری است، مطلوب است کرنش قائم ϵ' در جهتی که با محور بار زاویه 45° دارد بر حسب کرنش محوری ϵ_y ؛ (الف) با مقایسه وترهای مثلث های نشان داده شده در شکل ۷۲-۲، به ترتیب، یک جزء را در قبل و بعد از تغییر شکل نشان می دهند، (ب) با استفاده از مقادیر تنش های منظر σ' و σ_y نشان داده شده در شکل ۴۰-۱، و قانون عمومی هوک،

۷۲-۲ صفحه همگن ABCD تحت بارگذاری دو محوری نشان داده شده قرار دارد. می دانیم که $\sigma_z = 0$ و تغییر طول صفحه در جهت x باید صفر باشد، یعنی، $\epsilon_x = 0$. اگر مدول الاستیسیته را با E و نسبت پواسون را با ν نشان دهیم، مطلوب است: (الف) مقدار مورد نیاز σ_y ، (ب) نسبت σ_y / ϵ_y .



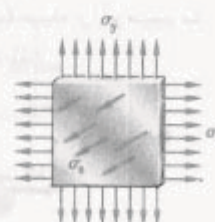
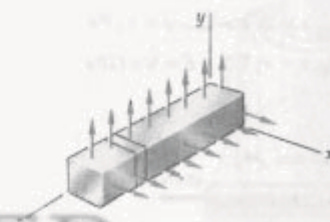
شکل م ۷۲-۲

۷۳-۲ در اغلب موارد، قیدهای فیزیکی مانع ایجاد کرنش در جهت خاصی می شوند؛ مثلاً، در حالت نشان داده شده که در آن از حرکت طولی منشور بلند جلوگیری می شود، $\epsilon_z = 0$. مقاطع صفحه ای عمود بر محور طولی به صورت صفحه ای می مانند و فاصله بین آنها تغییر نمی کند. نشان دهید که در این حالت، که آن را کرنش صفحه ای می گویند، σ_x ، ϵ_x و ϵ_y را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu')\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu')\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$



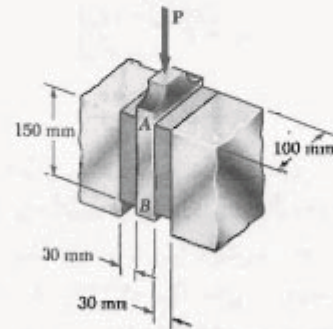
(الف)

(ب)

شکل م ۷۳-۲



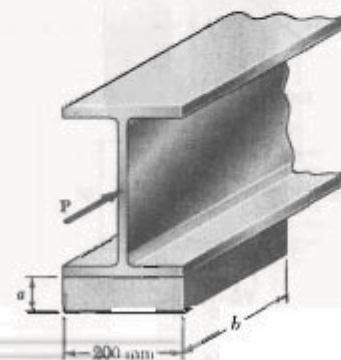
۷۷-۲ واحد جداسازی ارتعاشات نشان داده شده مشکل است از دو قطعه سفت لاستیکی که به ورق AB و به تکیه گاههای صلب متصل است. اگر نیروی $P = 24 \text{ kN}$ باعث انحراف $\delta = 1.5 \text{ mm}$ شود، مدول صلابت لاستیک را بیابید.



شکل م ۷۷-۲ و م ۷۸-۲

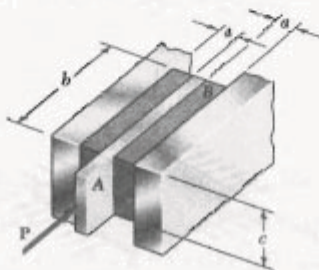
۷۸-۲ واحد جداسازی ارتعاشات نشان داده شده مشکل است از دو قطعه سفت لاستیکی با مدول صلابت $G = 19 \text{ MPa}$ که به ورق AB و به تکیه گاههای صلب متصل است. اگر P مقدار نیروی وارده و δ انحراف متناظر باشد، ثابت فنریت مجموعه را بیابید.

۷۹-۲ برای اعطاف پذیری در ضمن زلزله، مطابق شکل از پانچان الاستومریک ($G = 0.9 \text{ MPa}$) برای نگهداری شاهتیر پل استفاده شده است. تیر تحت بار جانبی 22 kN نباید بیشتر از 10 mm تغییر مکان دهد. اگر ماکزیمم تنش برشی مجاز 420 kPa باشد، مطلوبست: (الف) کمترین بُعد مجاز b ، (ب) کمترین ضخامت مورد نیاز a .



شکل م ۷۹-۲

۸۱-۲ دو قطعه لاستیکی با مدول صلابت $G = 12 \text{ MPa}$ به تکیه گاههای صلب و به ورق AB متصل اند. اگر $c = 100 \text{ mm}$ و $P = 40 \text{ kN}$ ، مطلوبست کمترین ابعاد مجاز a و b در صورتی که بخواهیم تنش برشی در لاستیک از 4 MPa بیشتر نشود و کمترین انحراف ورق 5 mm باشد.

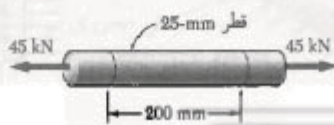


شکل م ۸۱-۲ و م ۸۲-۲

۸۲-۲ دو قطعه لاستیکی با مدول صلابت $G = 10 \text{ MPa}$ به تکیه گاههای صلب و به ورق AB متصل اند. اگر $b = 200 \text{ mm}$ و $c = 125 \text{ mm}$ ، مطلوبست بیشترین بار مجاز P و کمترین ضخامت مجاز a قطعات در صورتی که بخواهیم تنش برشی در لاستیک از 1.5 MPa بیشتر نشود و حداقل انحراف ورق 6 mm باشد.

۸۳-۲* مطلوبست تغییر حجم قطعه AB با طول سنجه 50 mm در مسئله ۶۸-۲: (الف) با مقایسه اتساع ماده، (ب) با تقریب حجم اولیه قسمت AB از حجم نهایی آن.

۸۴-۲* مطلوبست اتساع e و تغییر حجم میله به طول 200 mm در صورتی که: (الف) میله از فولاد $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.30$ ساخته شده باشد، (ب) میله از آلومینیم با $E = 70 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.35$ ساخته شده باشد.



شکل م ۸۴-۲

REB

۸۸-۲* یک تکیه‌گاه ایزولاسیون ارتعاشات متشکل است از میله A با شعاع $R_1 = 10 \text{ mm}$ و لوله B با شعاع داخلی $R_2 = 25 \text{ mm}$ که به یک استوانه لاستیکی تو خالی به طول 80 mm و با مدول صلابت $G = 12 \text{ MPa}$ متصل است. مطلوبست ماکزیم نیروی مجاز P که بر میله A می‌توان وارد کرد در صورتی که بخواهیم انحراف از 2.5 mm بیشتر نشود.

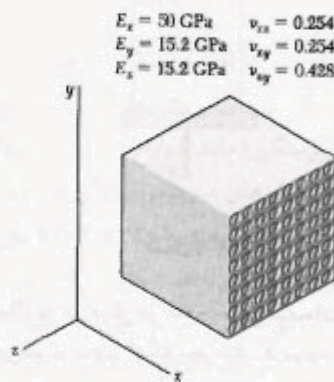
۸۹-۲* ثابت‌های E ، G ، k و ν یک ماده با معادله‌های (۳۳-۲) و (۴۳-۲) به هم ارتباط داده می‌شوند. نشان دهید که:

$$k = GE / (9G - 3E) \quad (\text{الف})$$

$$\nu = (3k - 2G) / (6k + 2G) \quad (\text{ب})$$

۹۰-۲* نشان دهید که، برای تمام مواد، نسبت G/E (نسبت مدول الاستیسته به مدول صلابت) همواره کمتر از $\frac{1}{2}$ و بیشتر از $\frac{1}{3}$ است (راهنمایی: به معادله (۴۳-۲) و به قسمت ۱۳-۲ مراجعه کنید).

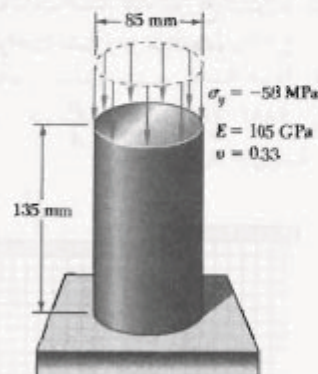
۹۱-۲* مکعبی به ضلع 40 mm ، از تارهای پلیمر شیشه که در امتداد x هستند ساخته شده است. مکعب نمی‌تواند در جهت‌های y و z تغییر شکل دهد و تحت بار کششی 65 kN در امتداد x قرار دارد. مطلوبست: (الف) تغییر طول مکعب در جهت x ، (ب) تنش‌های σ_x ، σ_y ، σ_z و τ_{xy} .



شکل م ۹۱-۲

۹۲-۲* مکعب مرکب مسئله ۸۹-۲ نمی‌تواند در جهت z تغییر شکل دهد و با اعمال بار کششی در جهت x به اندازه 5.535 mm در جهت x کشیده می‌شود. مطلوبست: (الف) تنش‌های σ_x ، σ_y ، σ_z و (ب) تغییر بُعد در جهت y .

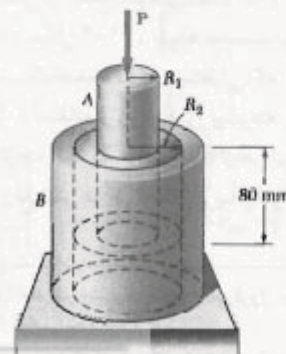
۸۵-۲* (الف) برای بارگذاری محوری نشان داده شده، تغییر ارتفاع و تغییر حجم استوانه برنجی نشان داده شده را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که بارگذاری به صورت هیدروستاتیکی با $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70 \text{ MPa}$ باشد.



شکل م ۸۵-۲

۸۶-۲* کره فولادی توپری به قطر 150 mm را در دریا تا عمق ۵ کیلومتری پایین می‌برند (فشار در این نقطه 50 MPa است). اگر $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.30$ ، مطلوبست: (الف) کاهش قطر کره، (ب) کاهش حجم کره، (ج) درصد افزایش چگالی کره.

۸۷-۲* یک تکیه‌گاه ایزولاسیون ارتعاشات متشکل است از میله A با شعاع R_1 و لوله B با شعاع داخلی R_2 که به یک استوانه لاستیکی تو خالی به طول 80 mm و با مدول صلابت $G = 10.93 \text{ MPa}$ متصل است. اگر نیروی P با مقدار 10 kN باعث انحراف میله A به مقدار 2 mm شود، مقدار نسبت R_2/R_1 را بیابید.

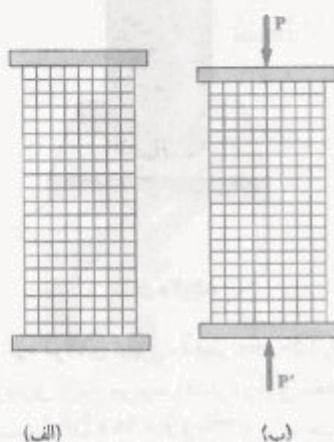


شکل م ۸۷-۲ و م ۸۸-۲



کرنش در تمام عضو به صورت یکنواخت خواهد بود. به عبارت دیگر، کرنش محوری ϵ_y و کرنش جانبی $\epsilon_x = -\nu \epsilon_y$ ثابت اند. اگر تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند، با استفاده از قانون هوک می‌توان رابطه $\sigma_y = E \epsilon_y$ را نوشت. از این رابطه نتیجه می‌شود که تنش قائم σ_y ثابت است. لذا، توزیع تنش در تمام عضو به صورت یکنواخت است و در هر نقطه،

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{ave} = \frac{P}{A}$$



شکل ۵۹-۲

از طرف دیگر، اگر بارها متمرکز باشند (شکل ۶۰-۲)، اجزای موجود در مجاورت نقاط اثر بارها تحت تنش‌های بزرگی قرار می‌گیرند، در حالی که سایر اجزای نزدیک انتهای عضو تحت تأثیر بارگذاری قرار نمی‌گیرند؛ این موضوع را با مشاهده تغییر شکل‌های بزرگ در نزدیک نقاط اثر بارها، و نبود تغییر شکل در گوشه‌ها می‌توان دید. هر چه اجزا از انتهای عضو دورتر می‌شوند، تغییر شکل‌ها یکنواخت‌تر می‌شوند؛ یعنی، توزیع کرنش و تنش در مقطع عرضی عضو یکنواخت‌تر است (شکل ۶۱-۲). در شکل ۶۱-۲، نتیجه محاسبه توزیع تنش‌ها در مقاطع مختلف یک صفحه نازک مستطیلی، که تحت بارهای متمرکز قرار دارد، با استفاده از روش‌های پیشرفته ریاضی نشان داده شده است. توجه کنید که در فاصله b از هر انتها (b عرض صفحه است)، توزیع تنش در هر مقطع تقریباً یکنواخت است و

* به عبارت دقیق‌تر، خط اثر مشترک بارها از مرکزوار مقطع هندسی بگذرد (به قسمت ۵.۱ مراجعه کنید).

** محورها ی بار یک و بلند ی که تحت بار زیاد قرار می‌گیرند ممکن است کمی کشند. اگر این موضوع در فصل ۱۰ بررسی می‌شود.

۱۷-۲ توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری؛

اصل سنت-وانانت

تا به حال، در یک عضو با بارگذاری محوری فرض می‌کردیم تنش‌های قائم در مقاطع عمود بر محور عضو به طور یکنواخت توزیع می‌شوند. در قسمت ۱-۵ دیدیم که چنین فرضی در نواحی مجاور نقاط اثر بارها اشتباه است، و برای تعیین تنش‌های واقعی در یک مقطع باید یک مسئله نامعین استاتیکی را حل کرد.

در قسمت ۲-۹، برای تعیین نیروها در مسائل نامعین استاتیکی از تغییر شکل‌های ناشی از این نیروها استفاده شد. لذا، می‌توان گفت برای تعیین تنش‌ها در یک عضو باید کرنش‌های حاصل از این تنش‌ها را تحلیل کرد. در کتاب‌های پیشرفته برای تعیین توزیع تنش‌های متناظر با شرایط مختلف اعمال بار در انتهای اعضا، از روش مذکور و نظریه الاستیسته استفاده می‌شود. برای تحلیل تنش‌ها می‌توان حالتی را در نظر گرفت که در آن از دو صفحه صلب برای انتقال بار به یک عضو ساخته شده از ماده همگن همسانگرد استفاده شده است (شکل ۵۸-۲).



شکل ۵۸-۲

با اعمال بار در مرکز هر صفحه، این صفحات* به طرف‌ها نزدیک می‌شوند بدون اینکه بچرخند. در نتیجه، عضو کوتاه‌تر می‌شود و عرض و ضخامت آن افزایش می‌یابد. می‌توان فرض کرد عضو به طور مستقیم می‌ماند، مقاطع صفحه‌ای آن به صورت صفحه‌ای می‌مانند و تمام اجزای آن به طور یکسان تغییر شکل می‌دهند (این فرض با شرایط انتهایی داده شده سازگار است). شکل ۵۹-۲ یک مدل الاستیکی و اقبل و بعد از بارگذاری نشان می‌دهد.** با تغییر شکل یکسان اجزاء توزیع

برای محاسبه تنش در یک عضو، با استفاده از اصل سنت-ونانت می‌توان بارگذاری داده شده را با بارگذاری ساده‌تری جایگزین کرد. گفتنی است که هنگام کاربرد اصل مذکور به دو نکته مهم باید توجه داشت:

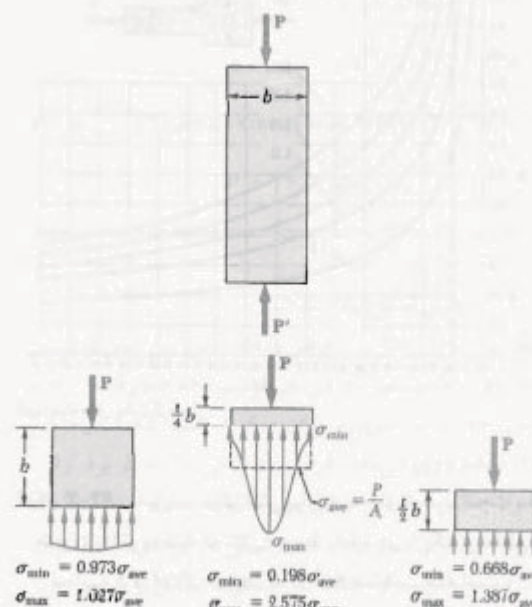
- ۱- بارگذاری واقعی و بارگذاری مورد استفاده در محاسبه تنش‌ها باید از نظر استاتیکی هم‌ارز باشند.
- ۲- یا این روش نمی‌توان تنش‌ها را در مجاورت نقاط اثر بار محاسبه کرد، و برای این منظور باید از روش‌های پیشرفته نظری یا تجربی بهره گرفت.

صفحاتی که برای تعیین توزیع تنش یکنواخت در عضو شکل ۵۹-۲ به کار رفتند نباید مانع انبساط آزاد جانبی عضو شوند. لذا، صفحات نمی‌توانند به صورت صلب به عضو متصل شوند. و فرض می‌شود که آنها فقط با عضو تماس دارند و آنقدر صاف‌اند که مانع انبساط جانبی عضو نمی‌شوند. در عمل، این شرایط برای یک عضو فشاری برقرار می‌شوند، ولی برای عضو کششی برقرار نمی‌شوند. البته، این که نتوانیم فیکچر را به عنوان عضوی بگیریم که توزیع تنش‌ها در آن یکنواخت است موضوع مهمی نیست. مهم این است که مدلی را تصور کنیم که توزیع تنش در آن یکنواخت است، و سپس این مدل را با شرایط واقعی بارگذاری مقایسه کنیم.

۲-۱۸ تمرکز تنش

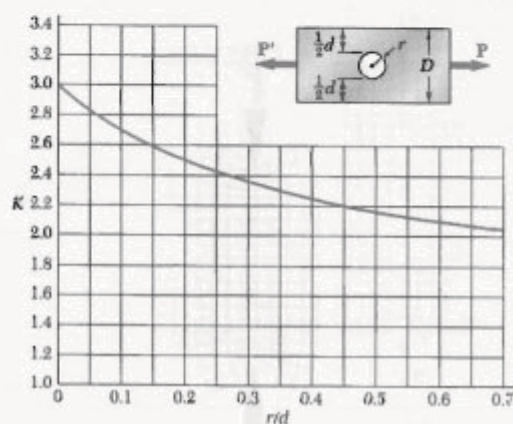
در قسمت قبل دیدیم که تنش در نزدیک نقاط اثر بارهای متمرکز ممکن است خیلی بزرگتر از مقدار متوسط آن باشد. وقتی عضوی دارای یک ناپیوستگی (مانند سوراخ یا تغییر ناگهانی مقطع عرضی است)، تنش‌های موضعی بزرگی در نزدیک ناپیوستگی به وجود می‌آید. شکل‌های ۶۲-۲ و ۶۳-۲ توزیع تنش در مقاطع بحرانی را نشان می‌دهند. شکل ۶۲-۲ برای میله تخت با یک سوراخ دایره‌ای است و توزیع تنش در یک مقطع گذرا از مرکز سوراخ را نشان می‌دهد. شکل ۶۳-۲ برای یک میله تخت است که از دو قسمت با عرض‌های متفاوت، که با گرده (ماهیچه) به هم متصل‌اند، تشکیل شده است؛ این شکل، توزیع تنش در باریکترین قسمت اتصال را نشان می‌دهد. در این قسمت، تنش بزرگی ایجاد می‌شود.

مقدار تنش σ در هر نقطه از آن مقطع را می‌توان با مقدار متوسط P/A برابر گرفت. لذا، در فاصله برابر با عرض عضو یا در فاصله بیشتر از آن، توزیع تنش در عرض یک مقطع به طور یکنواخت است، خواه عضو مانند شکل ۵۸-۲ بارگذاری شده باشد خواه مانند شکل ۶۰-۲. به عبارت دیگر، به جز در نواحی مجاور نقاط اثر بارها، توزیع تنش را می‌توان مستقل از حالت اعمال بار دانست. این اصل را، به افتخار سنت-ونانت ریاضی‌دان و مهندس فرانسوی (۱۷۹۷-۱۸۸۶)، اصل سنت-ونانت می‌گویند و برای هر نوع بارگذاری به کار می‌رود.

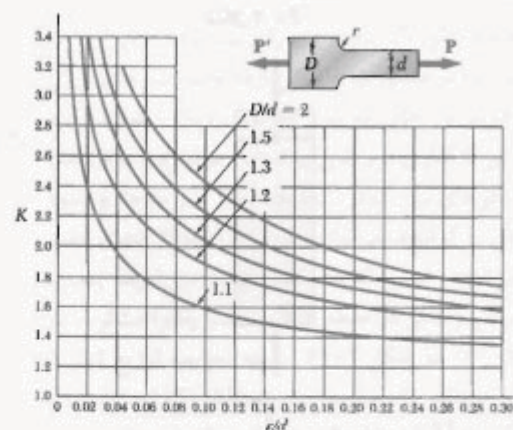


شکل ۶۱-۲

تمرکز تنش را می‌توان برحسب نسبت‌های پارامترهای هندسی موجود محاسبه، و نتایج حاصل را به صورت جدول یا نمودار بیان کرد (شکل ۶۴-۲). برای تعیین تنش ماکزیمم در نزدیک ناپیوستگی عضوی که تحت بار محوری P قرار دارد، طراح فقط باید تنش متوسط $\sigma_{ave} = P/A$ را در مقطع بحرانی محاسبه کند، و نتیجه حاصل را در ضریب تمرکز تنش K ضرب کند. این روش تا وقتی صحت دارد که σ_{max} از حد تناسب ماده فراتر نرود، زیرا متحنی‌های شکل ۶۴-۲ با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش به دست آمده‌اند.



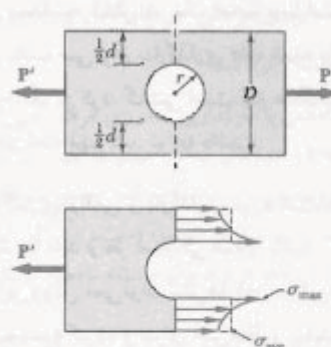
الف) میله‌های تخت سوراخ‌دار



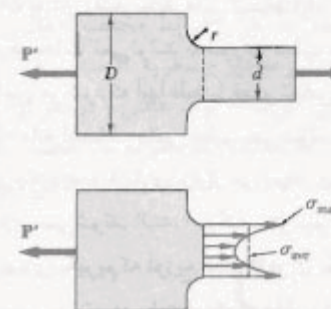
ب) میله‌های تخت گرده‌دار

شکل ۶۴-۲ ضرایب تمرکز تنش برای میله‌های تخت تحت بار محوری* (توجه کنید که تنش متوسط را باید در باریکترین مقطع محاسبه کرد: $\sigma_{ave} = P/tl$ ، که در آن t ضخامت میله است).

* W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.



شکل ۶۲-۲ توزیع تنش در نزدیک سوراخ دایره‌ای در میله تخت تحت بار محوری.



شکل ۶۳-۲ توزیع تنش در نزدیک گرده‌ها در میله تخت تحت بار محوری.

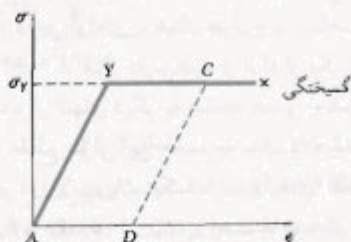
این نتایج، با استفاده از روش فوتوالاستیک، به طور تجربی به دست آمدند. نتایج مذکور مستقل از اندازه و جنس عضو هستند و فقط بستگی به نسبت پارامترهای هندسی عضو دارند، یعنی، نسبت r/d در سوراخ دایره‌ای، و نسبت‌های D/d و r/d در گرده‌ها. به علاوه، طراح بیشتر مایل است مقدار ماکزیمم تنش را در مقطع معینی بیابد، نه توزیع واقعی تنش در آن مقطع را، زیرا می‌خواهد بررسی کند که آیا، تحت بارگذاری داده شده، این مقدار ماکزیمم از تنش مجاز بیشتر است یا نه، و موضوع مکان این مقدار ماکزیمم برای او اهمیتی ندارد. به این دلیل، نسبت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}} \quad (۶۸-۲)$$

K عبارت است از نسبت تنش ماکزیمم به تنش متوسطی که در مقطع بحرانی (باریک‌ترین مقطع) محاسبه می‌شود، و آن را ضریب تمرکز تنش برای ناپیوستگی داده شده می‌گویند. ضرایب

قسمت‌های قبل صحت خود را از دست می‌دهند. در این صورت، باید از یک تحلیل پیچیده‌تر، مبتنی بر رابطه غیرخطی بین تنش و کرنش، استفاده کرد.

تحلیل مبتنی بر رابطه واقعی بین تنش و کرنش فراتر از این کتاب است. ولی، با در نظر گرفتن یک ماده الاستوپلاستیک ایده‌آل که نمودار تنش-کرنش آن از دو پاره خط مستقیم تشکیل می‌شود (شکل ۲-۶۵)، رفتار پلاستیک را به خوبی می‌توان درک کرد. گفتنی است که نمودار تنش-کرنش فولاد متوسط در نواحی الاستیک و پلاستیک با این ایده‌آل‌سازی مشابه است. تا وقتی تنش σ کمتر از استقامت تسلیم σ_y است، ماده دارای رفتار الاستیک است و از قانون هوک، $\sigma = E\epsilon$ ، پیروی می‌کند. وقتی σ به مقدار σ_y می‌رسد، ماده شروع به تسلیم می‌کند و تغییر شکل پلاستیک خود را تحت یک بار ثابت ادامه می‌دهد. با حذف بار، این بار برداری در امتداد پاره خط مستقیم CD به موازات قسمت اولیه AY منحنی بارگذاری روی می‌دهد. پاره خط AD در محور افقی، کرنش متناظر با تغییر شکل پلاستیک دائم را که حاصل از بارگذاری و باربرداری نمونه است نشان می‌دهد. گرچه هیچ ماده واقعی دقیقاً مانند شکل ۲-۶۵ رفتار نمی‌کند، ولی این نمودار در بحث تغییر شکل‌های پلاستیک مواد چکش‌خوار، مانند فولاد متوسط، مفید واقع می‌شود.



شکل ۲-۶۵

مثال ۱۳-۲

میله‌ای به طول $L = 500 \text{ mm}$ و با مساحت مقطع عرضی $A = 60 \text{ mm}^2$ از یک ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. این ماده در ناحیه الاستیک دارای مدول الاستیسیته $E = 200 \text{ GPa}$ است و نقطه تسلیم آن، $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$. این میله تا کشیدگی 7 mm تحت بار محوری قرار می‌گیرد و سپس برطرف می‌شود. تغییر شکل پلاستیک حاصل چقدر است؟

مثال ۱۲-۲

یک میله تخت فولادی از دو قسمت با عرض‌های 40 mm و 60 mm ، هر یک به ضخامت 10 mm ، تشکیل شده است. این دو قسمت توسط گرده‌هایی با شعاع $r = 8 \text{ mm}$ به هم متصل شده‌اند. ماکزیم بار محوری را که می‌توان با اطمینان بر این میله وارد کرد بیابید. تنش قائم مجاز را 165 MPa بگیرید. ابتدا نسبت‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.50 \quad \frac{r}{d} = \frac{8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0.20$$

با استفاده از منحنی شکل ۲-۶۴ ب متناظر با $D/d = 1.50$ ، مقدار ضریب تمرکز تنش مربوط به $r/d = 0.20$ را می‌یابیم:

$$K = 1.82$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۲-۴۸) و با حل σ_{ave} ،

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{max}}{1.82}$$

اما σ_{max} نمی‌تواند از تنش مجاز $\sigma_{all} = 165 \text{ MPa}$ بیشتر شود. با جایگذاری این مقدار برای σ_{max} ، دیده می‌شود تنش متوسط در باریک‌ترین قسمت میله ($d = 40 \text{ mm}$) نباید از مقدار زیر بیشتر شود:

$$\sigma_{ave} = \frac{165 \text{ MPa}}{1.82} = 90.7 \text{ MPa}$$

اما $\sigma_{ave} = P/A$ ، در نتیجه،

$$P = A\sigma_{ave} = (40 \text{ mm})(10 \text{ mm})(90.7 \text{ MPa}) = 36.3 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 36.3 \text{ kN}$$

۱۹-۲ تغییر شکل پلاستیک

نتایج قسمت‌های قبل را از فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش به دست آوردیم. یعنی، فرض می‌کردیم ماده هیچوقت از حد تناسب خود فراتر نمی‌رود. برای مواد شکننده، که گسیختگی بدون تسلیم روی می‌دهد، فرض بالا را می‌توان به کار برد. ولی، در مواد چکش‌خوار این فرض می‌رساند که ماده از حد استقامت تسلیم خود فراتر نمی‌رود، تغییر شکل در محدوده الاستیک است و عضو، پس از حذف بار، شکل اولیه‌اش را باز می‌یابد. ولی، اگر تنش در هر قسمت عضو از استقامت تسلیم ماده بیشتر شود، تغییر شکل پلاستیک روی می‌دهد و اغلب نتایج

ابتدا، نیروی داخلی و کشیدگی میله را تا شروع تسلیم تعیین می‌کنیم:

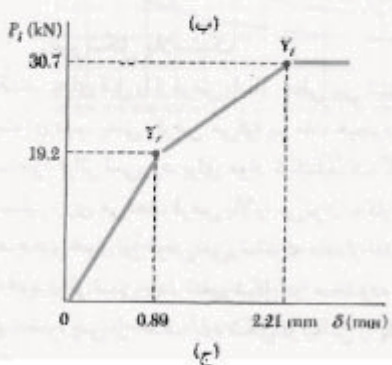
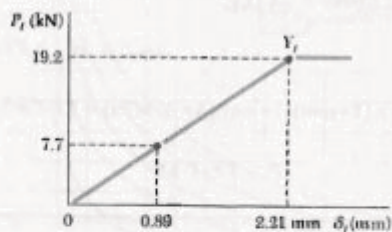
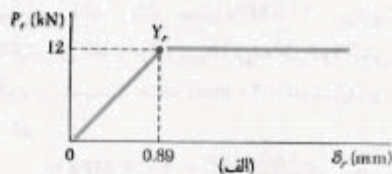
$$(P_r)_Y = (\sigma_r)_Y A_r = (250 \text{ MPa})(48 \text{ mm}^2) = 12 \text{ kN}$$

$$(\delta_r)_Y = (\epsilon_r)_Y L = \frac{(\sigma_r)_Y}{E_r} L = \frac{250 \text{ MPa}}{210 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 0.89 \text{ mm}$$

چون ماده الاستوپلاستیک است، نمودار نیرو-کشیدگی میله تنها از یک خط مستقیم مایل و یک خط مستقیم افقی تشکیل می‌شود (شکل ۶۷-۲ الف). با استفاده از همین روش برای لوله،

$$(P_l)_Y = (\sigma_l)_Y A_l = (310 \text{ MPa})(62 \text{ mm}^2) = 19.2 \text{ kN}$$

$$(\delta_l)_Y = (\epsilon_l)_Y L = \frac{(\sigma_l)_Y}{E_l} L = \frac{310 \text{ MPa}}{105 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 2.21 \text{ mm}$$



شکل ۶۷-۲

از شکل ۶۵-۲، کرنش ماکزیمم (که با طول نقطه C نشان داده می‌شود) چنین است:

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{5 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 10 \times 10^{-3}$$

کرنش تسلیم، که با طول نقطه Y نشان داده می‌شود، چنین است:

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.5 \times 10^{-3}$$

کرنش پس از بار برداری با طول ϵ_D نشان داده می‌شود. از شکل ۶۵-۲،

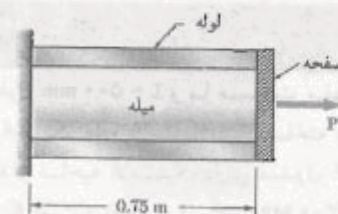
$$\begin{aligned} \epsilon_D &= AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_Y \\ &= 10 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 8.5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

تغییر شکل پلاستیک δ_D متناظر با کرنش ϵ_D است:

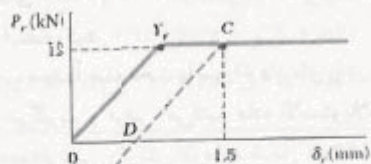
$$\delta_D = \epsilon_D L = (8.5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 4.25 \text{ mm}$$

مثال ۱۴-۲

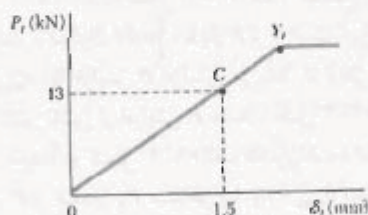
میله استوانه‌ای به طول ۰٫۷۵ m و با مساحت مقطعی عرضی $A_r = 48 \text{ mm}^2$ داخل لوله‌ای با همان طول و با مساحت مقطع عرضی $A_l = 62 \text{ mm}^2$ قرار دارد. میله و لوله از یک انتها به تکیه‌گاه صلب و از انتهای دیگر به صفحه صلبی متصل‌اند؛ در شکل ۶۶-۲، مقطع طولی این مجموعه نشان داده شده است. میله و لوله هر دو الاستوپلاستیک، با مدول‌های الاستیسیته $E_r = 210 \text{ GPa}$ و $E_l = 105 \text{ GPa}$ ، و استقامت‌های تسلیم $(\sigma_r)_Y = 250 \text{ MPa}$ و $(\sigma_l)_Y = 310 \text{ MPa}$ هستند. بار P بر صفحه وارد می‌شود. نمودار نیرو-کشیدگی مجموعه میله-لوله را رسم کنید.



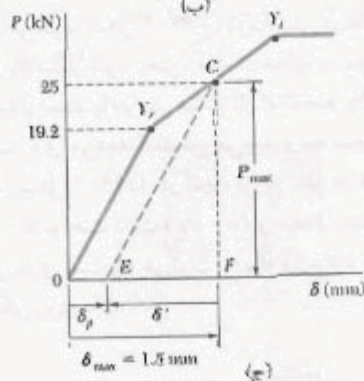
شکل ۶۶-۲



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲-۶۸

پاره خط FE در شکل ۲-۶۸ ج تغییر شکل δ' مجموعه را در ضمن بار برداری نشان می‌دهد، و پاره خط OE تغییر شکل دائمی δ_p را پس از حذف بار P نشان می‌دهد. از مثلث CEF،

$$\delta' = -\frac{P_{max}}{m} = -\frac{25 \text{ kN}}{21.3 \text{ kN/mm}} = -1.174 \text{ mm}$$

لذا، تغییر شکل دائمی چنین است:

$$\delta_p = \delta_{max} + \delta' = 1.5 \text{ mm} - 1.174 \text{ mm} = 0.326 \text{ mm}$$

در قسمت ۲-۱۸، تمرکز تنش را با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش بررسی کردیم. بنابراین، در تغییر شکل پلاستیک که مقدار σ_{max} حاصل از شکل‌های ۲-۶۲ و ۲-۶۳ از استقامت

نمودار نیرو-کشیدگی لوله تنها در شکل ۲-۶۷ ب نشان داده شده است. نیرو و کشیدگی مجموعه میله-لوله عبارتند از

$$P = P_r + P_l \quad \delta = \delta_r = \delta_l$$

با جمع کردن عرض نمودارهای میله و لوله (شکل ۲-۶۷ ج)، نمودار نیرو-کشیدگی به دست می‌آید. نقاط Y_r و Y_l به ترتیب، متناظر با شروع تسلیم در میله و در لوله هستند.

مثال ۲-۱۵

اگر بار وارد بر مجموعه میله-لوله مثال ۲-۱۴ از صفر تا ۲۵ kN افزایش یابد و سپس به صفر برگردد، مطلوب است: (الف) ماکزیم کشیدگی مجموعه، (ب) تغییر شکل پلاستیک پس از حذف بار.

(الف) ماکزیم کشیدگی. از شکل ۲-۶۷ ج دیده می‌شود که بار $P_{max} = 25 \text{ kN}$ متناظر است با نقطه‌ای که روی پاره خط $Y_r Y_l$ در نمودار نیرو-کشیدگی مجموعه قرار دارد. لذا، میله به ناحیه پلاستیک، با $P_r = (P_r)_Y = 12 \text{ kN}$ و $\sigma_r = (\sigma_r)_Y = 250 \text{ MPa}$ ، رسیدگی است ولی لوله هنوز در ناحیه الاستیک است. می‌نویسیم:

$$P_l = P - P_r = 25 \text{ kN} - 12 \text{ kN} = 13 \text{ kN}$$

$$\sigma_l = \frac{P_l}{A_l} = \frac{13 \text{ kN}}{62 \text{ mm}^2} = 210 \text{ MPa}$$

$$\delta_l = \epsilon_l L = \frac{\sigma_l}{E_l} L = \frac{210 \text{ MPa}}{105 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 1.5 \text{ mm}$$

ماکزیم کشیدگی مجموعه عبارت است از:

$$\delta_{max} = \delta_l = 1.5 \text{ mm}$$

(ب) تغییر شکل پلاستیک (دائمی). وقتی بار P از ۲۵ kN تا صفر کاهش می‌یابد، نیروهای داخلی P_r و P_l هر دو در امتداد یک خط مستقیم کاهش می‌یابند (شکل‌های ۲-۶۸ الف و ۲-۶۸ ب). نیروی P_r در امتداد خط CD به موازات قسمت اولیه منحنی بارگذاری کاهش می‌یابد، و نیروی P_l در امتداد منحنی بارگذاری اولیه کاهش می‌یابد زیرا تنش در لوله از مقدار تسلیم بیشتر نشده است. بنابراین، مجموع P آنها در امتداد خط CE به موازات قسمت $O Y_r$ منحنی نیرو-کشیدگی مجموعه کاهش می‌یابد (شکل ۲-۶۸ ج). از شکل ۲-۶۷ ج دیده می‌شود که شیب $O Y_r$ و نیز شیب CE، چنین است:

$$m = \frac{19.2 \text{ kN}}{0.9 \text{ m}} = 21.3 \text{ kN/mm}$$



اکنون، مقدار ماکزیمم P_Y بار را که به ازای آن تغییر شکل دائمی در میله به وجود نمی آید با مقدار P_U که باعث گسیختگی می شود مقایسه می کنیم. با توجه به تعریف تنش متوسط، $\sigma_{ave} = P/A$ ، و تعریف ضریب تمرکز تنش، $K = \sigma_{max}/\sigma_{ave}$ ، برای هر مقدار σ_{max} که از σ_Y بیشتر نباشد، می نویسیم:

$$P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{max} A}{K} \quad (۴۹-۲)$$

وقتی $\sigma_{max} = \sigma_Y$ (شکل ۶۹-۲ ب)، $P = P_Y$ ؛ از معادله (۴۹-۲)،

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \quad (۵۰-۲)$$

وقتی $P = P_U$ (شکل ۶۹-۲ د)، $\sigma_{ave} = \sigma_Y$ و

$$P_U = \sigma_Y A \quad (۵۱-۲)$$

با مقایسه معادله های (۵۰-۲) و (۵۱-۲)،

$$P_Y = \frac{P_U}{K} \quad (۵۲-۲)$$

* ۲-۲۰ تنش های باقیمانده

در مثال ۲-۱۳، میله ای را در نظر گرفتیم که فراتر از نقطه تسلیم خود کشیده می شود. میله، پس از حذف بار، شکل اولیه اش را باز نمی یافت و دستخوش تغییر شکل دائمی می شد؛ ولی، تمام تنش ها از بین می رفتند، اما واقعاً اینطور نیست. در حقیقت، وقتی فقط بعضی از اجزای یک سازه نامعین استاتیکی دستخوش تغییر شکل های پلاستیک می شوند (مانند مثال ۲-۱۵)، یا وقتی اجزای مختلف سازه تغییر شکل های پلاستیک متفاوت می دهند، آنچه که تنش های باقیمانده نامیده می شود پس از حذف بار در اجزای مختلف سازه برجای می ماند.

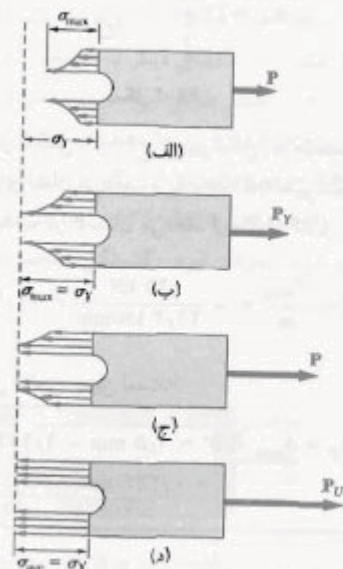
محاسبه تنش های باقیمانده در یک سازه واقعی معمولاً مشکل است، و با مثال زیر می خواهیم یک دید کلی درباره محاسبه این تنش ها به دست آوریم.

مثال ۲-۱۶

در مثال های ۲-۱۴ و ۲-۱۵، فرض کنید بار P از صفر تا ۲۵ kN افزایش یافته و سپس به صفر می رسد. تنش های باقیمانده در میله و لوله را بیابید.

تسلیم σ_Y بیشتر می شود، نمی توان از توزیع تنش داده شده در شکل های ۲-۶۲ و ۲-۶۳ و ضرایب تمرکز تنش در شکل ۲-۶۴ استفاده کرد.

حال، مجدداً میله تخت با سوراخ دایره ای را در شکل ۲-۶۲ در نظر می گیریم و فرض می کنیم ماده الاستوپلاستیک است؛ یعنی، نمودار تنش-کرنش آن مانند شکل ۲-۶۵ است. تا وقتی تغییر شکل پلاستیک روی نداده است، توزیع تنش مانند قسمت ۲-۱۸ است (شکل ۲-۶۹ الف). سطح زیر منحنی توزیع تنش، انتگرال $\int \sigma dA$ ، با بار P برابر است. این مساحت، و مقدار σ_{max} ، با افزایش P افزایش می یابد. تا وقتی $\sigma_{max} \leq \sigma_Y$ ، توزیع تنش ناشی از افزایش P مانند شکل ۲-۶۲ است (این شکل، مجدداً در شکل ۲-۶۹ الف تکرار شده است). وقتی مقدار P از مقدار P_Y متناظر با $\sigma_{max} = \sigma_Y$ بیشتر می شود (شکل ۲-۶۹ ب)، منحنی توزیع تنش در مجاورت سوراخ صاف تر می شود (شکل ۲-۶۹ ج)، زیرا تنش در ماده نمی تواند از مقدار σ_Y بیشتر شود. یعنی، ماده در مجاورت سوراخ در حالی تسلیم شدن است. با افزایش بیشتر بار P ، ناحیه پلاستیک که در آن تسلیم روی می دهد گسترش می یابد و به لبه های صفحه می رسد (شکل ۲-۶۹ د). در آنجا، توزیع تنش در عرض صفحه به طور یکنواخت است ($\sigma = \sigma_Y$) و مقدار متناظر $P = P_U$ بیشترین باری است که می توان بر میله وارد کرد بدون اینکه گسیختگی روی دهد.



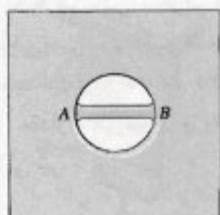
شکل ۲-۶۹ توزیع تنش در ماده الاستوپلاستیک که تحت بار افزایشی قرار دارد

با ترکیب تنش‌های ناشی از بارگذاری و تنش‌های معکوس ناشی از بار برداری، تنش‌های باقیمانده به دست می‌آیند:

$$(\sigma_r)_{res} = \sigma_r + \sigma'_r = 250 \text{ MPa} - 329.7 \text{ MPa} = -79.7 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_t)_{res} = \sigma_t + \sigma'_t = 210 \text{ MPa} - 164.9 \text{ MPa} = +45.1 \text{ MPa}$$

تغییر شکل‌های پلاستیک ناشی از تغییرات دما نیز می‌توانند تنش‌های باقیمانده به وجود آورند. مثلاً، تویی کوچکی را در نظر بگیرید که می‌خواهیم آن را به ورق بزرگی جوش دهیم. تویی را به صورت میله کوچک فولادی AB می‌گیریم که قرار است در عرض سوراخ کوچک داخل ورق جوش داده شود (شکل ۷۱-۲). در ضمن جوشکاری، دمای میله به بیش از 1000°C می‌رسد و در این دما مدول الاستیسته میله، و نیز سفتی و تنش، تقریباً صفر هستند. چون ورق بزرگ است، دمای آن خیلی بیش از دمای اتاق (20°C) نخواهد شد. لذا، هنگام جوشکاری، میله AB میله‌ای است با دمای $T = 1000^\circ\text{C}$ و فاقد تنش که به ورق با دمای 20°C متصل است.



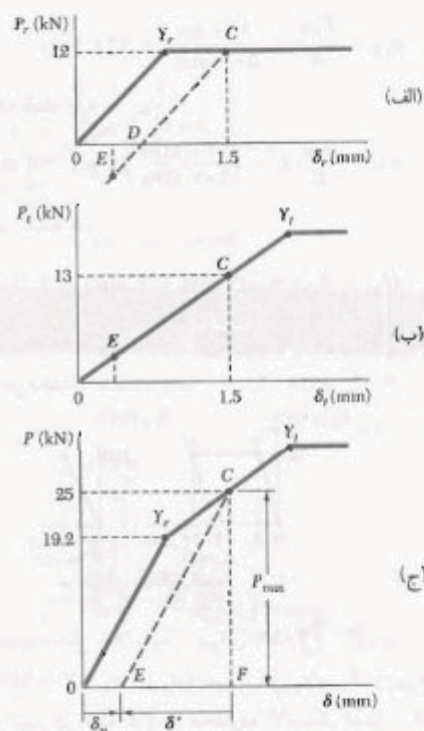
شکل ۷۱-۲

وقتی میله خنک می‌شود، مدول الاستیسته آن افزایش می‌یابد و در 500°C به مقدار معمولی تقریباً 200 GPa می‌رسد. با کاهش بیشتر دمای میله، حالتی داریم که در قسمت ۱-۲ بررسی و در شکل ۲-۳۵ نشان داده شد. با حل ΔT از معادله (۲۳-۲) و با قرار دادن $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$ و $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، تغییر دمایی را که باعث تسلیم میله می‌شود می‌یابیم:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C})} = -125^\circ\text{C}$$

یعنی، میله در دمای تقریباً 375°C شروع به تسلیم می‌کند و وقتی تا دمای اتاق خنک می‌شود، این تسلیم را با یک مقدار تنش تقریباً ثابت حفظ می‌کند. به این ترتیب، تنش باقیمانده‌ای بر اثر جوشکاری در تویی و در جوش ایجاد می‌شود که تقریباً با استقامت فولاد به کار رفته برابر است.

از نمودارهای شکل ۷۰-۲ دیده می‌شود که پس از صفر شدن بار P ، نیروهای داخلی P_r و P_t برابر با صفر نیستند و مقدار آنها، به ترتیب، با نقطه E در قسمت‌های (الف) و (ب) شکل نشان داده شده است. یعنی، تنش‌های متناظر پس از باربرداری مجموعه نیز صفر نیستند. برای تعیین این تنش‌های باقیمانده، تنش‌های معکوس σ'_r و σ'_t ناشی از بار برداری را محاسبه می‌کنیم و آنها را به تنش‌های ماکزیم $\sigma_r = 250 \text{ MPa}$ و $\sigma_t = 210 \text{ MPa}$ ، که در قسمت الف مثال ۱۵-۲ به دست آمدند، اضافه می‌کنیم.



شکل ۷۰-۲

کرنش حاصل از بار برداری در لوله و میله، دارای مقدار یکسان است و برابر است با δ'/L ، که در آن δ' تغییر شکل مجموعه در ضمن بار برداری است و آن را در مثال ۱۵-۲ به دست آوردیم. می‌نویسیم:

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-1.174 \text{ mm}}{75 \text{ m}} = -1.57 \times 10^{-5} \text{ mm/mm}$$

تنش‌های معکوس متناظر در میله و لوله عبارتند از:

$$\sigma'_r = \epsilon' E_r = (-1.57 \times 10^{-5})(210 \text{ GPa}) = -329.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1.57 \times 10^{-5})(105 \text{ GPa}) = -164.9 \text{ MPa}$$

حد الاستیک. ماکزیمم مقدار Q و ماکزیمم انحراف الاستیکی نقطه A وقتی روی می‌دهد که در میله AD ، $\sigma = \sigma_Y$.

$$(P_{AD})_{\max} = \sigma_Y A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$

$$Q_{\max} = 2(P_{AD})_{\max} = 2(120 \text{ kN}) \quad Q_{\max} = 240 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

$$\delta_A = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E} L = \left(\frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$

چون $P_{CE} = P_{AD} = 120 \text{ kN}$ تنش در میله CE چنین است:

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

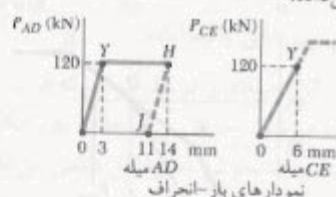
انحراف نقطه C

$$\delta_C = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left(\frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$

انحراف نقطه B

$$\delta_B = \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_C) = \frac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4.5 \text{ mm}$$

چون $\delta_B = 10 \text{ mm}$ نتیجه می‌گیریم که تغییرشکل پلاستیک روی می‌دهد.



تغییرشکل پلاستیک. برای $Q = 240 \text{ kN}$ ، در میله AD ($\sigma_{AD} = \sigma_Y = 300 \text{ MPa}$) تغییرشکل پلاستیک روی می‌دهد. چون تنش در میله CE در محدوده الاستیک است، δ_C برابر با 6 mm است. انحراف δ_A را، که به ازای آن $\delta_B = 10 \text{ mm}$ به صورت زیر می‌یابیم:

$$\delta_B = 10 \text{ mm} = \frac{1}{2}(\delta_A + 6 \text{ mm}) \Rightarrow \delta_A = 14 \text{ mm}$$

بار برداری. چون نیروی Q به تدریج حذف می‌شود، نیروی P_{AD} در امتداد خط HJ به موازات قسمت اولیه نمودار بار-انحراف میله AD کاهش می‌یابد. انحراف نهایی نقطه A چنین است:

$$\delta_{Ar} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

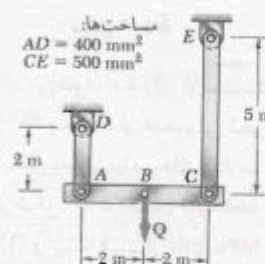
چون تنش در میله CE در محدوده الاستیک است، انحراف نهایی نقطه C صفر است.

فلزاتی که ریخته‌گری یا نورد گرم می‌شوند، هنگام سرمایش دستخوش تنش‌های باقیمانده می‌شوند. در این موارد، لایه‌های خارجی سریع‌تر از هسته داخلی خنک می‌شوند. در نتیجه، لایه‌های خارجی سفتی خود را سریع‌تر از هسته داخلی به دست می‌آورند. وقتی تمام نمونه به دمای اتاق می‌رسد، هسته داخلی بیشتر از لایه‌های خارجی منقبض می‌شود. در نتیجه، تنش‌های باقیمانده کششی در هسته داخلی و تنش‌های باقیمانده فشاری در لایه‌های خارجی به وجود می‌آید.

تنش‌های باقیمانده ناشی از جوشکاری، ریخته‌گری و نورد گرم ممکن است خیلی بزرگ، و با استقامت تسلیم قابل مقایسه باشند. در صورت لزوم، با بازگرمایش نمونه در دمای تقریباً 600°C و سپس با خنک کردن آهسته آن در مدت ۱۲ تا ۲۴ ساعت می‌توان این تنش‌ها را حذف کرد.

مسئله نمونه ۶-۲

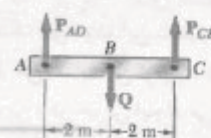
تیر صلب ABC از دو میله فولادی آویزان شده است و ابتدا به صورت افقی است. با اعمال آهسته نیروی Q ، نقطه میانی B به اندازه 10 mm به طرف پایین منحرف می‌شود. سپس، بار به تدریج حذف می‌شود. اگر فولاد میله‌ها از نوع الاستوپلاستیک با $E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_Y = 300 \text{ MPa}$ باشد، مطلوب است: (الف) مقدار ماکزیمم Q و وضعیت متناظر تیر، (ب) وضعیت نهایی تیر.

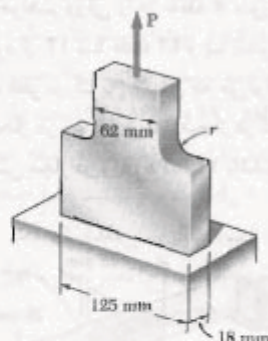


حل

استاتیک. چون Q در نقطه میانی تیر وارد می‌شود،

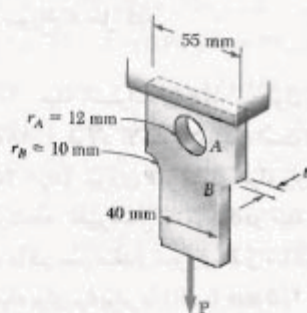
$$P_{AD} = P_{CE} \quad \text{و} \quad Q = 2P_{AD}$$





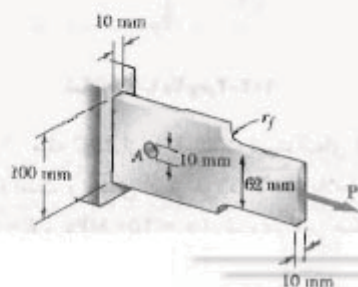
شکل م ۹۵-۲ و م ۹۶-۲

۹۷-۲ برای $P = 35 \text{ kN}$ ، مطلوبست مینیم ضخامت t ورق در صورتیکه تنش مجاز 125 MPa باشد.

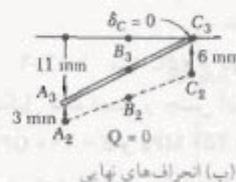
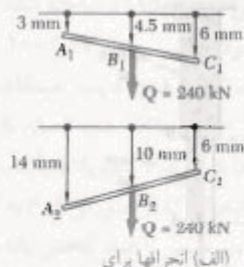


شکل م ۹۷-۲

۹۸-۲ اگر قطر سوراخ نشان داده شده 10 mm باشد، مطلوبست: (الف) شعاع r گرد شده (ماهیچه) که به ازای آن ماکزیم تنش در سوراخ A و در گرد شده‌ها یا هم برابرند، (ب) بار ماکزیم مجاز متناظر P در صورتی که تنش مجاز 105 MPa باشد.

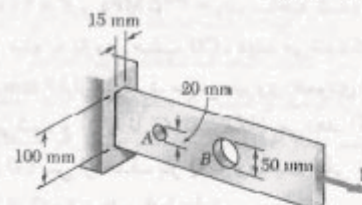


شکل م ۹۸-۲



مسائل

۹۳-۲ اگر $\sigma_{all} = 120 \text{ MPa}$ ، ماکزیم مقدار مجاز بار محوری مرکزی P را بیابید.

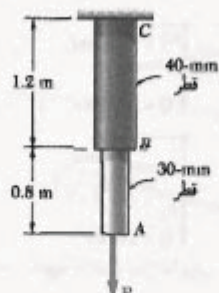


شکل م ۹۳-۲ و م ۹۴-۲

۹۴-۲ در یک میله بلند فولادی که تحت بار محوری مرکزی قرار دارد دو سوراخ تعبیه شده است. برای $P = 32 \text{ kN}$ ، مطلوبست ماکزیم مقدار تنش: (الف) در A ، (ب) در B .

۹۵-۲ اگر $P = 40 \text{ kN}$ ، مطلوبست ماکزیم تنش وقتی: (الف) $r = 12 \text{ mm}$ ، (ب) $r = 15 \text{ mm}$.

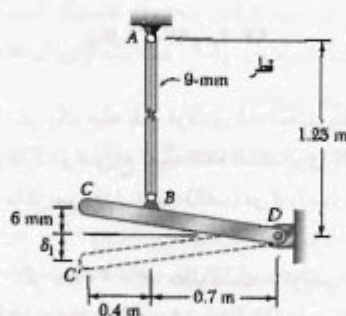
۹۶-۲ اگر تنش مجاز ورق نشان داده شده، 110 MPa باشد، مطلوبست ماکزیم مقدار مجاز P وقتی: (الف) $r = 10 \text{ mm}$ ، (ب) $r = 18 \text{ mm}$.



شکل م ۱۰۳-۲ و م ۱۰۴-۲

۱۰۴-۲ میله ABC از دو قسمت استوانه‌ای AB و BC تشکیل شده است و جنس آن از فولاد الاستوپلاستیک است ($E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$). نیروی P بر میله وارد می‌شود. در نتیجه، میله به اندازه $\delta_m = 5 \text{ mm}$ کشیده می‌شود. ماکزیمم مقدار نیروی P و تغییر شکل دائمی در میله را پس از حذف این نیرو بیابید.

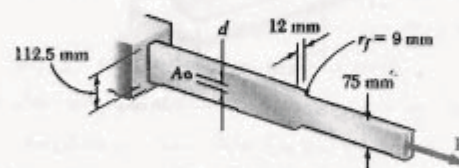
۱۰۵-۲ میله AB از فولاد متوسط الاستوپلاستیک، با $E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 225 \text{ MPa}$ ، ساخته شده است. پس از اتصال میله به بازوی صلب CD، دیده می‌شود که انتهای C به ارتفاع ۶ mm قرار می‌گیرد. سپس، نیروی عمودی Q بر انتهای C وارد می‌شود و آن را تا C' تغییر مکان می‌دهد. اگر بخواهیم بازوی CD پس از حذف بار Q به وضعیت افقی بازگردد، مقدار مورد نیاز Q و انحراف δ_1 را بیابید.



شکل م ۱۰۵-۲

۱۰۶-۲ مسئله ۱۰۵-۲ را با این فرض حل کنید که نقطه تسلیم فولاد متوسط 250 MPa باشد.

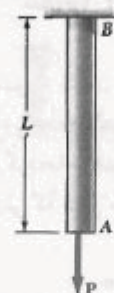
۹۹-۲ می‌خواهیم ورقی را در نقطه A سوراخ کنیم. قطر مته‌های موجود از ۱۲ تا ۲۴ mm و با نمو ۳ mm است. (الف) مطلوب‌ست قطر بزرگترین مته‌ای که می‌توان به کار برد به طوری که بار مجاز در سوراخ از بار مجاز در گرده‌ها بیشتر باشد. (ب) اگر تنش مجاز در ورق 12 MPa باشد، بار مجاز P را بیابید.



شکل م ۹۹-۲ و م ۱۰۰-۲

۱۰۰-۲ (الف) برای $P = 58 \text{ kN}$ و $d = 12 \text{ mm}$ ، ماکزیمم تنش را در ورق نشان داده شده بیابید. (ب) قسمت الف را با فرض نبود سوراخ A حل کنید.

۱۰۱-۲ میله استوانه‌ای AB، به طول $L = 1.5 \text{ m}$ و به قطر ۱۸ mm، از فولاد الاستوپلاستیک است ($E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$). نیروی P بر انتهای میله وارد و سپس حذف می‌شود. در نتیجه، تغییر شکل دائمی δ_m در میله به وجود می‌آید. مطلوب‌ست ماکزیمم مقدار نیروی P و ماکزیمم مقدار δ_m کشیدگی میله برای δ_m برابر با: (الف) ۲.۵ mm، (ب) ۵ mm.



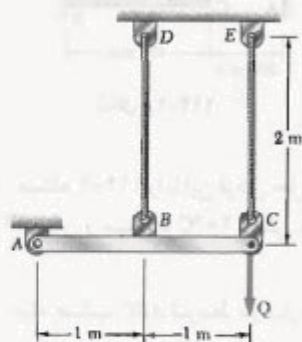
شکل م ۱۰۱-۲ و م ۱۰۲-۲

۱۰۳-۲ میله ABC از دو قسمت استوانه‌ای AB و BC تشکیل شده است و جنس آن از فولاد الاستوپلاستیک است ($E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$). نیروی P بر میله وارد و سپس حذف می‌شود. در نتیجه، تغییر شکل دائمی $\delta_m = 2 \text{ mm}$ در میله به وجود می‌آید. ماکزیمم مقدار P و ماکزیمم مقدار کشیدگی δ_m میله را بیابید.

متصل شده‌اند. این میله مرکب تحت بار محوری مرکزی P قرار دارد. هر دو فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با $E = 200 \text{ GPa}$ هستند. استقامت تسلیم برای فولادهای آبدیده و متوسط، به ترتیب، 690 MPa و 345 MPa است. بار P به تدریج از صفر افزایش می‌یابد تا اینکه تغییر شکل میله به مقدار ماکزیمم $\delta_m = 17.016 \text{ mm}$ برسد، و سپس تا صفر کاهش می‌یابد. مطلوبست: (الف) ماکزیمم مقدار P ، (ب) ماکزیمم تنش در میله‌های فولادی آبدیده، (ج) تغییر شکل دائمی پس از حذف بار.

۱۱۰-۲ برای میله مرکب ۱۰۹-۲، اگر P به تدریج از صفر تا 436 kN افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوبست (الف) ماکزیمم تغییر شکل میله، (ب) ماکزیمم تنش در میله‌های فولادی آبدیده، (ج) تغییر شکل دائمی پس از حذف بار.

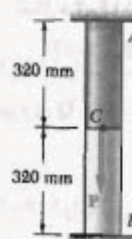
۱۱۱-۲ مساحت مقطع عرضی هر یک از کابل‌ها 100 mm^2 است. کابل‌ها از فولاد الاستوپلاستیک ساخته شده‌اند ($E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 345 \text{ MPa}$). نیروی Q در نقطه C بر میله صلب ABC وارد می‌شود و مقدار آن به تدریج از صفر تا 50 kN افزایش می‌یابد و مجدداً به صفر می‌رسد. اگر کابل‌ها در ابتدا کشیده باشند، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در کابل BC ، (ب) ماکزیمم انحراف نقطه C ، (ج) تغییر مکان نقطه C (راهنمایی: در قسمت ج، کابل CE کشیده نیست).



شکل م ۱۱۱-۲

۱۱۲-۲ مسئله ۱۱۱-۲ را با این فرض حل کنید که به جای کابل از میله‌هایی با همان مقطع عرضی و از همان جنس استفاده شود. همچنین، فرض کنید که میله‌ها مهار شوند به طوری که بتوانند نیروهای فشاری را بدون کماتش تحمل کنند.

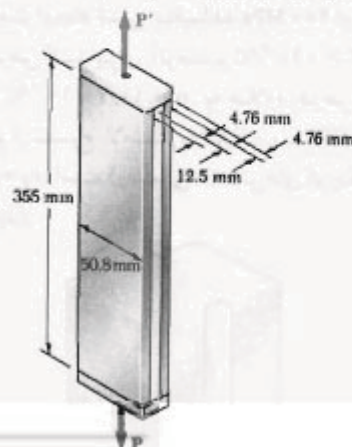
۱۰۷-۲ میله AB از دو قسمت استوانه‌ای AC و BC ، هر یک با مساحت مقطع عرضی 2950 mm^2 ساخته شده است. قسمت AC از فولاد متوسط، $E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ، و قسمت BC از فولاد پر استقامت، با $E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 345 \text{ MPa}$ ساخته شده است. بار P در C وارد می‌شود. اگر فولادها از نوع الاستوپلاستیک باشند، مطلوبست: (الف) ماکزیمم انحراف C در صورتی که P به تدریج از صفر تا 1625 kN افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، (ب) ماکزیمم تنش در هر قسمت میله، (ج) انحراف دائمی C .



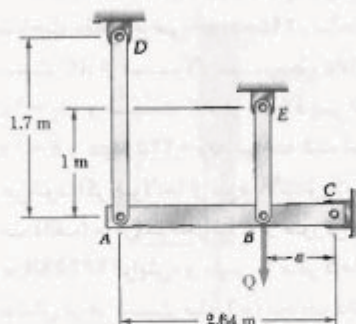
شکل م ۱۰۷-۲

۱۰۸-۲ برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر P به تدریج از صفر افزایش یابد، انحراف نقطه C به مقدار ماکزیمم $\delta_m = 0.5 \text{ mm}$ برسد و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم مقدار P ، (ب) تنش ماکزیمم در هر قسمت میله.

۱۰۹-۲ دو میله فولادی آبدیده، هر یک به ضخامت 4.76 mm ، به میله‌ای از فولاد متوسط به ضخامت 12.5 mm



شکل م ۱۰۹-۲

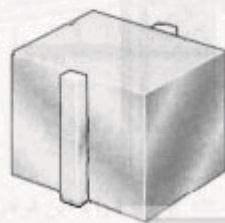


شکل م ۲-۱۱۶

۱۱۷-۲ مسئله ۲-۱۱۶ را با این فرض حل کنید که $a = ۱/۷۶$ m و مقدار نیروی Q وارده در B به تدریج از صفر تا ۱۳۵ kN افزایش یابد.

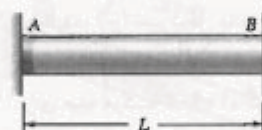
۱۱۸-۲* مسئله ۲-۱۱۶ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی Q وارده در B به تدریج از صفر تا ۲۶۰ kN افزایش یابد و سپس مجدداً به صفر برسد. اگر $a = ۰/۶۴$ m، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در هر میله، (ب) انحراف نهایی نقطه B . فرض کنید میله‌ها مهار شده‌اند به طوری که نیروی فشاری را بدون کماتش تحمل می‌کنند.

۱۱۹-۲* یک میله باریک آلومینیمی، مطابق شکل، به یک طرف ورق ضخیم فولادی متصل است. ابتدا، در $T_1 = ۲۱$ °C، تمام تنش‌ها صفر هستند. اگر دما به تدریج تا T_2 افزایش و سپس تا T_3 کاهش یابد. مطلوبست: (الف) بیشترین دمای T_3 که باعث ایجاد تنش‌های باقیمانده نمی‌شود، (ب) دمای T_2 که باعث ایجاد تنش باقیمانده ۴۰۰ MPa در آلومینیم می‌شود. فرض کنید برای آلومینیم $\alpha_a = ۲۳/۶ \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ و برای فولاد $\alpha_f = ۱۱/۷ \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$. به علاوه، فرض کنید که آلومینیم از نوع الاستوپلاستیک، با $E = ۷۵$ GPa و $\sigma_y = ۴۰۰$ MPa است. (راهنمایی: از تنش‌های کوچک در ورق صرف‌نظر کنید).



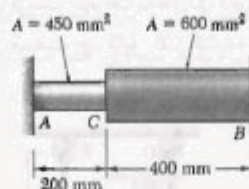
شکل م ۲-۱۱۹

۱۱۳-۲ میله فولادی یکتواخت با مساحت مقطع عرضی A به تکیه‌گاههای صلب متصل است و در دمای ۷ °C بی‌تنش است. فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با $\sigma_y = ۲۵۰$ MPa و $E = ۲۰۰$ GPa است. اگر $\alpha = ۱۱/۷ \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ، مطلوبست تنش در میله: (الف) وقتی دما تا ۱۶۰ °C افزایش می‌یابد، (ب) پس از اینکه دما مجدداً تا ۷ °C کاهش می‌یابد.



شکل م ۲-۱۱۳

۱۱۴-۲ میله فولادی ABC به تکیه‌گاههای صلب متصل است و در دمای ۲۰ °C در حالت بی‌تنش است. فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با $\sigma_y = ۲۵۰$ MPa و $E = ۲۰۰$ GPa است. دمای هر دو قسمت میله تا ۱۲۰ °C افزایش می‌یابد. اگر $\alpha = ۱۱/۷ \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در قسمت AC، (ب) انحراف نقطه C.



شکل م ۲-۱۱۴

۱۱۵-۲* مسئله ۲-۱۱۴ را با این فرض حل کنید که دمای میله تا ۱۲۰ °C افزایش و سپس تا ۲۰ °C کاهش یابد.

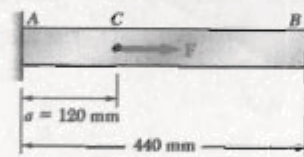
۱۱۶-۲ میله صلب ABC توسط دو بازوی AD و BE نگه داشته شده است. این دو بازو دارای مقاطع عرضی یکتواخت مستطیلی $۳۷/۵$ mm $\times$ ۶ mm و از فولاد متوسط الاستوپلاستیک، با $E = ۲۰۰$ GPa و $\sigma_y = ۲۵۰$ MPa، هستند. مقدار نیروی Q وارده در B به تدریج از صفر تا ۲۶۰ kN افزایش می‌یابد. اگر $a = ۰/۶۴$ m، مطلوبست: (الف) مقدار تنش قائم در هر بازو، (ب) ماکزیمم انحراف نقطه B .

۱۲۱-۲ مسئله ۱۲۰-۲ را با فرض $a = 180 \text{ mm}$ حل کنید.

* ۱۲۲-۲ برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر P به تدریج از صفر تا 436 kN افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، تنش های باقیمانده در میله های فولادی آبدیده را بیابید.

* ۱۲۳-۲ برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر P به تدریج از صفر افزایش یابد تا تغییر شکل میله به مقدار ماکزیمم $\delta_m = 10 \text{ mm}$ برسد و سپس تا صفر کاهش یابد، تنش های باقیمانده را در میله های فولادی آبدیده بیابید.

۱۲۰-۲ میله AB دارای مساحت مقطع عرضی 1200 mm^2 و از فولاد الاستوپلاستیک، با $E = 200 \text{ GPa}$ و $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ است. اگر نیروی F به تدریج از صفر تا 520 kN افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوب است: (الف) انحراف دائمی نقطه C ، (ب) تنش باقیمانده در میله.



شکل م ۱۲۰-۲

مرور و خلاصه فصل ۲

در این فصل، مفهوم کرنش و رابطه بین تنش و کرنش را در مواد مختلف مورد بحث قرار دادیم و تغییر شکل‌های اجزای ساختمانی را تحت بارگذاری محوری تعیین کردیم.

میله‌ای به طول L و با مقطع عرضی یکنواخت را در نظر گرفتیم و تغییر شکل آن را تحت بار محوری P با δ نشان دادیم (شکل ۱-۲). کرنش قائم ϵ را در میله به عنوان تغییر شکل طول واحد تعریف کردیم [قسمت ۲-۲]:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (۱-۲)$$

در میله‌ای با مقطع عرضی متغیر، کرنش قائم در نقطه معین Q را با در نظر گرفتن جزء کوچکی از میله در نقطه Q تعریف کردیم. طول این جزء را با Δx و تغییر شکل آن را تحت بار داده شده با $\Delta \delta$ نشان دادیم و رابطه زیر را نوشتیم:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (۲-۲)$$

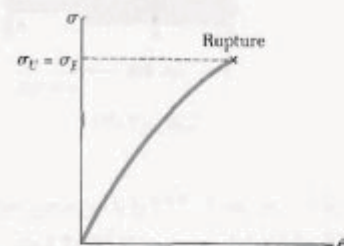
با ترسیم تنش σ بر حسب کرنش ϵ ، نمودار تنش-کرنش را به دست آوردیم [قسمت ۳-۲]. از این نمودار، توانستیم میان مواد شکننده (ترد) و چکش خوار (نرم) تمایز زیر را قائل شویم: نمونه‌ای که از ماده شکننده ساخته شده است گسیخته می‌شود بدون اینکه آهنگ کشیدگی آن قبل از گسیختگی تغییر قابل توجهی داشته باشد (شکل ۱۱-۲)، ولی نمونه چکش خوار پس از اینکه تنش آن به مقدار بحرانی σ_y ، به نام استقامت تسلیم، می‌رسد تسلیم می‌شود؛ یعنی، نمونه قبل از اینکه گسیخته شود، با افزایش نسبتاً کوچک بار وارده (شکل ۹-۲) تغییر شکل قابل توجهی می‌دهد. بتن یکی از موادی است که خواص آن در کشش و فشار کاملاً متفاوت است.

کرنش قائم

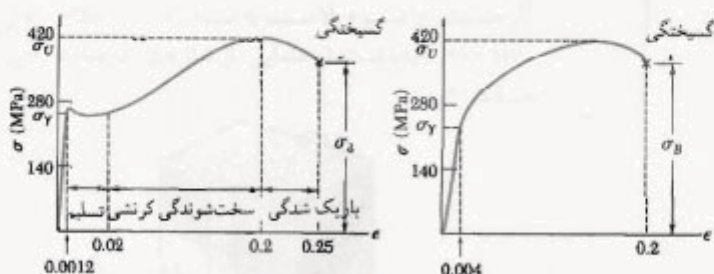


شکل ۱-۲ نمودار تنش-کرنش

نمودار تنش-کرنش



شکل ۱۱-۲



(الف) فولاد کم‌کربن

(ب) آلومینوم

شکل ۹-۲

REB



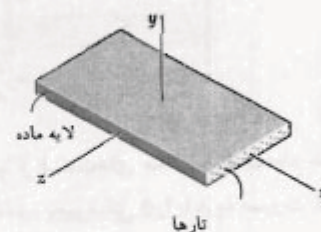
قانون هوک؛ مدول الاستیسیته

در قسمت ۲-۵ دیدیم که قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش یک خط مستقیم است. یعنی، برای تغییر شکل های کم، تنش با کرنش به طور مستقیم متناسب است:

$$\sigma = E\varepsilon$$

این رابطه را قانون هوک، و E را مدول الاستیسیته می گویند. ماکزیمم تنش را که معادله (۲-۴) برای آن به کار می رود حد تناسب ماده می گویند.

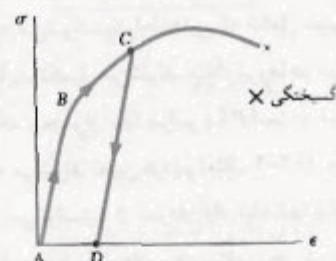
مواد تحت بررسی، همسانگرد (دارای خواص مستقل از جهت) بودند. در قسمت ۲-۵، دسته ای از مواد ناهمسانگرد را نیز بررسی کردیم؛ یعنی، موادی که خواص آنها به جهت بستگی دارد و آنها را مواد مرکب تقویت شده با تار می گویند. این مواد از تارهای محکم و سفتی که در لایه ضعیف تر و نرمتری قرار دارند ساخته شده اند (شکل ۲-۱۷). دیدیم که، برحسب جهت بارگذاری، از مدول های الاستیسیته مختلفی باید استفاده کرد.



شکل ۲-۱۷

حد الاستیک، تغییر شکل پلاستیک

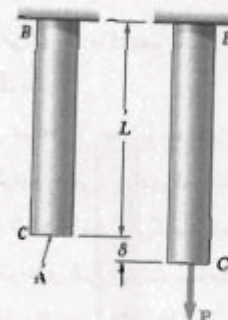
اگر کرنش هایی که با اعمال بار معینی در نمونه ای به وجود می آیند با حذف بار از بین بروند، می گویند ماده رفتار الاستیکی دارد و ماکزیمم تنش را که به ازای آن این حالت روی می دهد حد الاستیک ماده می گویند [قسمت ۲-۶]. اگر ماده از حد الاستیک خود فراتر رود، با حذف بار، تنش و کرنش به صورت خطی کاهش می یابند و کرنش به صفر نمی رسد (شکل ۲-۱۸). یعنی، یک تغییر شکل دائمی (پلاستیک) در ماده به وجود می آید.



شکل ۲-۱۸

خستگی، حد دوام

در قسمت ۲-۷، پدیده خستگی را بررسی کردیم. در این پدیده، عضوهای ساختمانی یا مکانیکی پس از تعداد زیادی بارگذاری تکراری گسیخته می شوند، حتی اگر تنش ها در محدوده الاستیک باشند. در آزمایش استاندارد خستگی، تعداد n سیکل بارگذاری-هاربرداری مورد نیاز برای گسیختگی یک نمونه برای هر مقدار تنش ماکزیمم σ تعیین و منحنی $\sigma-n$ رسم می شود. مقدار σ را که به ازای آن، حتی برای تعداد نامحدودی سیکل، گسیختگی روی نمی دهد حد دوام ماده می گویند.

تغییر شکل الاستیک در
بارگذاری محوری

شکل ۲۲-۲

در قسمت ۲-۸، تغییر شکل های الاستیک انواع مختلف عضوهای ساختمانی و مکانیکی را در شرایط مختلف بارگذاری محوری تعیین کردیم. دیدیم اگر میله ای به طول L و با مساحت مقطع عرضی A در انتهای خود تحت بار محوری مرکزی P قرار گیرد (شکل ۲۲-۲)، تغییر شکل متناظر چنین است:

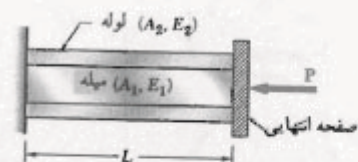
$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (۷-۲)$$

اگر میله در نقاط مختلف بارگذاری شود یا از قسمت های مختلف با مقاطع عرضی مختلف و از مواد مختلف تشکیل شده باشد، تغییر شکل δ را باید به صورت مجموع تغییر شکل های اجزای آن بیان کرد [مثال ۲-۱۰]:

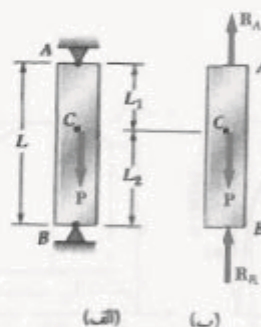
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (۸-۲)$$

در قسمت ۲-۹، مسائل نامعین استاتیکی را حل کردیم؛ یعنی، مسائلی را که در آنها واکنش ها و نیروهای داخلی را نمی توان صرفاً با استاتیک تعیین کرد. معادله های تعادل، که با توجه به نمودار آزاد عضو نوشته می شوند، با رابطه هایی که شامل تغییر شکل ها هستند و از هندسه مسئله به دست می آیند تکمیل می شوند. مثلاً، نیروها در میله و لوله شکل ۲۵-۲ الف را با توجه به اینکه مجموع آنها برابر با P است و نیز باعث تغییر شکل های مساوی در میله و لوله می شوند تعیین کردیم [مثال ۲-۱۰]. واکنش در تکیه گاه های میله شکل ۲۶-۲ را نیز نمی توانستیم از نمودار آزاد میله تنها بیابیم [مثال ۲-۱۰۳]؛ لذا، کشیدگی کلی میله را مساوی صفر قرار دادیم و مسئله را حل کردیم.

مسائل نامعین استاتیکی



شکل ۲۵-۲



(الف) (ب)

شکل ۲۶-۲

RUB

در قسمت ۲-۱۰، مسائلی را که با تغییرات دما سر و کار دارند بررسی کردیم. ابتدا دیدیم که اگر دمای میله آزاد AB به طول L به اندازه ΔT افزایش یابد، کشیدگی آن چنین است:

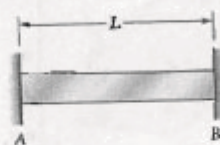
$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L \quad (21-2)$$

که در آن α ضریب انبساط گرمایی ماده است. دیدیم که کرنش متناظر، به نام کرنش گرمایی، چنین است:

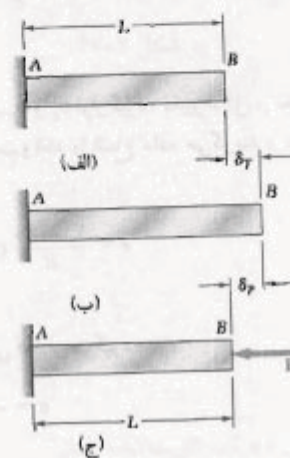
$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad (22-2)$$

هیچ تنشی وابسته به این کرنش نیست. ولی، اگر میله AB توسط تکیه‌گاه‌های ثابت مقید شده باشد (شکل ۲-۳۵ الف)، با افزایش دمای میله، تنش‌هایی در آن به وجود می‌آید و این ناشی از واکنش در تکیه‌گاه‌هاست. برای تعیین مقدار P واکنش‌ها، میله را از تکیه‌گاه B جدا کردیم (شکل ۲-۳۶) و دو تغییرشکل زیر را به طور جداگانه بررسی کردیم: یکی δ_T هنگام انبساط آزاد بر اثر تغییر دما و دیگری δ_P ناشی از نیروی P ، که برای برگرداندن میله به طول اولیه‌اش نیاز است به طوری که میله مجدداً قابل اتصال به تکیه‌گاه B باشد. تغییرشکل کلی $\delta = \delta_T + \delta_P$ را مساوی صفر قرار دادیم، و با حل آن P را تعیین کردیم. گرچه کرنش نهایی در میله AB صفر است، ولی برای میله‌های متشکل از قسمت‌هایی که مقاطع عرضی یا جنس مختلف دارند چنین نیست، زیرا تغییرشکل اجزای مختلف معمولاً صفر نیست [مثال ۲-۱۰۶].

مسائل تغییر دما



شکل ۲-۳۵ الف



شکل ۲-۳۶

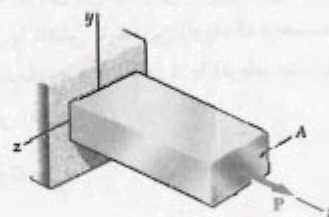
با اعمال بار محوری P بر میله همگن و باریک (شکل ۲-۳۹ الف)، در آن کرنش‌های محوری و جانبی (عرضی) به وجود می‌آید [قسمت ۲-۱۱]. نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری را نسبت پواسون می‌گویند و با ν نشان می‌دهند:

$$\nu = - \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \quad (25-2)$$

لذا، با توجه به کرنش محوری $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ در بارگذاری محوری، کرنش‌های جانبی را به صورت زیر بیان کردیم:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = - \frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (27-2)$$

کرنش جانبی. نسبت پواسون

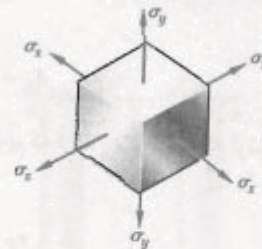


شکل ۲-۳۹ الف

در قسمت ۲-۱۲، نتیجه بالا را برای بارگذاری چند محوری، که تنش‌های شکل ۲-۲۲ را به وجود می‌آورد، بسط داده و قانون عمومی هوک را به صورت زیر بیان کردیم:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (2-28)$$

بارگذاری چند محوری



شکل ۲-۲۲

اگر جزئی از ماده‌ای تحت تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z قرار گیرد، تغییر شکل و تغییر حجم می‌دهد [قسمت ۲-۱۳]. تغییر حجم برای حجم واحد را اتساع ماده می‌گویند و با e نشان داده می‌شود. دیدیم که:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-31)$$

اتساع

وقتی ماده‌ای تحت فشار هیدروستاتیکی p قرار می‌گیرد،

$$e = -\frac{p}{k} \quad (2-34)$$

k را مدول کپه‌ای ماده می‌گویند:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2-33)$$

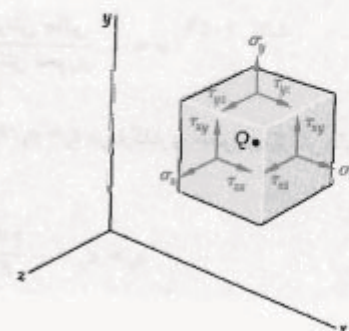
مدول کپه‌ای

در فصل ۱ دیدیم که یک ماده تحت بارگذاری کلی شامل تنش‌های قائم و برشی قائم است (شکل ۲-۴۵). تنش‌های برشی گرایش دارند یک جزء مکعبی از ماده را به صورت متوازی‌السطوح مایل درآورند [قسمت ۲-۱۴]. مثلاً، تنش‌های τ_{xy} و τ_{yx} در شکل ۲-۴۷ (که دارای مقدار برابرند)، باعث می‌شوند زوایای بین وجوهی که این تنش‌ها بر آنها اثر می‌کنند به اندازه زاویه کوچک γ_{xy} افزایش یا کاهش یابند؛ این زاویه، که برحسب رادیان بیان می‌شود، کرنش برشی متناظر با امتدادهای x و y نام دارد. با تعریف مشابه برای کرنش‌های برشی γ_{yz} و γ_{zx} ، رابطه‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (2-36 \text{ و } 37)$$

این رابطه‌ها برای هر ماده همسانگردی که تحت برش با مقدار کمتر یا مساوی حد تناسب قرار دارد صحت دارند. ثابت G را مدول صلابت ماده می‌گویند و رابطه‌های حاصل را قانون هوک برای تنش و کرنش برشی می‌گویند. این رابطه‌ها، همراه با معادله‌های (۲-۲۸)، مجموعه‌ای از معادله‌ها را تشکیل می‌دهند که به آنها قانون عمومی هوک برای یک ماده همگن همسانگرد می‌گویند.

کرنش برشی - مدول صلابت

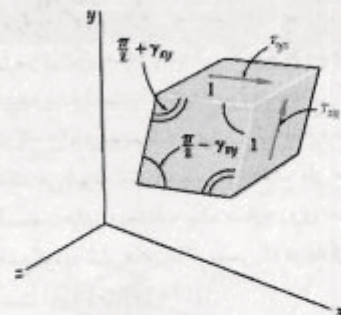


شکل ۲-۴۵

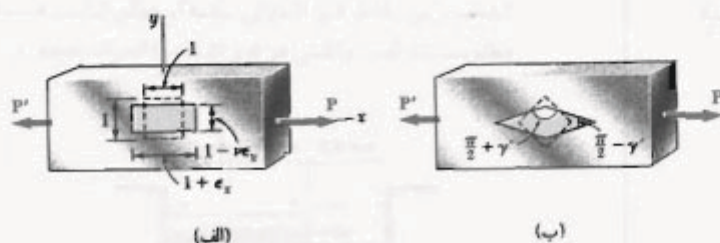
در قسمت ۲-۱۵ دیدیم که بار محوری وارد بر یک میله باریک فقط کرنش‌های قائم محوری و عرضی را در جزئی از ماده که در امتداد محور میله است به وجود می‌آورد. ولی، جزئی که تحت زاویه 45° قرار دارد (شکل ۲-۵۳) تحت کرنش‌های قائم و برشی، قرار می‌گیرد. همچنین، دیدیم که سه ثابت E ، ν و G مستقل از هم نبودند. رابطه زیر را داشتیم:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad (۲-۴۳)$$

از رابطه بالا برای تعیین هر یک از سه ثابت فوق‌الذکر از دو ثابت دیگر می‌توان استفاده کرد.



شکل ۲-۴۷



شکل ۲-۵۳

رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار در قسمت ۲-۱۶ بررسی شدند. معادله‌های مشابه با ۲-۲۸ و ۲-۳۶ و ۲-۳۷ برای این مواد استخراج شدند، و برای این منظور از مدول‌های صلابت، نسبت‌های پواسون و مدول‌های الاستیسته مختلف استفاده کردیم.

مواد مرکب تقویت شده با تار

در قسمت ۲-۱۷، درباره حمل سنت-ونانت بحث کردیم. طبق این اصل، توزیع تنش در یک عضو در نزدیکی نقاط اثر بارها مستقل از حالت واقعی اعمال بار است. طبق این اصل می‌توان توزیع تنش در عضوی را که تحت بار محوری متمرکز است یکسواخت گرفت، به جز در نزدیکی نقاط اثر بار که تمرکز تنش روی می‌دهد.

اصل سنت - ونانت

در عضوهای ساختمانی در نزدیکی ناپیوستگی، مانند سوراخ یا تغییر ناگهانی مقطع عرضی، تمرکز تنش روی می‌دهد [قسمت ۲-۱۸]. نسبت مقدار ماکزیمم تنشی که در نزدیک ناپیوستگی روی می‌دهد به تنش متوسط محاسبه شده در مقطع بحرانی را ضریب تمرکز تنش می‌گویند و با K نشان می‌دهند:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}} \quad (۲-۴۸)$$

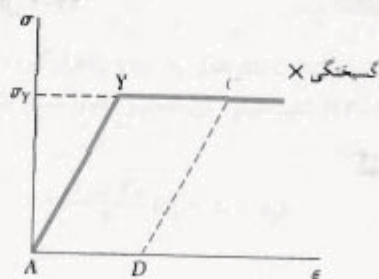
مقادیر K برای سوراخ‌های دایره‌ای و گردها در میله‌های تخت در شکل ۲-۶۴ داده شده‌اند.

تمرکز تنش

INUB

تغییر شکل پلاستیک

در قسمت ۲-۱۹، درباره تغییر شکل پلاستیک بحث کردیم و دیدیم که در عضوهای ساختمانی چکش خوار هنگامی روی می‌دهد که تنش در قسمتی از عضو بیشتر از استقامت تسلیم ماده شود. این تحلیل را برای یک ماده ایده‌آلی الاستوپلاستیک، که نمودار تنش-سکرنش آن در شکل ۲-۶۵ داده شده است، انجام دادیم (مثال‌های ۲-۱۳، ۲-۱۴ و ۲-۱۵). سرانجام، در قسمت ۲-۲۰، دیدیم که وقتی یک سازه نامعین استاتیکی دستخوش تغییر شکل پلاستیک می‌شود، تنش‌ها پس از حذف بار معمولاً از بین نمی‌روند. تنش‌هایی را که در قسمت‌های مختلف یک سازه روی می‌دهند تنش‌های باقیمانده می‌گویند و آنها را از جمع کردن تنش‌های ماکزیممی که در بارگذاری و باربرداری به وجود می‌آیند می‌توان به دست آورد [مثال ۲-۱۶].



شکل ۲-۶۵