بسم الله الرحمن الرحیم

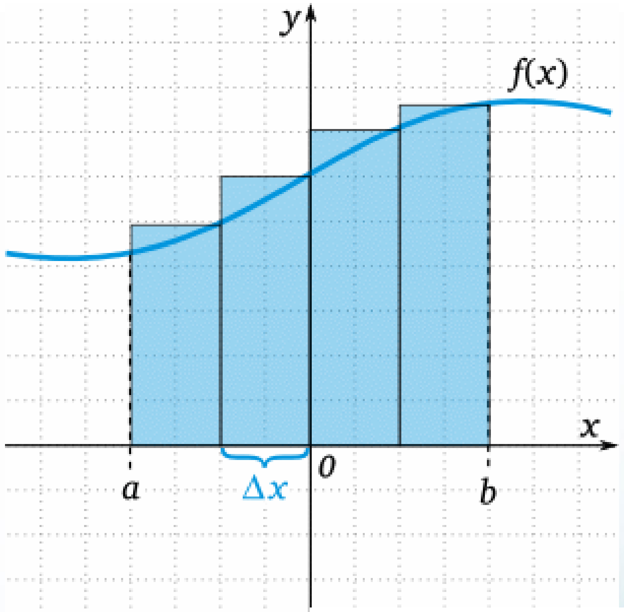
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

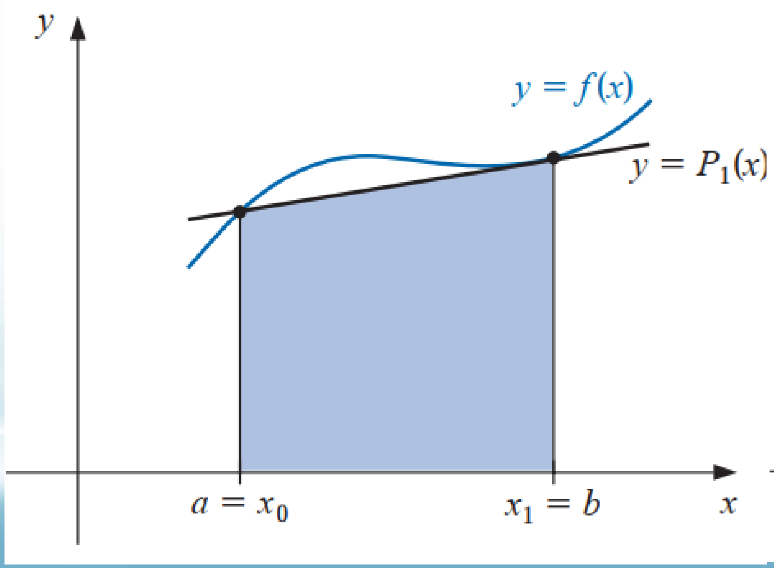
محاسبات عددی

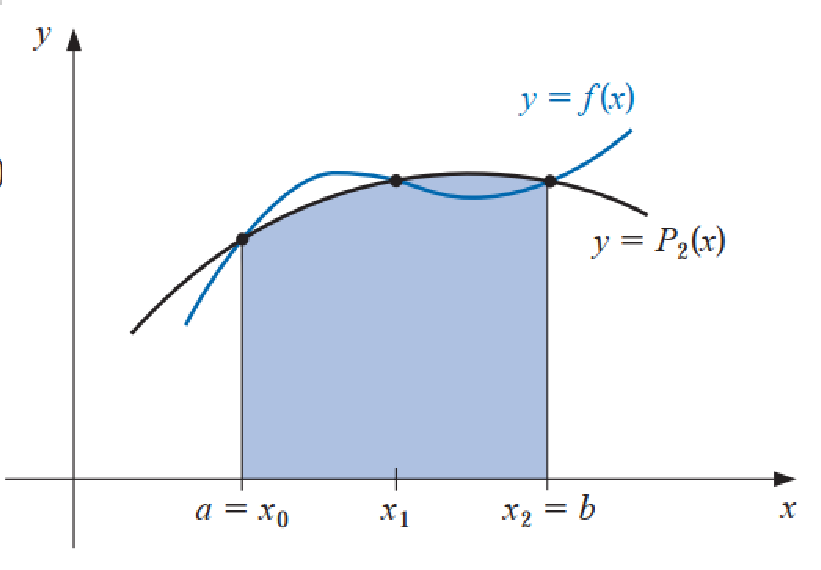
ابراهیم شاه ابراهیمی

اردیبهشت ۹۹

3 Numerical Differentiation and Integration







مقدمه

فصل۱)
ریشه یابی

فصل۲)
درونیابی

فصل۳) حل
عددی انتگرال

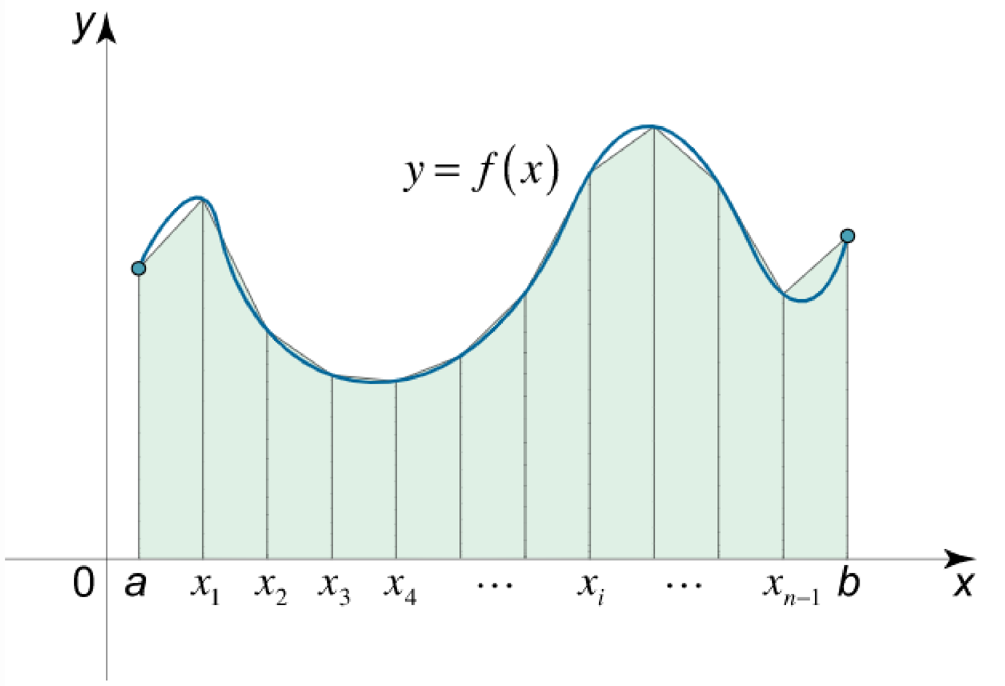
فصل۴) حل عددی
معادله دیفرانسیل

فصل۵)حل عددی
دستگاه معادلات

فصل۶)
برازش منحنی

The Trapezoidal Rule

Simpson's Rule



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

where $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

$$\underbrace{1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 2, 4, 1}_{n+1 \text{ points}}.$$

Example 1.

Use the Trapezoidal Rule with $n = 6$ to approximate $\int_0^\pi \sin^2 x dx$.

Solution. $f(x) = \sin^2 x, \ a = 0, \ b = \pi.$

$f(x_0) = f(0) = \sin^2 0 = 0^2 = 0;$ $f(x_1) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$ $f(x_2) = f\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$

$f(x_3) = f\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1^2 = 1;$ $f(x_4) = f\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$ $f(x_5) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$

$f(x_6) = f(\pi) = \sin^2\pi = 0^2 = 0.$

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx \approx T_6 = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_5) + f(x_6)] = \frac{\pi}{12}\left[0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{12}{2} = \frac{\pi}{2}$$

We can also determine the exact value of the integral:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}[(\pi - 0) - 0] = \frac{\pi}{2}.$$

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

Example 1.

Use Simpson's Rule with $n = 4$ to approximate the integral $\int_0^8 \sqrt{x}dx$.

Solution. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{8-0}{4} = 2,$ $\quad x_i = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$

$$f(x_0) = f(0) = \sqrt{0} = 0;$$

$$f(x_1) = f(2) = \sqrt{2};$$

$$f(x_2) = f(4) = \sqrt{4} = 2;$$

$$f(x_3) = f(6) = \sqrt{6};$$

$$f(x_4) = f(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\int_0^8 \sqrt{x}dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] = \frac{2}{3}\left[0 + 4\cdot\sqrt{2} + 2\cdot 2 + 4\cdot\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[6\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{6}\right] \approx 14.86$$

The true solution for the integral is

$$\int_0^8 \sqrt{x}dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\sqrt{8^3} = \frac{2}{3}\sqrt{2^9} = \frac{2}{3}\cdot 16\sqrt{2}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{3} \approx 15.08$$

EXERCISE SET 3.1

a.	$\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4$	**b.**	$\int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4$
c.	$\int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} \, dx, \quad n = 6$	**d.**	$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$
e.	$\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8$	**f.**	$\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 4} \, dx, \quad n = 8$
g.	$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx, \quad n = 8$	**h.**	$\int_0^{3\pi/8} \tan x \, dx, \quad n = 8$

مقدمه
فصل۱) ریشه یابی
فصل۲) درونیابی
فصل۳) حل عددی انتگرال
فصل۴) حل عددی معادله دیفرانسیل
فصل۵)حل عددی دستگاه معادلات
فصل۶) برازش منحنی

پایان جلسه هفتم
(پایان فصل۳–قسمت۱)
۷ اردیبهشت ۹۹

با تشکر از توجه شما