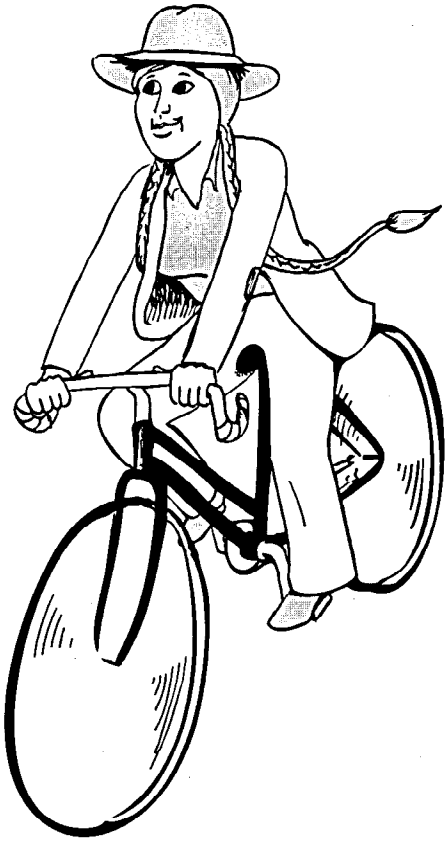
مجسم کنید

دوچرخه‌سواری مسافتی را با دوچرخه طی می‌کند. این دوچرخه‌سوار ساعت اول پنج کیلومتر، سه ساعت بعد هر ساعت چهار کیلومتر و دو ساعت آخر هر ساعت هفت کیلومتر طی می‌کند. در مجموع چند کیلومتر طی کرده است.

الف) پنج کیلومتر
ب) دوازده کیلومتر
ج) چهارده کیلومتر
د) سی و یک کیلومتر



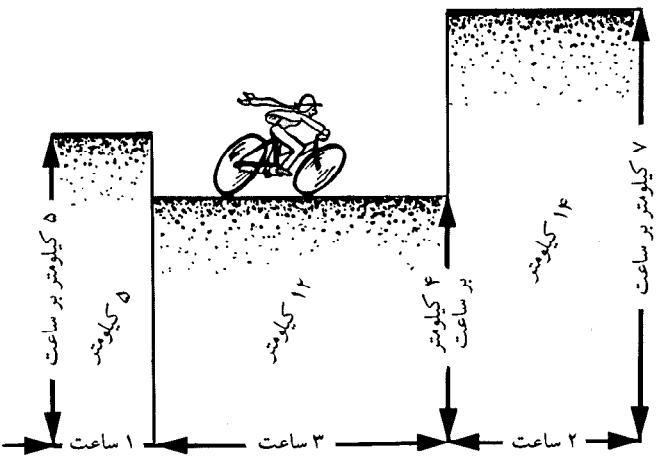
* **پاسخ:** (د) پاسخ درست است. می‌دانید که مسافت برابر است با سرعت ضربدر زمان. سرعت چگونه است؟ سرعت در جریان این مسافرت تغییر می‌کند. بنابراین مسیر طی شده را می‌توان به چند قسمت تقسیم کرد. یک ساعت ضربدر پنج کیلومتر می‌شود پنج کیلومتر، سه ساعت در چهار کیلومتر، دوازده کیلومتر و دو ساعت در هفت کیلومتر می‌شود چهارده کیلومتر. سپس این قسمتهای مختلف را باهم جمع کنید. پنج به‌اضافهٔ دوازده به‌اضافهٔ چهارده می‌شود سی و یک که همان جواب قسمت (د) است.

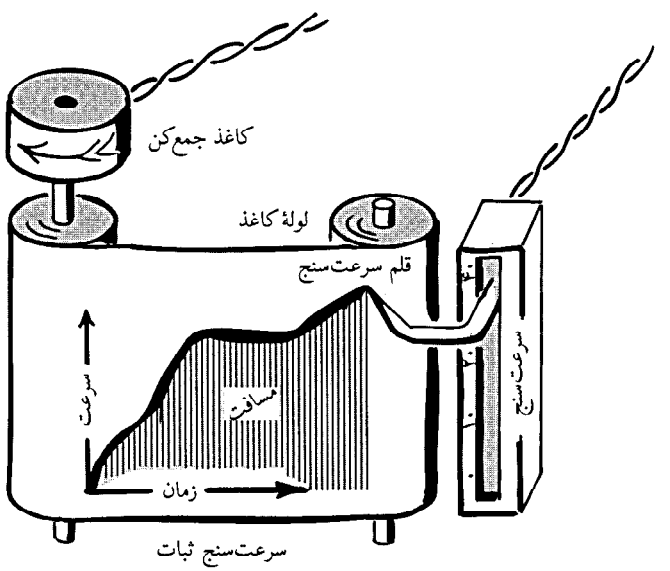
اما موضوع این نیست. این فقط مقداری حساب است و حساب هم کور است. آیا می‌توانید آنچه را انجام داده‌اید مجسم کنید؟ بله، با استفاده از هندسه. هندسه چشم دارد، "می‌بیند."

نموداری رسم کنید که نشاندهندهٔ مسیر دوچرخه‌سواری است. دوچرخه‌سوار برای مدت یکساعت با سرعت پنج کیلومتر در ساعت می‌راند. سپس سرعت را به چهار کیلومتر در ساعت کاهش می‌دهد و در همان حالت سه ساعت رکاب می‌زند. آنگاه سرعتش را تا هفت کیلومتر در ساعت می‌افزاید و دو ساعت به پیش می‌راند و سرانجام توقف می‌کند. اکنون نمودار را به سه مستطیل تقسیم کنید. هر مستطیل نشاندهندهٔ یک قسمت از مسیر است. طول مستطیل اول ۵ کیلومتر بر ساعت و عرض آن یک ساعت است. مساحت این مستطیل چقدر است؟ طول را در عرض ضرب کنید (یعنی ۵ کیلومتر بر ساعت ضربدر یک ساعت) می‌شود ۵ کیلومتر.

مساحت این مستطیل برابر فاصله‌ای است که دوچرخه‌سوار در قسمت اول طی کرده است. به‌همین ترتیب مساحت مستطیل دوم برابر است با ۴ کیلومتر بر ساعت ضربدر سه ساعت که می‌شود ۱۲ کیلومتر. بنابراین مساحت هر مستطیل برابر است با مسافتی که دوچرخه‌سوار در آن قسمت طی کرده است.

این روش بهترین راه برای تجسم مسافت طی شده است. سرعت‌سنج ثباتی را در نظر بگیرید که نمودار سرعت برحسب زمان را رسم می‌کند. مساحت کل زیر منحنی سرعت برابر است با کل مسافت طی شده توسط دوچرخه‌سوار.





حساب انتگرال

با توجه به نمودار به سؤالهای زیر پاسخ دهید.

۱. دو ساعت پس از شروع حرکت، سرعت متحرک چقدر است؟

الف) صفر کیلومتر بر ساعت

ب) ۱۰ کیلومتر بر ساعت

ج) ۲۰ کیلومتر بر ساعت

د) ۳۰ کیلومتر بر ساعت

ه) ۴۰ کیلومتر بر ساعت

۲. کل مسافت طی شده در این حرکت چقدر است؟

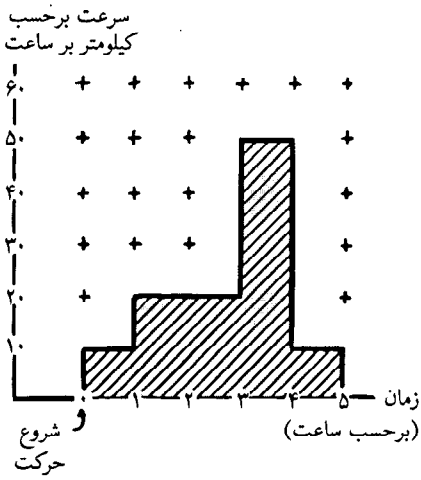
الف) ۴۰ کیلومتر

ب) ۸۰ کیلومتر

ج) ۱۱۰ کیلومتر

د) ۱۲۰ کیلومتر

ه) ۲۱۰ کیلومتر



پاسخ: (ج) پاسخ درست سؤال اول است. منحنی نمودار سرعت در بالای ساعت ۲، سرعت ۲۰ کیلومتر بر ساعت را نشان می‌دهد. پاسخ سؤال دوم هم (ج) است. زیرخط (یا منحنی) سرعت به چند مربع مستطیل کوچک تقسیم می‌شود. یک ضلع (عرض) هر مربع ۱ ساعت و ضلع دیگرش (ارتفاع) ۱۰ کیلومتر بر ساعت است. این گفته به این معناست که مساحت هر مربع کوچک ۱۰ کیلومتر است. اکنون تعداد مربعهای زیر منحنی را بشمارید. می‌شود ۱۱ مربع. یازده ضربدر ده کیلومتر می‌شود ۱۱۰ کیلومتر. بنابراین، مساحت کل زیر نمودار ۱۱۰ کیلومتر است و این برابر مسافتی است که متحرک در این حرکت طی کرده است. اما مساحت مربع چگونه می‌تواند نمایندهٔ فاصله برحسب کیلومتر باشد؟ این کجا و آن کجا؟ مگر نه اینکه مساحت برحسب کیلومتر مربع است؟ مساحت هر مربع در صورتی نشاندهندهٔ کیلومتر مربع است که هم‌عرض آن و هم‌ارتفاع آن برحسب کیلومتر باشد. اما اگر عرض مربع برحسب ساعت و ارتفاع آن برحسب کیلومتر بر ساعت باشد مساحت آن برحسب کیلومتر خواهد بود.

روشی که در اینجا برای پیدا کردن مسافت طی شده استفاده شد روش حساب انتگرال نام دارد. منظور از انتگرال، جمع کردن قسمتهای بسیار کوچکی است که تعدادشان خیلی زیاد است. حساب[1]

1. calculus

قسمتها یا لایه‌های بسیار کوچکی است که مجموعه را تشکیل می‌دهند. معادل انگلیسی این نام از مواد کانی گرفته شده است که لایه‌های جرم (یا سنگ) روی دندان را تشکیل می‌دهد. دندانپزشک هنگام جرم‌گیری دندان این سنگ را با وسایل مخصوصی می‌کند و سنگ تکه‌تکه کنده می‌شود. هرکدام از آن تکه‌ها یک لایه است.

اتومبیل مسابقه

اتومبیل مسابقه‌ای از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱۰ ثانیه سرعت آن به ۶۰ کیلومتر بر ساعت می‌رسد. مسافت طی شده در این ۱۰ ثانیه چقدر است؟

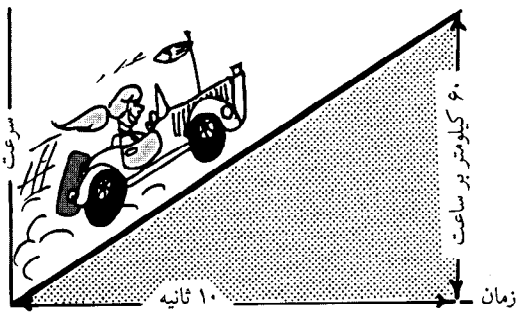
الف) ۱٫۶۰ کیلومتر

ب) ۱٫۱۲ کیلومتر

ج) ۱٫۱۰ کیلومتر

د) ۱٫۲ کیلومتر

ه) ۶۰ کیلومتر

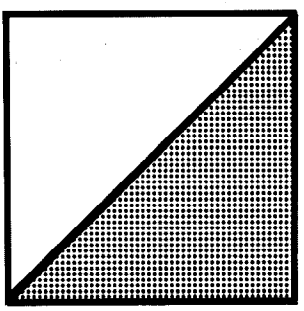


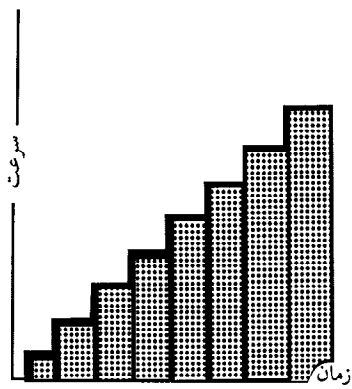
* **پاسخ:** (ب) پاسخ درست است. ابتدا مدت زمان را به ساعت تبدیل می‌کنیم: ده ثانیه برحسب ساعت می‌شود ۱٫۳۶۰.

مساحت مثلث زیر خط سرعت برابر است با قاعده ضربدر نصف ارتفاع. ارتفاع برابر ۶۰ کیلومتر بر ساعت و قاعده برابر ۱٫۳۶۰ ساعت است. کل مسافت طی شده برابر است با

$$۱٫۲ \times ۶۰\ \text{km/h} \times ۱٫۳۶۰\ \text{h} = ۱٫۱۲\ \text{km}$$

اگر بخواهید می‌توانید مثلث را متشکل از پله‌هایی با عرض ثابت بدانید. هر پله یک لایه است.





اتومبیل بدون سرعت‌سنج

اتومبیل مسابقهٔ دیگری طوری مستعمل شده است که حتی سرعت‌سنج هم ندارد. این اتومبیل با حداکثر شتاب به حرکت درمی‌آید و ۱۰ ثانیه پس از شروع حرکت ۱٫۱۰ کیلومتر جلو می‌رود. حداکثر سرعت این اتومبیل در این مدت چقدر بوده است؟

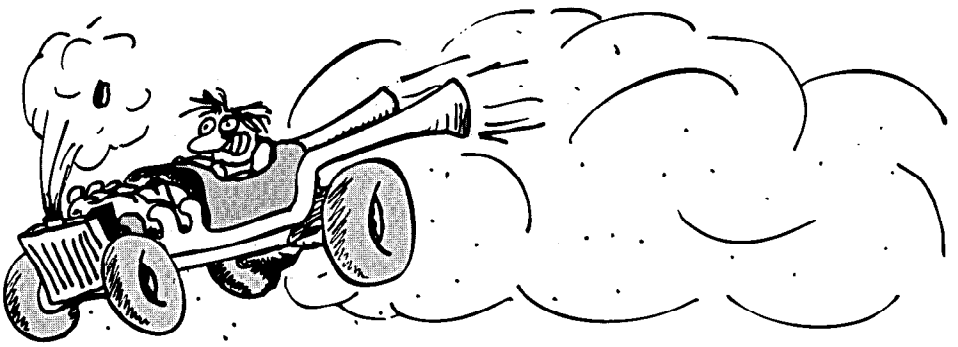
الف) ۶ کیلومتر بر ساعت

ب) ۵۲ کیلومتر بر ساعت

ج) ۶۰ کیلومتر بر ساعت

د) ۶۲ کیلومتر بر ساعت

ه) ۷۲ کیلومتر بر ساعت



* **پاسخ:** (ه) پاسخ درست است. این مسئله تقریباً همان مسئلهٔ اتومبیل مسابقه است.

راه حل کلی این نوع مسائل به‌صورت زیر است

$$\text{مسافت} = (\text{زمان}) \times (\text{بیشینه سرعت}) \times (۱٫۲)$$

بنابراین در این حالت داریم

$$۱٫۲ \times (x\ \text{km/h}) \times (۱٫۳۶۰\ \text{h}) = ۱٫۱۰\ \text{km}$$

دوطرف این معادله را بر ۱٫۳۶۰ h تقسیم کنید.

$$\frac{۱٫۲ \times (x\ \text{km/h}) \times (۱٫۳۶۰\ \text{h})}{۱٫۳۶۰\ \text{h}} = \frac{۱٫۱۰\ \text{km}}{۱٫۳۶۰\ \text{h}}$$

و بالاخره

$$x\ \text{km/h} = ۲ \times ۳۶\ \text{km/h}$$

$$x = ۷۲\ \text{km/h}$$

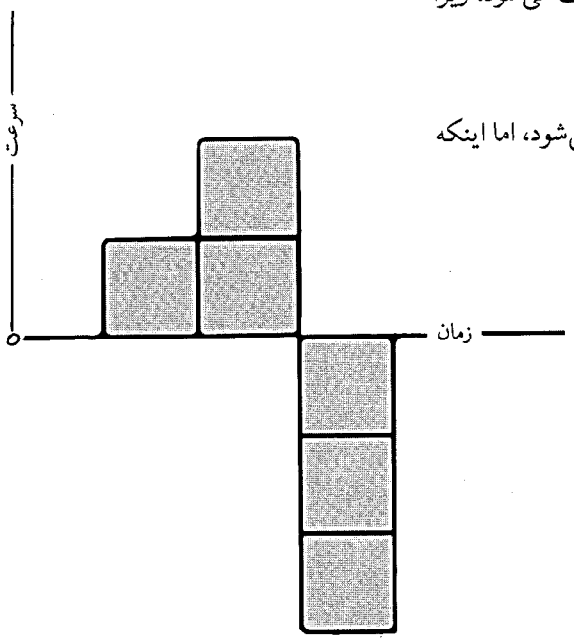
نه‌چندان دور

با توجه به نمودار سرعت بگویید که متحرک در چه فاصله‌ای از نقطهٔ شروع حرکت متوقف می‌شود؟

الف) نمی‌توان گفت متحرک کجا متوقف می‌شود، زیرا نمودار مقیاس عددی ندارد.

ب) در همان نقطهٔ شروع می‌ایستد.

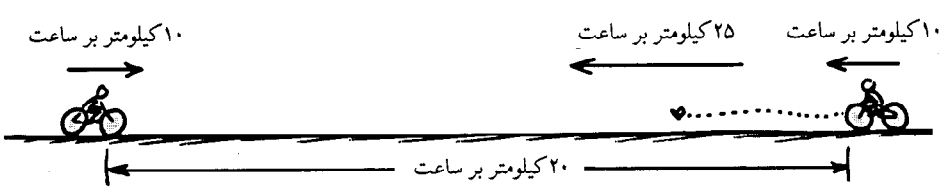
ج) در نقطهٔ شروع حرکت متوقف نمی‌شود، اما اینکه کجا متوقف می‌شود معلوم نیست.



* **پاسخ:** (ب) پاسخ درست است. منظور از سرعت کمتر از صفر چیست؟ منظور این است که متحرک به عقب برمی‌گردد. در نمودار، سه مربع بالاتر از صفر و سه مربع پایینتر از صفر دیده می‌شود. یعنی همان مسافتی را که متحرک جلو رفته به عقب برگشته است. بنابراین مسافرت دو سره است و در همان نقطهٔ شروع به پایان می‌رسد. شما می‌توانید بدون توجه به اینکه متحرک با چه سرعتی حرکت می‌کرده یا چه مدت در راه بوده است به همین نتیجه برسید! وقتی چیزهای مشابه را باهم مقایسه می‌کنیم واحد مقایسه چندان اهمیت ندارد.

دوچرخه‌ها و زنبور عسل

دو دوچرخه‌سوار با سرعت یکنواخت ۱۰ کیلومتر بر ساعت به طرف همدیگر حرکت می‌کنند. در لحظه‌ای که فاصلهٔ میان آنها ۲۰ کیلومتر است زنبور عسلی از چرخ جلو یکی از آنها، با سرعت یکنواخت ۲۵ کیلومتر بر ساعت، مستقیماً به طرف چرخ دوچرخهٔ دیگر پرواز می‌کند. زنبور به‌محض تماس با چرخ دوچرخه، بی‌درنگ برمی‌گردد و با همان سرعت به سوی دوچرخهٔ اول پرواز می‌کند و



این حرکت رفت و برگشتی را آنقدر تکرار می‌کند تا دوچرخه‌ها باهم برخورد کنند و زنبور بینوا لای چرخهای آنها له شود. این زنبور از لحظهٔ جدا شدن از چرخ دوچرخهٔ اول تا زمان پیش آمدن آن حادثهٔ ناگوار چند کیلومتر پرواز کرده است؟ (این مسئله، بسته به اینکه از چه راهی آن را حل کنید می‌تواند خیلی راحت یا خیلی مشکل باشد.)

الف) ۲۰ کیلومتر

ب) ۲۵ کیلومتر

ج) ۵۰ کیلومتر

د) بیشتر از ۵۰ کیلومتر

ه) این مسئله را با این معلومات نمی‌توان حل کرد.

* **پاسخ:** (ب) پاسخ درست است. کل مسافتی که زنبور طی می‌کند ۲۵ کیلومتر است. ساده‌ترین راه حل این مسئله منظور کردن زمان حرکت است. دوچرخه‌ها پس از یک ساعت باهم برخورد می‌کنند زیرا هرکدام با سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت در حرکت‌اند و فاصلهٔ میان آنها هم ۲۰ کیلومتر است. بنابراین، زنبور پروازهای رفت و برگشتش را در مدت یک ساعت انجام می‌دهد. چون سرعت زنبور ۲۵ کیلومتر بر ساعت است کل مسافتی که طی می‌کند ۲۵ کیلومتر است. در اینجا هم عامل زمان یک عامل بسیار مهم در حل مسائل سرعت است!

گُرگی

دکتر تهرانی[1] با سگ شکاریش برای مدت یک ربع ساعت به گردش می‌رود. دکتر می‌خواهد گرگی را در این مدت تمرین بدهد. بنابراین هربار یک چوب‌دستی را به طرفی می‌اندازد و گرگی آن را برایش برمی‌گرداند. برای اینکه گرگی در طول گردش، بیشترین مدت ممکن را در حال دویدن باشد، دکتر باید چوب‌دستی را در کدام جهت پرت کند؟

الف) به طرف جلو

ب) به طرف عقب

۱. در متن اصلی، اسم دکتر Pisani و اسم سگ Sam است. من در موارد دیگر نیز اسامی خاص خارجی را با اسامی ایرانی جایگزین کرده‌ام. م.

ج) به طرفین
د) در همهٔ جهات، زیرا همهٔ جهات از این لحاظ یکسان‌اند.

* **پاسخ:** (د) پاسخ درست است. در اینجا نیز زمان عامل تعیین کننده است. تهرانی می‌خواهد که گرگی مدت ۱۵ دقیقه در حال دو باشد بدون توجه به اینکه چوب را به کدام طرف پرت کند. اما اگر مسئله بیشترین مدت زمان دویدن را به‌ازای هربار پرت کردن می‌خواست آن‌وقت (ب) پاسخ درست سؤال بود، یعنی به سمت عقب. زیرا در آن صورت گرگی مجبور بود مسافت اضافی‌ای را که دکتر هنگام رفتن او به دنبال چوب‌دستی طی کرده بود نیز بدود. درحالی که مسئله صرفاً این را می‌خواهد که گرگی در آن مدت در حال دو باقی بماند. گول‌زنک بود؟ نه! شاید، اما نکتهٔ مهم در این مسائل این است که شما سؤالی را پاسخ بدهید که منظور اصلی سؤال کننده بوده است. به‌عبارت دیگر، شما باید ابتدا منظور مسئله را خوب درک کنید و سپس به آن پاسخ بدهید. متأسفانه بسیاری از دانش‌آموزان در ورقه‌های امتحان غالباً سؤالهایی را پاسخ می‌دهند که اصلاً از آنها پرسیده نشده است. شما دقت کنید هنگام امتحان از این اشتباهها نکنید.

سرعت روی سرعت

اتوبوس واحد خیابان فردوسی با سرعت ۳۶۰ سانتیمتر بر ثانیه به میدان فردوسی نزدیک می‌شود. یکی از مسافران اتوبوس با سرعت ۹۰ سانتیمتر بر ثانیه نسبت به صندلیها و اشیای داخل اتوبوس به طرف جلو حرکت می‌کند. این شخص ساندویچی در دست دارد که با سرعت ۵ سانتیمتر بر ثانیه آن را فرو می‌دهد. مورچه‌ای روی ساندویچ از طرف نزدیک به دهان با سرعت ۲٫۵ سانتیمتر بر ثانیه به طرف انتهای دیگر

ساندویچ در حرکت است. اکنون سؤال این است که مورچه با چه سرعتی به میدان فردوسی نزدیک می‌شود؟

الف) صفر سانتیمتر بر ثانیه

ب) ۲۵۰ سانتیمتر بر ثانیه

ج) ۴۲۵ سانتیمتر بر ثانیه

د) ۴۴۷/۵ سانتیمتر بر ثانیه

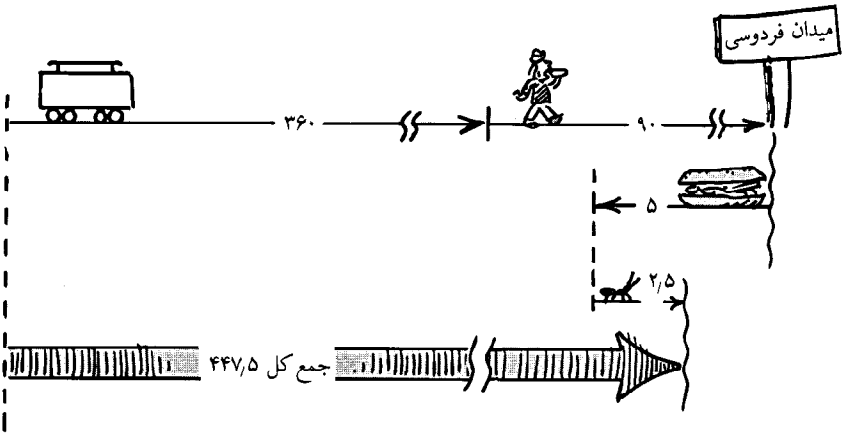
آیا می‌توانید جوابهای بالا را از سانتیمتر بر ثانیه به کیلومتر بر ساعت تبدیل کنید؟ (برای این کار محاسبهٔ ریاضی لازم نیست.)

الف) بله

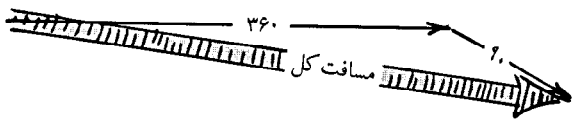
ب) خیر

اگر جواب شما بله است آن‌وقت چگونه می‌توانید از مسافتی که مورچه در یک ساعت طی می‌کند صحبت کنید، درحالی که مورچهٔ بینوا ظرف چند ثانیه همراه با ساندویچ از هضم رابع شخص مسافر هم می‌گذرد؟

* **پاسخ:** (د) پاسخ درست سؤال اول است. می‌توانید مسئله را به‌صورت زیر تصویر کنید. سرعت اتوبوس واحد را با سرعت مسافر جمع کنید (هردو رو به جلو حرکت می‌کنند). سرعت فرو دادن ساندویچ (که در جهت عکس است) را از مجموع آنها کم کنید و سپس سرعت مورچه را (که به طرف میدان فردوسی است) به حاصل جمع بیفزایید.

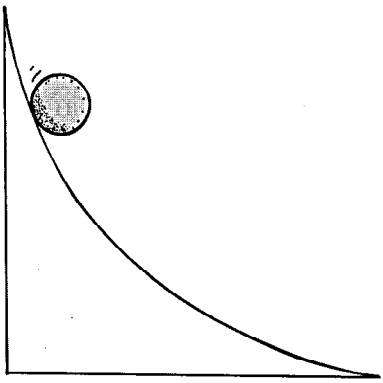


همین روش را می‌توان برای جمع کردن سرعتهایی که در یک راستا نیستند نیز به‌کار برد. به‌عنوان مثال، اگر مسافر با زاویه نسبت به اتوبوس واحد حرکت می‌کرد (صرف‌نظر از سرعت ساندویچ و مورچه) شکل مسئله به‌صورت دیگر بود.



(الف) پاسخ درست سؤال دوم است. توجه داشته باشید که وقتی از کیلومتر بر ساعت صحبت به میان می‌آورید منظورتان را در قالب جملهٔ شرطی بیان می‌کنید. شما نمی‌گویید چقدر خواهد رفت بلکه می‌گویید اگر می‌توانست یک ساعت راه برود چقدر می‌رفت.

سرعت شتاب نیست



گلوله‌ای از سرازیری تپهٔ مقابل پایین می‌آید.

الف) سرعت آن افزایش و شتاب آن کاهش می‌یابد

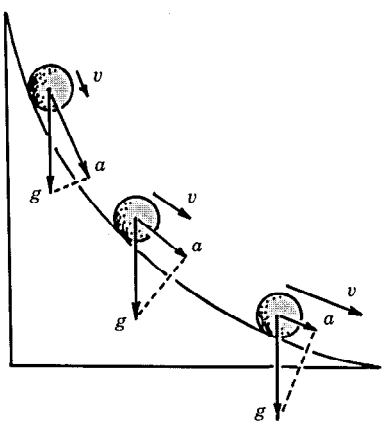
ب) سرعت آن کاهش و شتاب آن افزایش می‌یابد

ج) هردو افزایش می‌یابند

د) هردو ثابت باقی می‌مانند

هـ) هردو کاهش می‌یابند

پاسخ: (الف) پاسخ درست است. سرعت گلوله، ضمن پایین غلتیدن از سرازیری تپه، افزایش می‌یابد اما شتاب آن به شیب تپه بستگی دارد. شتاب در بالای تپه بیشترین مقدار را دارد زیرا شیب تپه در آنجا حداکثر است و همچنان که گلوله به پایین می‌غلتد شیب کم می‌شود و شتاب کاهش می‌یابد. پس، با این حساب، شتاب درضمن افزایش سرعت کاهش می‌یابد. از این مثال برای درک اختلاف میان شتاب و سرعت استفاده کنید و همیشه آن را به‌خاطر بسپارید.

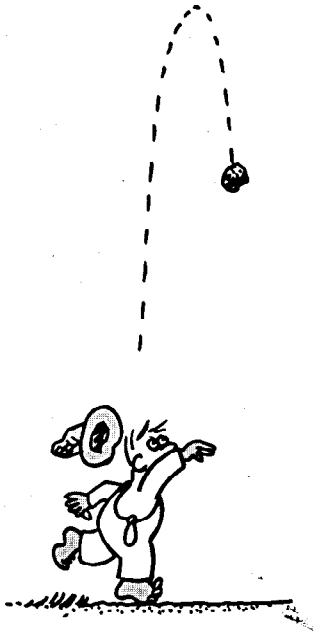


در نمودار روبه‌رو شتاب گلوله را با a، موازی با سطح و به‌صورت مؤلفه‌ای از g، شتاب سقوط آزاد یا شتاب "شیب" قائم، نشان داده‌ایم. هرچه شیب تندتر باشد شتاب a بیشتر به شتاب g نزدیک می‌شود. به‌عبارت دیگر، هرچه تندی شیب کمتر باشد شتاب به صفر (یعنی شتابی که گلوله هنگام رسیدن به سطح افق خواهد داشت) نزدیکتر می‌شود. بعداً از دو مؤلفهٔ برداری روی نمودار صحبت خواهیم کرد.

دقیقتر گفته باشیم، توصیف ما از شتاب در اینجا

کامل نیست، زیرا گلوله، به‌جای مسیر مستقیم، در یک مسیر خمیده حرکت می‌کند. حرکت خمیده خط شامل اثر دیگری است که بحث آن را به بعد موکول می‌کنیم.

شتاب در اوج



سنگی در امتداد قائم به طرف بالا پرت و سرعت آن در نقطهٔ اوج برای یک لحظه صفر می‌شود. شتاب سنگ در آن لحظه چقدر است؟

الف) صفر

ب) ۹/۸۱ متر بر مجذور ثانیه

ج) بزرگتر از صفر، کوچکتر از ۹/۸۱ متر بر مجذور ثانیه

* **پاسخ:** (ب) پاسخ درست است. هرچند سرعت سنگ برای یک آن صفر می‌شود، اما هنوز آهنگ تغییر خود را حفظ کرده است. برای روشن شدن مطلب، حرکت سنگ را یک لحظه قبل یا یک لحظه بعد از صفر شدن سرعت در نظر بگیرید. یک آن قبل یا بعد از لحظهٔ سرعت ـ صفر، سنگ در حال حرکت است. به‌عنوان مثال، یک ثانیه قبل یا بعد از رسیدن به اوج، سرعت سنگ ۹۸۱ سانتیمتر بر ثانیه است. بنابراین هنگام عبور از لحظهٔ سرعت ـ صفر، همچون هنگام گذشتن از سایر مقادیر سرعت، آهنگ تغییر سرعت همچنان حفظ می‌شود. اگر مقاومت هوا قابل چشم‌پوشی باشد، این آهنگ تغییر ۹۸۱ سانتیمتر بر مجذور ثانیه است.

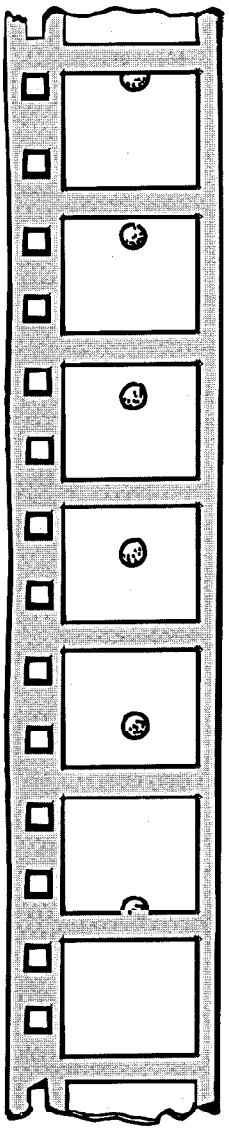
از دیدگاه دیگر، طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر هر جسم به آن جسم شتاب می‌دهد. نیروی گرانش در تمام نقاط مسیر بر سنگ اثر می‌کند و شتاب ثابتی در تمام نقاط مسیر (از جمله در نقطهٔ اوج) به آن می‌دهد. از همهٔ اینها گذشته، اگر سنگ در نقطهٔ اوج به حالت سکون برسد و شتاب هم نداشته باشد برای همیشه در همان نقطه جا خوش خواهد کرد.

برگشت زمان

فیلمی گلولهٔ در حال سقوط آزادی را نشان می‌دهد که با شتاب به طرف پایین سقوط می‌کند. حال اگر فیلم را به عقب برگردانیم شتاب گلوله:

الف) به سمت بالاست

ب) بازهم به سمت پایین است



* **پاسخ:** عجب! (ب) پاسخ درست است. اگر فیلم را به عقب برگردانیم گلوله در آن به طرف بالا می‌رود اما هنوز شتاب آن به سمت پایین است. اگر برگشتن فیلم را در مغز خود مجسم کنید متوجه خواهید شد که گلوله ابتدا به سمت بالا می‌رود و رفته‌رفته سرعت آن کم می‌شود؛ درست مثل اینکه آن را به طرف بالا پرت کرده باشید. واضح است که سرعت روبه‌بالا افزاینده نیست بنابراین شتاب این سرعت نمی‌تواند به سمت بالا باشد. اما چون سرعت، به‌هرحال، تغییر می‌کند شتابی در کار هست و کاهش سرعت به طرف بالا معادل شتاب روبه پایین است.

این مثال نشاندهندهٔ آهنگهای تغییر است. اگر زمان را معکوس کنیم آهنگ تغییر همه‌چیز معکوس خواهد شد، یعنی اگر قبلاً آهنگ تغییر چیزی افزاینده بوده است کاهنده خواهد شد. اما اگر زمان معکوس شود آهنگِ تغییرِ آهنگِ تغییر، معکوس نخواهد شد. شتاب عبارت است از آهنگ تغییر سرعت، و سرعت به‌نوبه خود عبارت است از آهنگ تغییرِ مکان، بنابراین شتاب، آهنگِ تغییرِ آهنگِ تغییر است و به‌همین دلیل معکوس نخواهد شد. دربارهٔ آهنگِ تغییرِ آهنگِ تغییر آهنگ تغییر چه می‌توان گفت؟ آیا این نیز با معکوس شدن زمان معکوس می‌شود؟ بله، معکوس می‌شود. اما آهنگِ تغییرِ آهنگِ تغییرِ آهنگ تغییر آهنگِ تغییر چطور؟ آیا این یکی نیز با معکوس شدن زمان معکوس می‌شود؟ اتفاقاً این عبارتهای طولانی آهنگ تغییر... را می‌توان با نمادهایی نشان داد و به این ترتیب در عبارت نویسی صرفه‌جویی کرد.

اگر X را نماد مکان جسم بدانیم، $\dot{X}$ آهنگ تغییر مکان یا سرعت جسم، $\ddot{X}$ شتاب جسم، $\dddot{X}$ آهنگ تغییر شتاب است که تکان نامیده می‌شود و $\ddddot{X}$ آهنگ تغییر تکان است که شاید شما همت کنید نام خوبی برای آن پیدا کنید.

نرده‌ایها (اسکالرها)

ولتاژ خروجی باتری، حجم بطری، زمان ساعت و مقدار وزن همه در یک چیز مشترک‌اند. این‌وجه اشتراک این است که همه را می‌توان:

الف) فقط با یک عدد

ب) با بیشتر از یک عدد نمایش داد