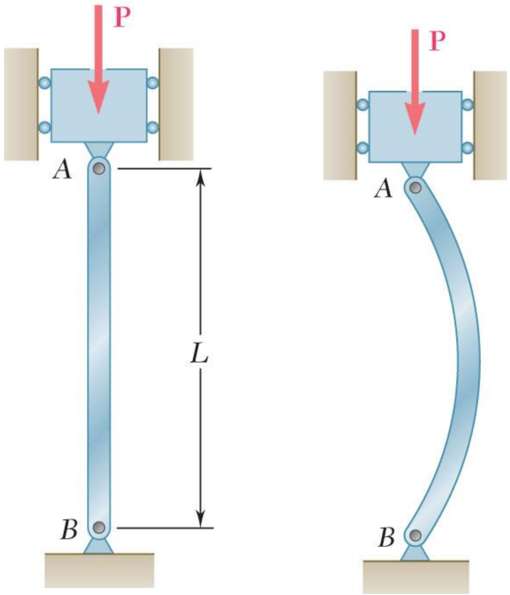
فصل نهم: ستون‌ها

پایداری سازه‌ها



در طراحی مساحت سطح مقطع ستون‌ها باید دو مطلب زیر

را مورد توجه دارد:

الف) تنش در ستون از تنش مجاز فراتر نرود:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all} \qquad (۹-۱)$$

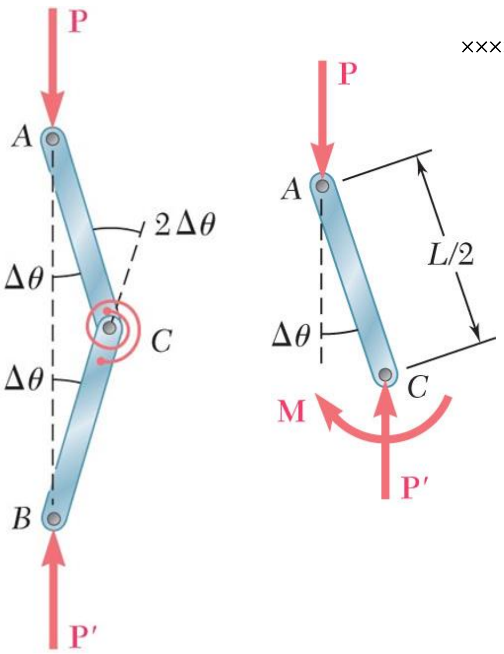
ب) تغییر طول ستون در محدوده مجاز باشد:

(۹-۲)

در این فصل با جنبه دیگری از رفتار ستون‌ها آشنا می‌شویم.

ستون‌ها در اثر بارگذاری در معرض ناپایداری قرار داشته و ممکن دچار انحنای ناگهانی یا کمانش گردند.

××



برای شروع تحلیل، ستون ساخته شده از دو میله که با

فنری پیچشی به هم وصل شده‌اند در نظر بگیرید.

دو میله را مطابق شکل کمی از حالت تعادل منحرف می‌کنیم.

در اثر این انحراف، گشتاوری در فنر ایجاد می‌شود که می‌خواهد

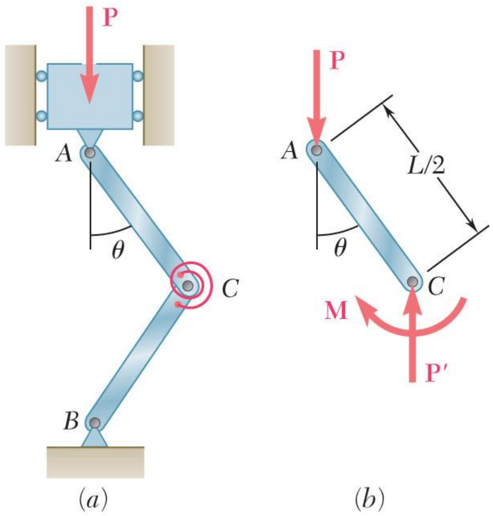
ستون را به حالت عمودی اولیه برگرداند. این گشتاور برابر است با:

$$K(2\Delta\theta)$$

اما نیروی P گشتاوری ایجاد می‌کند که می‌خواهد ستون را از تعادل دور کند. این گشتاور مساوی است با:

××

ستون وقتی پایدار است که گشتاور دور کننده از گشتاور بازگرداننده کمتر باشد.



مقداری از P که به ازای آن دو گشتاور فوق با هم برابرند

نیروی بحرانی ستون نام داشته و با P_{cr} نمایش داده می‌شود:

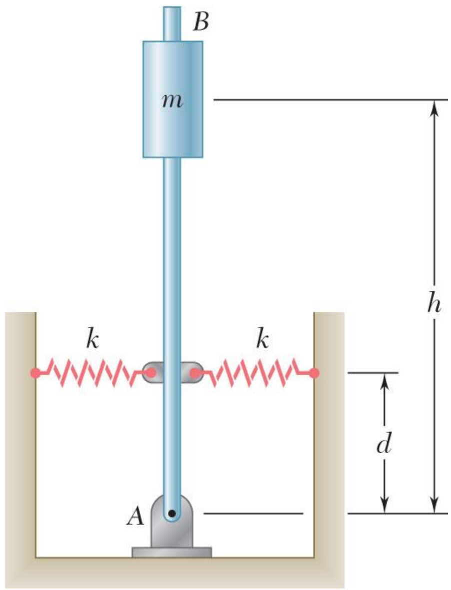
$$P_{cr}\frac{L}{2}\sin\theta = K(2\theta) \Rightarrow P_{cr} = \frac{4K\theta}{L\sin\theta} \approx \frac{4K}{L}$$

وقتی $P<P_{cr}$ باشد ستون پایدار و وقتی $P>P_{cr}$ باشد ستون ناپایدار است.

اما در حالت ناپایدار با وارد شدن انحرافی کوچک، ستون از وضعیت عمودی دور شده به تعادل اولیه برنمی‌گردد.

×××

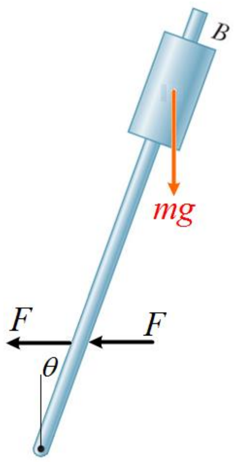
مثال ۹–۱ $m = 125 \text{ kg}$, $h = 700 \text{ mm}$, $k = 2.8 \text{ kN/m}$



در شکل مقابل، محدوده مقادیر d که به ازای آن تعادل

میله صلب AB پایدار است را تعیین کنید.

حل: فرض کنید میله AB به اندازه θ بچرخد:



$$x = d\theta \quad , \quad F = kx = kd\theta$$

×××

با فرض کوچک بودن θ خواهیم داشت: $2Fd - mgh\theta = 0$

برای تعادل پایدار میله لازم است فنر بتواند میله را به حالت عمودی برگرداند.

به این منظور گشتاور بازگرداننده فنر یعنی ترم اول معادله بالا باید از گشتاور دور کننده وزن یعنی ترم دوم بزرگتر باشد:

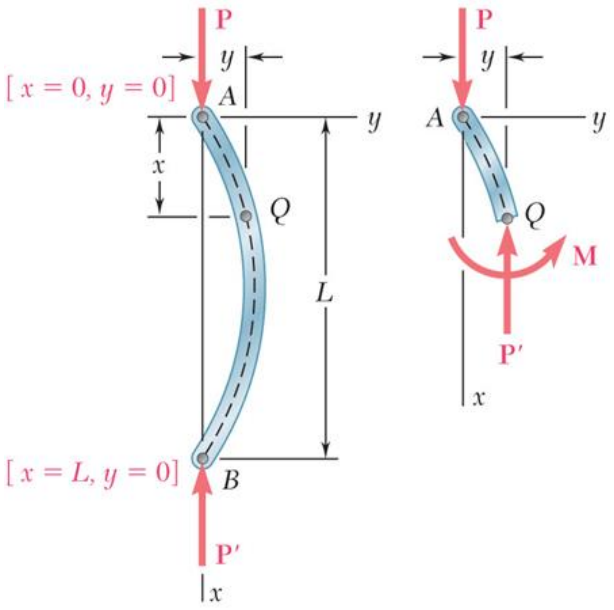
$$2Fd > mgh\theta \quad \rightarrow \quad 2(kd\theta)d > mgh\theta$$

$$\rightarrow \quad d^2 > \frac{mgh}{2k} \quad \rightarrow \quad d > \sqrt{\frac{mgh}{2k}}$$

با جایگذاری حد مجاز d بدست خواهد آمد:

××

فرمول اویلر برای تیرهای دو سر پینی



مطابق شکل در تیری که تحت بار محوری قرار دارد انحراف کوچکی ایجاد کرده و وضعیت تعادل و پایداری آن را بررسی می‌کنیم.

با توجه به دیاگرام آزاد تیر و معادله (۷-۳) می‌توان نوشت:

بنابراین معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم عبارت است از:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \qquad (۹-۳)$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم دارای دو جواب است که به ترتیب به حالتهای تعادل پایدار و ناپایدار تیر مربوط می‌شوند.

××

واضح است که $y_1=0$ یکی از دو جواب این معادله دیفرانسیل است.

این جواب به تعادل پایدار تیر اشاره دارد که در آن تیر به وضعیت مستقیم عمودی برگشته و خیز تیر یعنی y صفر است.

جواب دوم این معادله دیفرانسیل هم تابع غیر صفر y_2 است که به تعادل ناپایدار تیر اشاره دارد.

مانند قبل جواب پایدار به ازای $P<P_{cr}$ و جواب ناپایدار به ازای $P>P_{cr}$ ایجاد می‌شود.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (۹-۴)$$

تنشی که در اثر نیروی بحرانی در تیر ایجاد می‌شود تنش بحرانی نام دارد.

××

مقدار تنش بحرانی از رابطه مقابل بدست می‌آید:

(۹-۵)

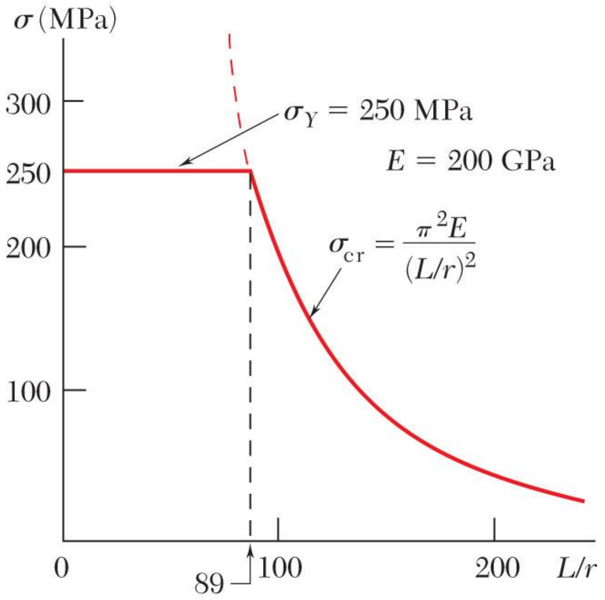
نسبت L/r که در مخرج معادله بالا ظاهر شده است

ضریب رعنایی ستون نام دارد.

همانطور که می‌بینیم تنش بحرانی با عکس مجذور ضریب

رعنایی متناسب است.

این ارتباط در شکل مقابل نشان داده شده است.



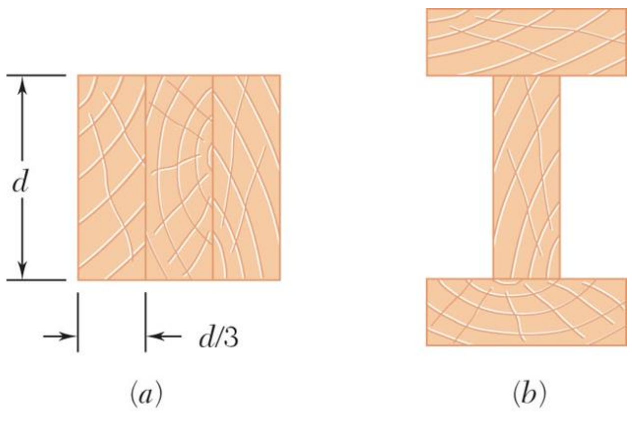
××

مثال ۹-۲

با اتصال قطعات الوار به هم دو ستون به طول مؤثر L و سطح مقطع نشان داده شده در شکل ایجاد کرده‌ایم. نسبت بار بحرانی ستون حالت a به حالت b چقدر است؟

حل: ابتدا حالت a

$$I_a = \frac{1}{12} d^4$$



حل: سپس حالت b

$$I_{min} = I_y = 2\times\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{d}{3}\right)\left(d^3\right)+\left(\frac{1}{12}\right)(d)\left(\frac{d}{3}\right)^3 = \frac{19}{324}d^4$$

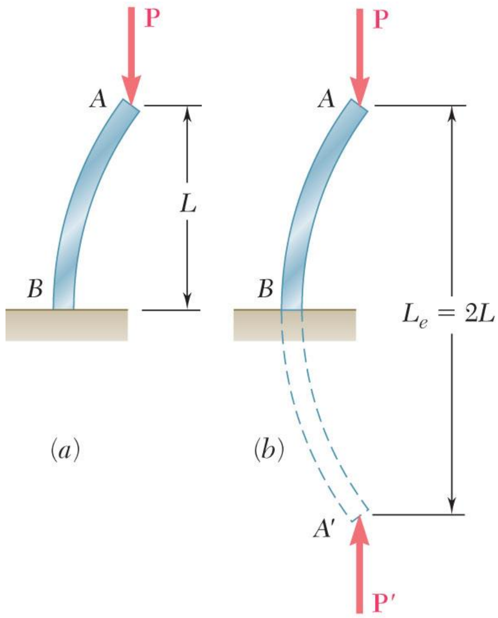
××

در نتیجه:

$$\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,b}}=\frac{\dfrac{\pi^2 Ed^4}{12L^2}}{\dfrac{19\pi^2 Ed^4}{324L^2}}=\frac{\dfrac{1}{12}}{\dfrac{19}{324}}=\frac{1}{12}.\frac{324}{19}=\frac{27}{19}=1.421$$

××

توسعه فرمول اویلر



ستونی که یک سر آن ثابت و سر دیگر آن آزاد باشد مانند نیمه بالایی یک ستون دو سر پین عمل می‌کند.

برای این ستون هم بار بحرانی از فرمول اویلر محاسبه می‌گردد:

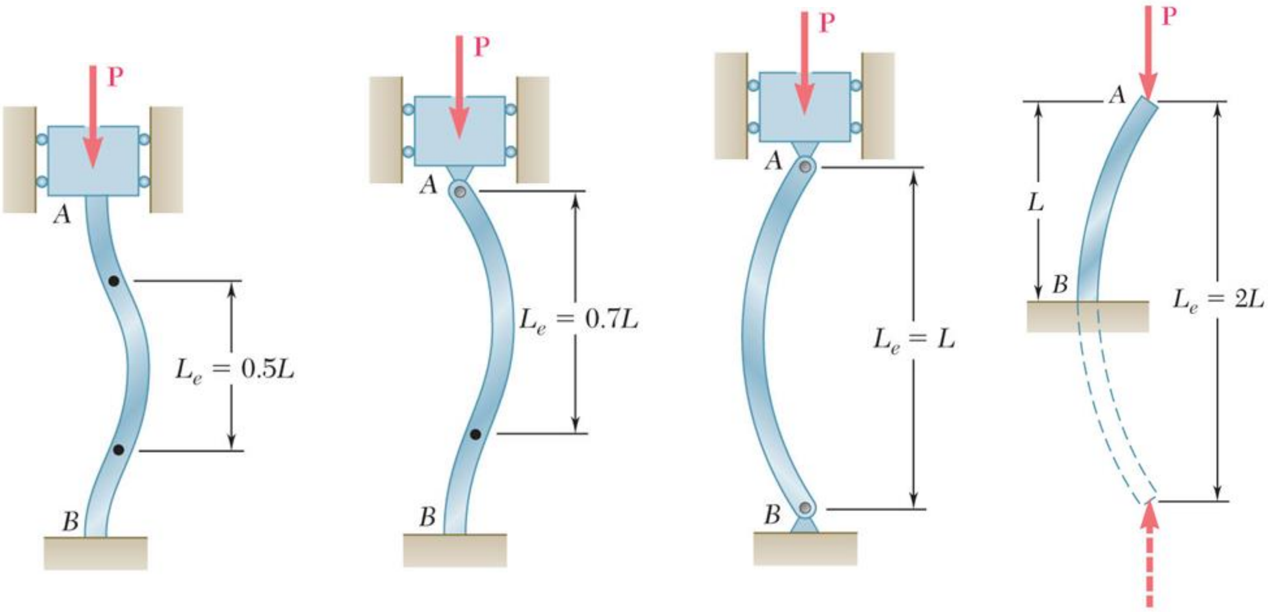
(۶-۹)

در این معادله L_e طول مؤثر ستون نامیده می‌شود که در این حالت خاص برابر است با:

$$L_e = 2L \qquad (۷-۹)$$

××

توسعه فرمول اویلر: طول مؤثر برای ستون‌های مختلف

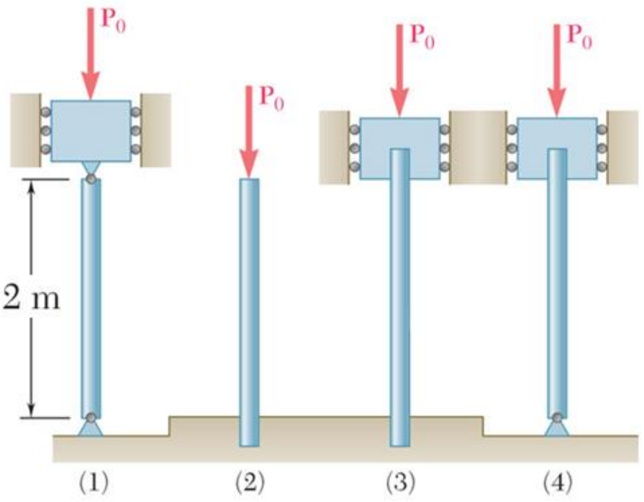


الف) یک سر ثابت یک سر آزاد   ب) هر دو سر پینی   د) هر دو سر ثابت

××

مثال ۹-۳ $\boxed{E = 70\ \text{GPa}}$

هر کدام از چهار ستون آلومینیومی زیر قطر خارجی 32mm و ضخامت 4mm دارند. بار مجاز P را برای هر حالت با فرض ضریب ایمنی 2.3 تعیین نمایید.



حل:

$$c_o = \frac{1}{2} d_o = 16\,\text{mm}$$

$$c_i = c_0 - t = 16 - 4 = 12\,\text{mm}$$

××

$$\rightarrow \quad \pi^2 EI = \pi^2 \left(70\times10^9\right)\left(35.1858\times10^{-9}\right) = 24309\ \text{N.m}^2$$

$$\rightarrow \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{24309}{L_e^2}$$

$$\rightarrow \quad P_{all} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{\dfrac{24309}{L_e^2}}{2.3} = \frac{10569}{L_e^2}$$

حالت اول:

$$L_e = (1)(2.0) = 2.0\ \text{m} \quad , \quad P_{all} = 2642\,\text{N} = 2.64\,\text{kN}$$

حالت دوم:

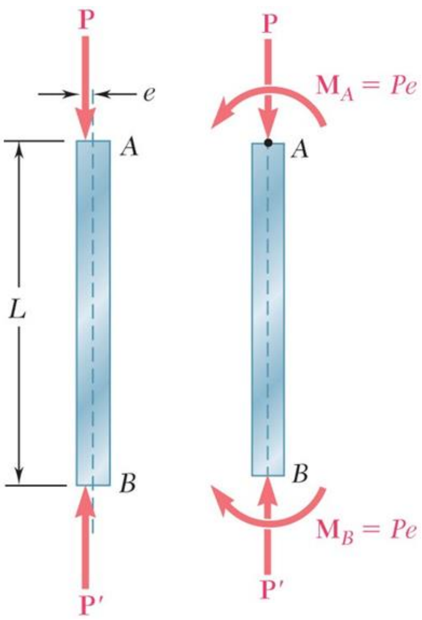
××

حالت سوم:

حالت چهارم:

$$L_e = (0.7)(2.0) = 1.4\ \text{m} \quad , \quad P_{all} = 5392\ \text{N} = 5.39\ \text{kN}$$

×××



بارگذاری خارج از مرکز- فرمول سکانت

معادله دیفرانسیل مورد استفاده در بخشهای قبل برای بارگذاری مرکزی صادق بود.

بارگذاری خارج از مرکز معادل با بار مرکزی و یک گشتاور است.

معادله دیفرانسیل حاکم بر خیز برای بارگذاری خارج از مرکز عبارت است از:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Py - Pe}{EI} \tag{۹-۸}$$

با حل این معادله می‌توان نشان داد خیز ماکزیمم ستون برابر است با:

(۹-۹)

×××

نیروی بحرانی مثل قبل با معادله زیر بدست می‌آید:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{۹-۱۰}$$

تنش ماکزیمم در مقطعی ستون بدست می‌آید که گشتاور خمشی ماکزیمم باشد.

گشتاور خمشی ماکزیمم برابر است با:

(۹-۱۱)

بنابراین تنش ماکزیمم با رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(y_{\max}+e)c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(y_{\max}+e)c}{Ar^2} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{(y_{\max}+e)c}{r^2}\right) \tag{۹-۱۲}$$

r در این معادله شعاع ژیراسیون سطع مقطع ستون است.

×××

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)\right] \tag{۹-۱۳}$$

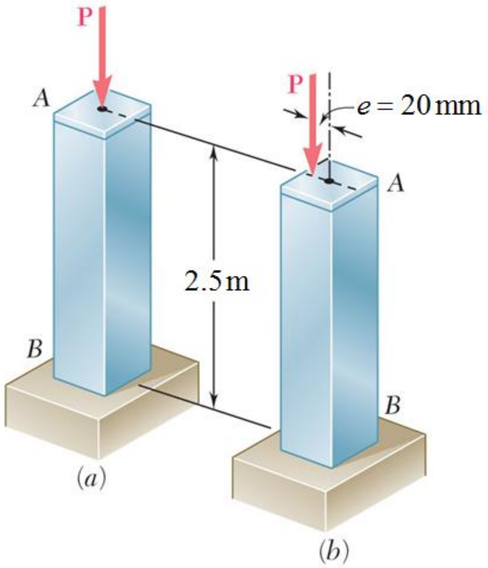
یا بر حسب نیروی بحرانی:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right] \tag{۹-۱۴}$$

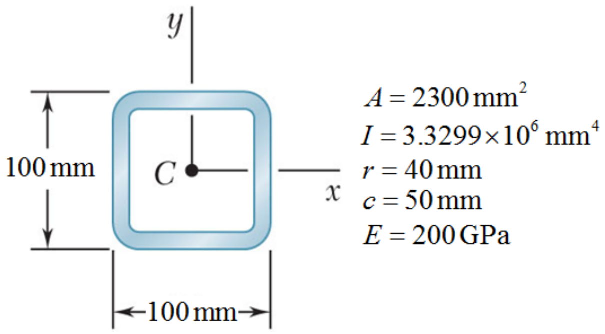
چون رابطه $\sigma_{\max}$ و P خطی نیست بنابراین نمی‌توان از روش برهم نهی برای تعیین تنش ناشی از اعمال همزمان چند بار استفاده کرد.

××

مثال ۹-۴



در شکل زیر، الف) بیشترین نیروی مرکزی که می‌توان به ستون اعمال کرد تعیین کرده و تنش عمودی متناظر با آن را بیابید. ب) اگر نصف نیروی تعیین شده در قسمت (الف) در فاصله 20 میلی‌متری از مرکزوار ستون وارد شود خیز افقی انتهای بالایی ستون و تنش عمودی ماکزیمم ستون را بدست آورید.



حل: الف) مطابق با رابطه (۹-۷) طول مؤثر ستون برابر است با:

××

نیروی بحرانی هم از معادله اویلر یعنی معادله (۹-۶) حاصل می‌گردد:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 200\times 10^9 \times 3.3299\times 10^{-6}}{5^2} = 263\,\text{kN}$$

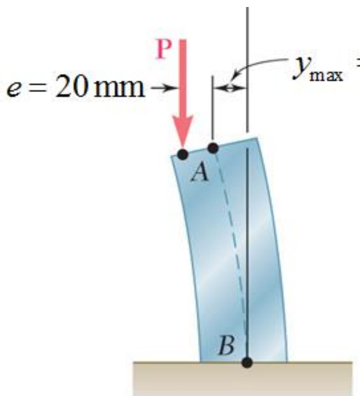
تنش عمودی متناظر با این نیرو مساوی است با:

ب) برای تعیین خیز انتهای ستون در بارگذاری خارج از مرکز از معادله (۹-۹) استفاده می‌کنیم:

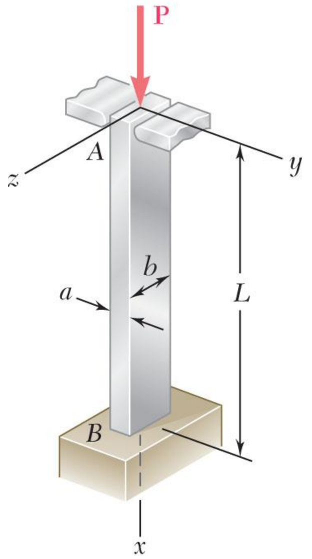
$$y_{\max}=e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)-1\right]=0.02\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0.5P_{cr}}{P_{cr}}}\right)-1\right]=0.2\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)-1\right]=25\,\text{mm}$$

××

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right]=\frac{0.5\times263\times10^3\,\text{N}}{2300\times10^{-6}\,\text{m}^2}\left[1+\frac{0.02\times0.05}{0.04^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0.5P_{cr}}{P_{cr}}}\right]=137.7\,\text{MPa}$$



××



مثال ۹-۵ (دوره)

ستونی آلومینیومی به طول L و سطح مقطع مستطیلی در انتهای B ثابت بوده و در انتهای A تحت نیروی مرکزی P قرار دارد. دو صفحه صیقلی ثابت از حرکت انتهای A در یکی از صفحات تقارن عمودی جلوگیری کرده اما اجازه حرکت در صفحه تقارن دیگر را می‌دهند. $L=500$ mm, $E=70$ Gpa, $P=20$ kN

نسبت دو ضلع مقطع ستون یعنی a/b را طوری بیابید که ستون بیشترین کارایی را در مقابل کمانش داشته باشد.

××

این امر وقتی حاصل می‌شود که نیروی بحرانی ستون در دو صفحه یکسان باشد:

$$\Rightarrow\quad \frac{I_y}{L_{ey}^{\ 2}}=\frac{I_z}{L_{ez}^{\ 2}}$$

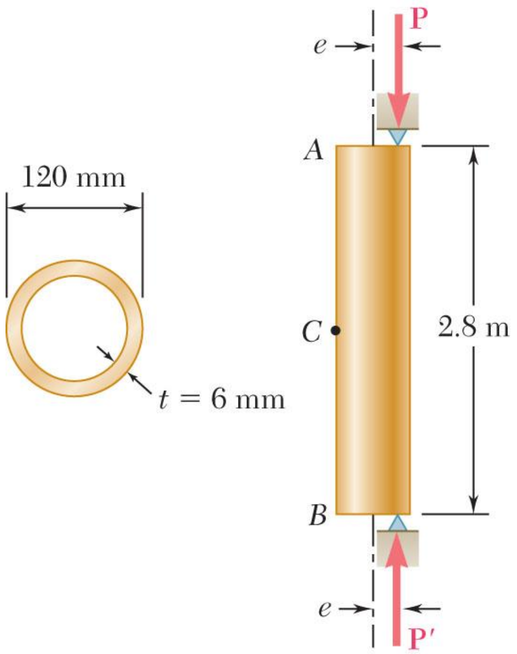
نقطه A از ستون حول محور y بصورت سر آزاد و حول محور z بصورت سر پینی عمل می‌کند بنابراین:

$$L_{ey} = 2L \quad , \quad L_{ez} = 0.7L \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{12}ab^3}{(2L)^2} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{(0.7L)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{b^2}{2^2} = \frac{a^2}{0.7^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = 0.35$$

××

مثال ۹-۶ (دوره) $\quad E = 120\,\text{GPa} \quad , \quad e = 5\,\text{mm}$



برای لوله برنجی مقابل نیروی P که سبب خیز افقی 5mm در C می‌شود را تعیین کنید. تنش ماکزیمم متناظر در ستون را بیابید.

حل:

$$L_e = L = 2.8\,\text{m}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}d_0 = 60\,\text{mm}$$

$$c_i = c_0 - t = 54\,\text{mm}$$

××

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2\left(120\times10^9\right)\left(3.5005\times10^{-6}\right)}{2.8^2} = 528.8\times10^3\ \text{N} = 528.8\ \text{kN}$$

حال با استفاده از معادله (۹-۹) داریم:

$$y_{max} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] \quad \rightarrow \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) = \frac{y_{max}+e}{e}$$

$$\rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) = \frac{e}{y_{max}+e}$$

هم e و هم y_{max} برابر با 5mm است.

××

$$\frac{P}{P_{cr}}=\left[\frac{2}{\pi}\arccos\frac{5}{5+5}\right]^2=0.44444 \qquad \rightarrow \qquad P=0.44444P_{cr}=235\,\text{kN}$$

برای محاسبه تنش ماکزیمم ابتدا باید گشتاور ماکزیمم را تعیین نمود:

$$A=\pi\left(c_0^2-c_i^2\right)=\pi\left(60^2-54^2\right)=2.1488\times10^3\,\text{mm}^2=2.1488\times10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$\rightarrow \qquad \sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{Mc}{I}=\frac{235\times10^3}{2.1488\times10^{-3}}+\frac{(2350)\left(60\times10^{-3}\right)}{3.5005\times10^{-6}}=$$

$$149.6\times10^6\ \text{Pa}=149.6\,\text{MPa}$$