

منحنی ها و رویه های بزیه و کاربرد آنها در طراحی سطوح

استفاده از گرافیک رایانه ای سه بعدی برای طراحی سطح خیش برگرداندار

روش گرافیک رایانه ای سه بعدی روشی کاربردی برای توصیف سطح خیش برگرداندار است. مدل برهم کنشی دو بعدی موجود خاک- ابزار ، برای صفحه ای شیبدار ، برای قالب سه بعدی تغییر یافته است. یک نرم افزار رایانه ای تعاملی (Interactive) ، برای حل نیروهای درافت (کشش) ، جانبی و عمودی ، با استفاده مدل سه بعدی برهم کنشی خاک- ابزار برای خیش برگرداندار ، با تعریف روش گرافیک رایانه ای سه بعدی تهیه شده است. نرم افزار به کاربر اجازه می دهد ، تا سطح خیش ، ویژگی های خاک و حالات و شرایط عمل را تغییر دهد. نیروهای خیش توسط نرم افزار رایانه ، با مقایسه نتایج آزمایشگاهی موجود در تألیفات پیش بینی می شوند. نتیجه می شود که نیروی کشش را می توان با این روش پیش بینی کرد. این مدل از پیش بینی نیروهای عکس العمل های جانبی و عمودی خاک ناتوان است.

استاد مربوطه :

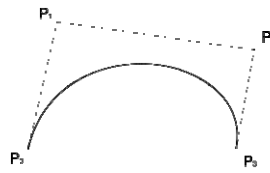
آقای دکتر داوود قنبریان

Omid Omid - omidmac@gmail.com

امید امیدی ارجنکی - گزارش پروژه مهندسی مکانیک ماشین های کشاورزی

۸۳۱۲۹۲۳۰۹ - شهریور ۱۳۸۷ - دانشگاه شهرکرد - دانشکده کشاورزی



خم بزیه^۱

شکل ۱- خم مربعی بزیه

هر تابع پیوسته را طبق قضیه ای^۲، بوسیله چند جمله ای‌ها با استفاده از توابع پایه ای مختلف به طور یکنواخت تقریب زد. یکی از این پایه‌ها چند جمله ای برن اشتاین است. در حوزه آنالیز عددی ریاضی، منحنی بزیه در طراحی رایانه ای و حوزه‌های مربوطه، یک خم پارامتری مهم است. توسعه و تعمیم خم بزیه به ابعاد بالاتر را، سطوح بزیه، و در موارد خاص مثلث‌های بزیه گویند. منحنی بزیه {bezz-ee-aye} به طور گسترده، در سال ۱۹۶۲ توسط مهندس فرانسوی «پیر بزیه»^۳ مطرح شد. او برای طراحی بدنه اتومبیل از این خم‌ها استفاده کرد. وی فرمولی برای کد اصلی که اغلب منحنی‌های برداری بر اساس آن ایجاد میشوند، ارائه کرد. در واقع این تئوری بیان میکند که تمام اشکال از خطوط و گره‌ها تشکیل شده‌اند. شکل خط بزیه میتواند صاف یا منحنی باشد. شکل خطوط، با مشخصات انحراف گره‌های موجود در اشکال کنترل میشوند. دو (یا چند) گره که به وسیله خطوط صاف یا منحنی به یکدیگر متصل شده باشند، مسیر گویند. در واقع اصطلاحات مسیر و خط می‌توانند، به جای یکدیگر به کار روند، زیرا خطوط می‌توانند صاف یا منحنی باشند. بحث خم اولین بار، در سال ۱۹۵۹ توسط «پائول دکستلجاو»^۴ توسعه یافت؛ که از الگوریتم خاص خویش (یک روش ثابت عددی برای تحلیل خم‌های بزیه^۵) استفاده کرد.

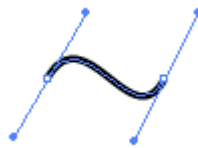
در گرافیک برداری، خم‌های بزیه ابزار بسیار مهمی هستند که، در مقیاس‌های نامحدود، برای مدل کردن خم‌های مسطح (هموار^۶)، استفاده می‌شوند. «مسیر»^۷ها، که به طور عمومی در نرم افزارهای تحلیل تصاویر، مثل Adobe's Inkscape،

- ^۱ Bézier Curve
- ^۲ قضیه استون - وایرشراس
- ^۳ Pierre Bézier
- ^۴ Paul de Casteljau
- ^۵ Casteljau algorithm
- ^۶ Smooth Curves
- ^۷ Path

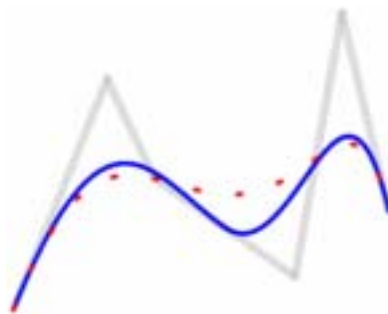
Illustrator و Photoshop ، استفاده میشوند و همراه با ابزار های خم های بزیه ترکیب شده اند ؛ در عمل رسترایز^۸ کردن عکس و تغییرات مستقیم ، هیچ محدودیتی ندارند. قدرت اصلی منحنی های بزیه در ترسیم منحنی های بسیار هموار می باشد. خم های بزیه همچنین در انیمیشن نیز به عنوان ابزاری برای کنترل حرکت در نرم افزارهایی مثل Adobe Flash ، Adobe After Effects یا Autodesk 3ds max ، استفاده می شوند.

۱. کاربرد

۱.۱ گرافیک کامپیوتری



شکل ۲- مسیر بزیه در Adobe Illustrator CS2



شکل ۳- نمونه هایی از دو خم مربعی بزیه که به هم پیوسته اند. (خط آبی) در مقایسه با خم بزیه درجه ششم (نقاط قرمز)

در گرافیک رایانه ای خم های بزیه به طور گسترده ای برای مدل کردن خم های هموار استفاده میشوند. بطوری که منحنی کاملاً دربر غلاف محدب^۹ نقاط کنترلی اش است. نقاط می توانند به صورت نمایش گرافیکی درآیند و برای کنترل و

^۸ Rasterized images : تبدیل تصویر برداری به تصویر Bitmap (تبدیل به عکس طرح بینی)

^۹ Convex Hull : غلاف کوژ ، در ریاضی غلاف کوژ برای یک مجموعه نقاط X در یک فضای برداری حقیقی V ، مجموعه منحنی کمینه ای شامل X است.



اداره مستقیم و بصری منحنی استفاده شوند. تبدیل های مستوی^{۱۰} همچون انتقال^{۱۱}، پیمایش و سنجش^{۱۲} و گردش و چرخش^{۱۳} را می توان روی منحنی ها با استفاده از تبدیل، با ترتیب خاص^{۱۴} روی نقاط کنترلی منحنی، انجام داد.

منحنی های بزیه مکعبی و درجه دوم رواج بیشتری دارند؛ خم های درجه بالاتر برای ارزیابی بسیار سنگینند. زمانی که از چند شکل ترکیب شده استفاده میکنیم، خم های درجه پایین بزیه با هم ترکیب می شوند. این مسئله عموماً متوجه به ابزار «مسیر» در نرم افزارهایی مثل Adobe Illustrator یا Inkscape است. این چند خم بزیه^{۱۵} می توانند هم چنین در فایل هایی با قالب SVG نیز مشاهده شوند. برای تضمین همواری منحنی ها، نقطه کنترلی در دو منحنی ای که به هم میرسند و یک نقطه کنترل، روی هر دو طرف، باید در یک خط مستقیم واقع شوند.

ساده ترین روش برای کاوش و بررسی تبدیل (عمل رسترایز) یک منحنی بزیه، بررسی آن با تعداد زیادی از نقاط فاصله دار است، و بررسی تبدیل، توالی ای از قطعه های خط را تقریب می زند. هر چند این کار، به دلیل اینکه نقاط در فواصل دور از هم هستند، همواری ظاهری خروجی رسترایز کردن را ضمانت نمی کند.

در حالت عکس، میتوان این مورد را به تعداد بسیاری از نقاط، در نواحی ای که خم به پاره خط نزدیک است، تبدیل کرد. روش تطبیقی مرسوم، تقسیم کردن بازگشتی به زیر مجموعه ها^{۱۶}، در نقاط کنترلی انتخاب شده خم، برای بررسی اینکه، آیا این منحنی در تیرانس کوچک تقریب زده می شود یا خیر، است.

اگر خیر، خم به صورت پارامتری به دو قطعه $0 \leq t \leq 0.5$ و $0.5 \leq t \leq 1$ تقسیم میشود و همین پروسه به طور مشابه برای هر طرف به صورت بازگشتی انجام می شود. همچنین در ادامه روشی متفاوت وجود دارد، اما باید احتیاط بسیاری برای آنالیز انتشار خطا به کارگرفت. روش های تحلیلی، که در آنها یک خط باریک (اسپیلاین^{۱۷}) با هر خط پویش^{۱۸} از وسط قطع میشود، درگیر یافتن ریشه های چند جمله ای های مکعبی (برای اسپیلاین های مکعبی) است و با مضرب ریشه ها سروکار دارد. بنابراین عملاً کاربردی ندارند.

^{۱۰} Affine transformation: تابعی از یک فضای خطی به خودش، که مجموع یک تبدیل خطی و یک بردار ثابت است.، تبدیل همگر، تبدیل آفین

^{۱۱} Translation

^{۱۲} Scaling

^{۱۳} Rotation

^{۱۴} Respective transform

^{۱۵} Poly-Bézier Curve

^{۱۶} Recursive Subdivision

^{۱۷} Spline

^{۱۸} Scan Line

۱.۲ پویانمایی^{۱۹}

در نرم افزارهای پویانمایی، مثل Adobe Flash و Adobe Shockwave، خم های بزیه برای طرح ریزی کلی (مثلاً حرکت) به کار می روند. کاربران، مسیرهای مورد نظر را در خم های بزیه طرح ریزی میکنند و نرم افزار فریم های مورد نیاز را برای حرکت سوژه در طول مسیر ایجاد میکند.

۲. بررسی

چند جمله های تک متغیره $b_{i,d}$ برنشتاین جملات حاصل از بسط $[t + (1 - t)]^n$ می باشند. در حالت کلی برای

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} \quad \text{داریم } n \text{ درجه}$$

فرض کنید P_0, P_1, \dots, P_d تقاطی در R^n باشند. در این صورت: $B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t)$, $t \in [0,1]$

یک منحنی بزیه مرتبه n و P_i را رأس های کنترلی آن می نامند که در آن $b_{i,n}(t)$ پایه i -ام از چندجمله های درجه n برنشتاین است. گاهی از نماد $B_n(P_0, P_1, \dots, P_d; 0,1;t)$ برای معرفی منحنی بزیه استفاده میکنند.

۲.۱ خم های بزیه خطی^{۲۰}

نقاط معلوم P_0 و P_1 ، یک خم بزیه خطی خط مستقیم ساده ایست بین آن دو نقطه. خم توسط رابطه زیر ارائه

$$B(t) = P_0 + (P_1 - P_0)t = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1] \quad \text{میشود:}$$

و هم ارز درونیابی خطی^{۲۱} است.

۲.۲ خم های بزیه درجه دوم^{۲۲}

خم های بزیه درجه دوم مسیری هستند که توسط تابع $B(t)$ ترسیم می شوند.

$$B(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1] \quad \text{نقاط } P_0, P_1, P_2 \text{ معلومند.}$$

همچنین خم های درجه دوم بزیه، قطعه های سهمی گون هستند.

در فونت های تروتایپ^{۲۳}، از اسپیلاین های بزیه^{۲۴} که ترکیبی از خم های درجه دوم بزیه هستند، استفاده میشود.

| | |
|-------------------------|----|
| Animation | ۱۹ |
| Linear Bézier Curves | ۲۰ |
| Linear Interpolation | ۲۱ |
| Quadratic Bézier Curves | ۲۲ |

۲.۳ خم های بزیه مکعبی

چهار نقطه P_0, P_1, P_2, P_3 در صفحه یا در فضای سه بعدی، خم مکعبی بزیه را تعریف می کنند. خم از نقطه P_0 شروع شده و به سمت P_1 می رود و از سمت P_2 به P_3 میرسد. معمولاً، خم از نقاط P_1 و P_2 عبور نمی کند؛ این نقاط تنها برای تأمین اطلاعات، برای جهت گیری، وجود دارند. مسافت بین P_0 و P_1 میزان پیمایش و طول حرکت خم را در جهت P_2 ، قبل از اینکه به طرف P_3 سر خم کند، تخمین میزند. فرم پارامتری خم بگونه زیر است:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, t \in [0,1]$$

سیستم های مدرن ارائه تصویر^{۲۵} مثل PostScript، Asymptote، و Metafont از اسپیلاین های بزیه که از خم های مکعبی بزیه ترکیب شده است برای رسم شکل های خمیده استفاده میکنند.

۳. تعمیم

خم بزیه درجه n را میتوان به این شرح تعمیم داد. نقاط P_0 تا P_n معلومند.

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i (1-t)^{n-i} t^i = P_0 (1-t)^n + \binom{n}{1} P_1 (1-t)^{n-1} t + \dots + P_n t^n, t \in [0,1]$$

$$B(t) = P_0 (1-t)^5 + 5P_1 (1-t)^4 t + 10P_2 t^2 (1-t)^3 + 10P_3 t^3 (1-t)^2 + 5P_4 t^4 (1-t) + P_5 t^5$$

این رابطه را به طور بازگشتی نیز می توان ارائه کرد:

فرض کنیم $B_{P_0 P_1 \dots P_n}$ ، خم بزیه ای که توسط نقاط P_0 تا P_n مشخص شده است را، معرفی می کند.

$$B(t) = B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) = (1-t) B_{P_0 P_1 \dots P_{n-1}} + t B_{P_0 P_1 \dots P_n}(t) \quad \text{پس:}$$

به بیانی، خم بزیه درجه n یک درونیایی خطی، بین $n-1$ خم بزیه درجه دو است.

۳.۱ اصطلاحات فنی

چند اصطلاح فنی پیوسته به این منحنی های پارامتری است. داریم :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

که در آن چند جمله ای ها عبارتند از :

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

که به اساس چند جمله های برن استین^{۲۶} در درجه n معروف است. تعریف اینکه $t^0 = 1$ و $(1-t)^0 = 1$. نقاط P_i برای خم های بزیه به نام نقاط کنترلی^{۲۷} معروفند. چند ضلعی شدن با اتصال نقاط بزیه با خطوط ، شروع با P_0 و پایان با P_n ، به نام چندضلعی بزیه^{۲۸} (یا چندضلعی کنترل) معروف است.

غلاف کوژ چند ضلعی بزیه ، شامل منحنی بزیه است.

▪ نقاط گره^{۲۹} : این ها نقاطی هستند که در هر نرم افزاری با هر مرتبه کلیک موس بر صفحه ترسیم میشوند.

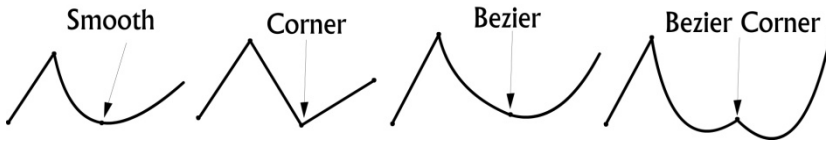
◆ گره Smooth : در این حالت Segment های ورودی و خروجی آن گره یک منحنی ثابت را تشکیل می دهند و در امتداد یکدیگر قرار می گیرند.

◆ گره Corner : هرگاه قطعات ورودی و خروجی ؛ خط راست باشند یک گره از این نوع ایجاد میشود.

◆ گره Bézier : زمانی است که دو Segment ورودی و خروجی منحنی را تشکیل می دهند که دو نقطه گره بر یک خط راست مماس است. شیب این خط راست قابل تنظیم است.

◆ گره Bézier Corner : هرگاه خطوط مماس بر قطعات ورودی و خروجی در یک گره با هم متفاوت باشند به گونه ای که هر قطعه دارای دسته^{۳۰} مستقل باشد.

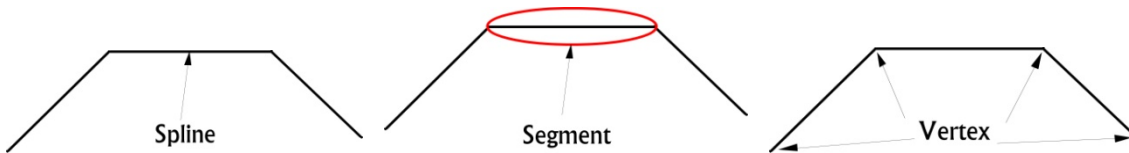
| | |
|-----------------------------|----|
| Bernstein Basis Polynomials | ۲۶ |
| Control Points | ۲۷ |
| Bézier Polygon | ۲۸ |
| Vertex | ۲۹ |
| Handle | ۳۰ |



شکل ۴- مفهوم گره های مختلف

- **قطعه^{۳۱}** : حدفاصل بین هر دو نقطه گره ، یک قطعه است. بنابراین همیشه تعداد قطعات چند خطی یک واحد کمتر از تعداد نقاط گره ها است.
- **خط باریک^{۳۲}** یا منحنی دوبعدی : مجموعه قطعاتی که به یکدیگر متصل هستند و هیچ انفصالی میان آنها نیست . Spline مشهورند. امکان دارد یک «چند خطی» از چند Spline تشکیل شده باشد.

در تصاویر زیر مشهود اند :



شکل ۵- مفهوم گره ، قطعه و خط باریک

۳.۲ نکات

خم از نقطه P_0 شروع و در نقطه P_n پایان می پذیرد. به آن اصطلاحاً مشخصه نقطه پایانی درونیایی^{۳۳} گویند. منحنی خط مستقیمی است اگر و تنها اگر همه نقاط کنترل روی منحنی بیفتند و به طور مشابه خم بزیه خط مستقیمی است اگر و تنها اگر نقاط کنترل روی یک خط مستقیم قرار گیرند.

شروع (پایان) منحنی ، به اولین (آخرین) قسمت از چند ضلعی بزیه مماس است. منحنی می تواند در هر نقطه ای به دو زیر منحنی یا به چند زیر منحنی دلخواه که هر کدام به تنهایی یک خم بزیه است، شکسته شود. برخی خم ها مثل دایره ، که به نظر ساده می آیند را نمی توان دقیقاً توسط یک منحنی بزیه یا خم بزیه قطعه ای توصیف کرد. (با وجود چهار قطعه خم مکعبی بزیه می توان دایره را ، با حداکثر خطای شعاعی کمتر از یک در هزار تقریب زد ،

^{۳۱} Segment
^{۳۲} Spline
^{۳۳} Endpoint Interpolation Property

زمانی که هر نقطه کنترلی داخلی در فاصله عمودی و افقی $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}$ از نقطه کنترل خارجی روی یک دایره واحد باشند.

به طور کلی یک خم n قطعه بزیه می تواند یک دایره را تقریب بزند زمانی که هر نقطه کنترل داخلی فاصله

را از نقطه کنترل خارجی روی یک دایره واحد داشته باشد؛ جایی که t برابر $\frac{360}{n}$ درجه

و $n > 2$ باشد. غالباً منحنی، در یک خمیدگی ثابت، از یک خم بزیه معلوم را، خم آفست^{۳۴} گویند، (تقریباً

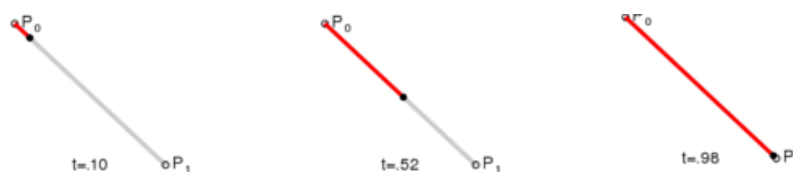
«موازی» منحنی اصلی، مثل آفست بین ریل ها در خط راه آهن) که نمی تواند دقیقاً توسط خم بزیه شکل داده

شود. (بجز در موارد جزئی)

هرچند، راه های ابتکاری ای وجود دارند که معمولاً تقریب کافی را برای مقاصد عملی ارائه می دهند.

۴. ایجاد یک خم بزیه

۴.۱ خم های خطی



شکل ۶- مراحل ایجاد یک خم بزیه خطی که t در دامنه ۰ تا ۱ تغییر میکند.

پارامتر t در تابع برای یک خم بزیه خطی می تواند نظری باشد برای توصیف اینکه مقدار مسافت $B(t)$ از P_0 تا P_1

چقدر است. برای مثال زمانی که $t = 0.25$ باشد، $B(t)$ یک چهارم از راه نقطه P_0 تا P_1 است. همینطور با تغییر

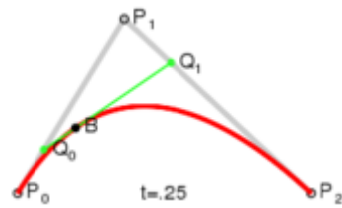
t از صفر تا ۱، $B(t)$ ، یک خط خم شده از P_0 تا P_1 را توصیف می کند.



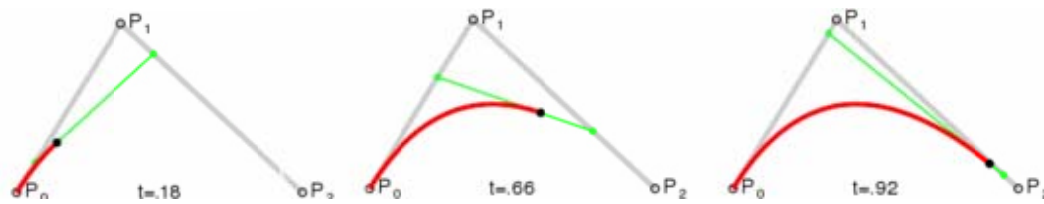
۴.۲ خم‌های درجه دوم

برای خم‌های بزیه درجه دوم نقاط واسط Q_0 و Q_1 را به همان شکل می‌توانیم ایجاد کنیم که مشابه تغییرات t از صفر تا ۱ باشند.

- ◆ نقطه Q_0 از P_0 تا P_1 تغییر میکند و یک خم بزیه خطی را توصیف میکند.
- ◆ نقطه Q_1 از P_1 تا P_2 تغییر میکند و یک خم بزیه خطی را توصیف میکند.
- ◆ نقطه $B(t)$ از Q_0 تا Q_1 تغییر میکند و یک خم درجه دوم بزیه را توصیف میکند.



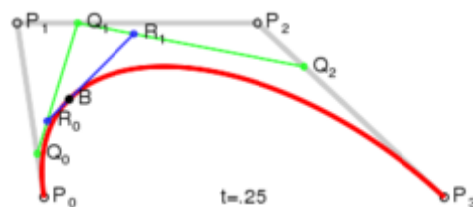
شکل ۷- ایجاد یک خم بزیه درجه دو



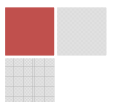
شکل ۸- مراحل ایجاد یک خم بزیه درجه دو که t در دامنه $[0, 1]$ تغییر میکند.

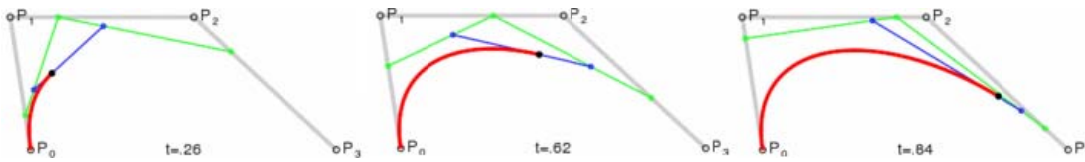
۴.۳ خم‌های درجه بالاتر

برای خم‌های درجه بالاتر متناظراً به نقاط واسطه‌ای زیادتری نیاز است. برای خم‌های مکعبی می‌توانیم به همان شکل نقاط واسطه‌ای Q_0 ، Q_1 و Q_2 را ایجاد کنیم که خم‌های خطی بزیه را توصیف کنند و نقاط R_0 و R_1 که خم‌های دو بعدی بزیه را توصیف می‌کنند.



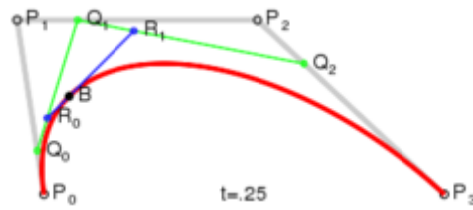
شکل ۹- ایجاد یک خم بزیه مکعبی



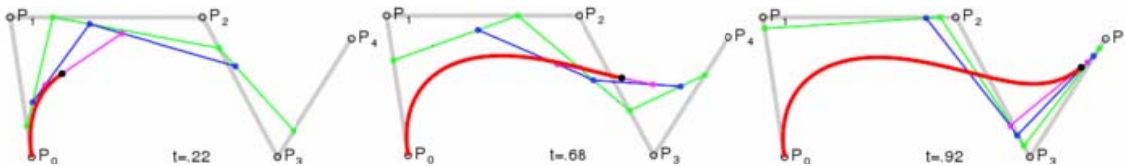


شکل ۱۰- مراحل ایجاد یک خم بزیه مکعبی که t در دامنه 0 تا 1 تغییر میکند.

برای خم‌های درجه چهارم، نقاط واسطه‌ای Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 را داریم که خم‌های خطی بزیه را توصیف میکنند. نقاط R_0, R_1, R_2 که خم‌های بزیه دو بعدی را توصیف می‌کنند و نقاط S_0 و S_1 که منحنی مکعبی بزیه را توصیف می‌کنند.



شکل ۱۱- ایجاد یک خم بزیه درجه چهارم



شکل ۱۲- مراحل ایجاد یک خم بزیه درجه چهارم که t در دامنه 0 تا 1 تغییر میکند.

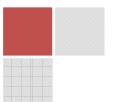
(به همین نسبت می‌توان ساختار یک خم بزیه درجه ۵ را نیز مشاهده کرد.)

۵. فرم چند جمله‌ای

برخی اوقات مطلوبست که خم بزیه به روش چند جمله‌ای، در عوض جمع کمتر چند جمله‌ای‌های سر راست برن استاین^{۳۵} تحلیل شود. کاربرد برهان دو جمله‌ای برای تعریف خم با پیروی مقداری بازآرایش و بازچینی رابطه زیر را

$$B(t) = \sum_{j=0}^n C_j t^j \quad \text{ارائه میدهد:}$$

$$C_j = \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{i=0}^j \frac{P_i (-1)^{i+j}}{i!(j-i)!} = \prod_{m=0}^{j-1} (n-m) \sum_{i=0}^j \frac{P_i (-1)^{i+j}}{i!(j-i)!} \quad \text{که در آن:}$$



این مورد می تواند عملاً کاربردی باشد ، اگر C را بتوان از پیش ، برای سنجش های زیاد $B(t)$ محاسبه کرد. در هر حال ، الزام به استفاده از درجه های خیلی بالای منحنی ها ، شاید از لحاظ عددی بی اساس شود. (الگوریتم Casteljau تنها در زمانی که رخ میدهد ، باید استفاده شود.) توجه شود که حاصل بدون عدد ۳۶ برابر ۱ است.

۶. خم های بزیه گویا

بزیه گویا ، مقیاس های تنظیم را ، برای تأمین شفاف تر و دقیق تر تقریب شکل های دلخواه ، یکجا جمع میکند. صورت کسر ، فرم برن استاین خم بزیه است و مخرج کسر ، جمع چند ضلعی های برن استاین ۳۷ است.

تعداد $n+1$ نقطه کنترل (P_i) معلومند.

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) P_i \omega_i}{\sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) \omega_i} \quad \text{خم بزیه گویا را می توان توسط رابطه زیر توصیف کرد :}$$

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i \omega_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \omega_i} \quad \text{یا به طور ساده تر :}$$

۷. خواص منحنی بزیه

جهت یاد آوری و تأکید بر این خواص ، تمامی ویژگی های مهم منحنی در این بخش گردآوری شدند که عبارتند از :

(۱) منحنی بزیه شامل P_0 و P_n است و خطوط مماس بر منحنی در P_0 از P_1 و در P_n از P_{n-1} عبور میکند. در واقع

$$\left. \begin{aligned} B(0) &= P_0 & B(1) &= P_n \\ B'(0) &= n(P_1 - P_0) & B'(1) &= n(P_n - P_{n-1}) \end{aligned} \right\} \text{داریم :}$$

(۲) تمام نقاط منحنی بزیه در داخل پوشش محدب رأس های خود قرار میگیرند.

(۳) منحنی بزیه لزوماً از رأس های داده شده عبور نمیکند (بجز P_0 و P_n) ، بلکه شکل منحنی توسط این رأسها کنترل

میشود.

$$(۴) \text{ در رابطه هر منحنی بزیه داریم : } \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} b_{i,n}(t) = t \text{ . اثبات خاصیت بدین صورت است :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} b_{i,n}(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{داریم:} \\ &= t \sum_{i=0}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i}; \quad \text{و;} \\ &= t \sum_{i=0}^n \binom{n-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{n-i}; \quad \text{و;} \\ &= t \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,n-1}(t) = t \quad \text{و در آخر;} \end{aligned}$$

۸. الگوریتم مستقیم برای ایجاد یک نقطه روی منحنی بزیه

ورودی: درجه n ، t^* که بین صفر و یک قرار دارد و نقاط کنترلی P_0 و ... و P_n .

قدم اول: به ازای $i = 0, \dots, n$ ، $P_i b_{i,d}(t^*)$ را محاسبه کن.

قدم دوم: $B(t^*)$ را بدست آور.

قدم سوم: $B(t^*)$ را به صورت یک نقطه بر روی صفحه مختصات نشان بده.

قدم چهارم: توقف.

برای رسم منحنی، الگوریتم بالا را از $t^* = 0$ شروع میکنیم و با یک فاصله $\Delta t > 0$ تا $t^* = 1$ ادامه می دهیم. هر

چقدر فاصله t^* ها کمتر باشد، منحنی واضحتری خواهیم داشت. الگوریتم از ساده ترین روش تولید منحنی بزیه یعنی تعریف

مستقیم آن استفاده کرده است. در اینجا کد ترسیم منحنی بزیه تصادفی توسط دلفی آورده شده است.

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
    pusat: array of TPoint;
    i: Integer;
begin
    SetLength(pusat, 4);
    for i := Low(pusat) to High(pusat) do
    begin
        pusat[i].x := Random(Width);
        pusat[i].y := Random(Height);
    end;
    Canvas.PolyBezier(pusat);
end;
```

عیب این الگوریتم این است که محاسبه چند جمله ای های برنشتاین از درجات بالا موجب پیدایش خطای دگرگون میشود.

این عیب در روش زیر رفع میشود.

۹. روش تقسیم و نظریف

این روش بطور گسترده منحنی بزیه را تولید می کند. فرض کنید $B(t)$ یک منحنی بزیه درجه n و t^* متعلق به بازه $(0, 1)$

باشد، اگر داشته باشیم:
$$\left. \begin{aligned} B(t) &= L(s) & 0 \leq t < t^* \\ B(t) &= R(u) & t^* \leq t \leq 1 \end{aligned} \right\}$$
 که در آن $R(u)$ و $L(s)$ منحنی های درجه n با

پارامترهای s و u هستند، گوئیم $B(t)$ تقسیم شده است و $R(u)$ و $L(s)$ را نظریف های آن می نامیم.

این تقسیم و نظریف به صورت دلخواه نیز امکان دارد، به این صورت که؛ فرض کنید t^* متعلق به $(0, 1)$ باشد.

در این صورت داریم:

$$B_n(P_0, P_1, \dots, P_n; 0, 1; t) = \begin{cases} B_n(P_0^{[0]}(t^*), \dots, P_0^{[n]}(t^*); 0, t^*; \frac{t}{t^*}) & 0 \leq t \leq t^* \\ B_n(P_0^{[n]}(t^*), \dots, P_n^{[0]}(t^*); t^*, 1; \frac{t-t^*}{1-t^*}) & t^* \leq t \leq 1 \end{cases}$$

در روابط بالا اگر $r \geq 1$ آنگاه $P_i^{[r]}$ را می توان از رابطه بازگشتی زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} P_i^{[r]}(t) = (1-t)P_i^{[r-1]} + tP_{i+1}^{[r-1]}(t) & r \geq 1 \\ P_i^{[r]}(t) = P_i & r < 1 \end{cases}$$

با استفاده از این قضیه یک روش مناسب برای تولید منحنی بزیه بدست می آید.

۱۰. الگوریتم تقسیم و نظریف برای تولید منحنی های بزیه

ورودی: t^* ، n و رأس های کنترلی P_0, \dots, P_n .

قدم اول: با استفاده از روابط بازگشتی [بالا] مقادیر $P_n^{[0]}$ و $P_1^{[n-1]}$ و $P_0^{[n]}$ و $P_0^{[1]}$ و $P_0^{[0]}$ را محاسبه کن.

قدم دوم: $P_0^{[n]}$ را که نقطه ای از منحنی است ذخیره کن.

قدم سوم: اگر اختلاف $P_0^{[0]}$ و $P_0^{[n]}$ به حد کافی کوچک نشده است، P_0 و P_n را برابر با $P_0^{[n]}$ و $P_0^{[0]}$ و $P_0^{[1]}$ و $P_0^{[0]}$ اختیار کن و به قدم اول برو.

قدم چهارم: اگر اختلاف $P_0^{[0]}$ و $P_0^{[n]}$ به حد کافی کوچک نشده است، P_0 و P_n را برابر با $P_0^{[n]}$ و $P_1^{[n-1]}$ و $P_0^{[0]}$ و $P_0^{[1]}$ و $P_0^{[0]}$ اختیار کن و به قدم اول برو.

قدم پنجم: توقف.

این روش در مقایسه با روش مستقیم نه تنها خطای محاسباتی ندارد بلکه روش محاسباتی بالاتری هم دارد.

فرض کنید $B(t)$ منحنی بزیه مرتبه ۳ با رأس های کنترلی P_0, \dots, P_3 و $R(u)$ و $L(s)$ منحنی های بزیه مرتبه ۳ با رأس های کنترلی، به ترتیب U_0, \dots, U_3 و S_0, \dots, S_3 باشند. اگر $R(u)$ و $L(s)$ نظریف های $B(t)$ باشند،

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = P_0 \\ S_2 = \frac{1}{2}(P_0 + P_1) \\ S_3 = \frac{1}{4}(P_0 + 2P_1 + P_2) \\ S_4 = \frac{1}{8}(P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = \frac{1}{8}(P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3) \\ U_1 = \frac{1}{4}(P_1 + 2P_2 + P_3) \\ U_2 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3) \\ U_3 = P_3 \end{array} \right. : \text{آنگاه داریم}$$

طبق گفته بالا با مشخص بودن رأس های کنترلی P_0, \dots, P_3 و با استفاده از روابط حاصل می توان رأس های کنترلی $R(u)$ و $L(s)$ را بدست آورد. حال اگر $a = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ در نظر بگیریم روابط به شکل ساده تری در می آیند.

۱۱. الگوریتم تولید منحنی بزیه درجه ۳ با روش نصف کردن

داده ها : رأس های کنترلی P_0, \dots, P_3 .

قدم اول : $(S_0 = P_0)$

قدم دوم : $S_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$

قدم سوم : $a = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$

قدم چهارم : $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + a)$

قدم پنجم : $(U_3 = P_3)$

قدم ششم : $U_2 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$

قدم هفتم : $U_1 = \frac{1}{2}(a + U_2)$

قدم هشتم : $S_3 = U_0 = \frac{1}{2}(S_2 + U_1)$

قدم نهم : نقطه S_3 (یا U_0) را - که نقطه ای از منحنی بزیه است - ذخیره کن.

قدم دهم : الگوریتم فوق را برای نقاط کنترلی U_3, \dots, U_0 و S_3, \dots, S_0 تکرار کن تا وقتی که اختلاف U_3 به

حد کافی کوچک شده باشد. (بازگشت الگوریتم)

قدم یازدهم : توقف

دقت شود که در الگوریتم بالا تمامی تساوی ها برداری هستند.

۱۲. رویه های بزیه و روش های تولید

۱۲.۱ رویه های بزیه و قطعات رویه^{۳۸}

ما ابتدا یک منحنی سه بعدی با استفاده از یک پارامتر منفرد ایجاد میکنیم و سپس آن را به یک سطح سه بعدی ، با اضافه کردن پارامتر دیگر ، گسترش می دهیم. یک راه معمولی ایجاد یک منحنی در فضای سه بعدی ، معرفی y و z به عنوان توابعی از x است. $x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x)$. این توصیف مشکلات بسیاری دارد. پس به گونه های دیگر بررسی میکنیم.

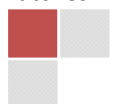
ساده ترین عنصر ریاضی که برای مدل ریاضی استفاده می کنیم ، «قطعه» است. قطعه یک منحنی کراندار متشکل از نقاطی است که مختصات آنها توسط توابع ریاضی پیوسته دو پارامتری (با مقادیر منفرد) تعیین می شوند.

مختصات هر نقطه توسط روابط $x = x(u, w), \quad y = y(u, w), \quad z = z(u, w)$ بدست می آیند.

پارامتر های u و w در بازه بین صفر تا ۱ تغییر میکنند و با ثابت نگه داشتن کی از متغیر های پارامتری ، یک قطعه از منحنی بر حسب متغیر دیگر بدست می آید. با تکرار این عمل روی همه متغیر ها یک نقطه از آن مشخص می شود. هر قطعه دارای کران است که همین امر آن را می تواند تکه ای از رویه مورد نظر ما کند. یکی از رویه های ساده صفحه است.

معادله پارامتری $(x = (c - a)u + a \quad y = (d - b)w + b \quad z = 0)$ یک قطعه متعامد از صفحه

xy را نشان میدهد. ابتدا متغیر w را ثابت نگه داشته تا منحنی یک خط راست موازی محور x ها شود که این منحنی ها توابعی بر حسب u هستند. به همین ترتیب با ثابت نگه داشتن متغیر u خط راستی موازی محور y ها ایجاد میشود که توابعی بر حسب w هستند.



رویه ساده دیگر کره است. معادلات پارامتری کره با شعاع r و مرکز (x_0, y_0, z_0) عبارتست از :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(u) \cos(w) & u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = y_0 + r \cos(u) \sin(w) & w \in [0, 2\pi] \\ z = z_0 + r \sin(u) \end{cases}$$

و یا یک بیضی گون : $w \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos(u) \cos(w) & u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = y_0 + b \cos(u) \sin(w) & w \in [0, 2\pi] \\ z = z_0 + c \sin(u) \end{cases}$$

یک معادله به شکل $F(x, y, z) = 0$ معادله ضمنی یه رویه است. اگر معادله به ازای همه متغیرها خطی باشد آنگاه رویه یک سطح بیکران است. اگر معادله درجه دو باشد ، رویه درجه دوم خواهد بود. کره نمونه ای از این معادلات درجه دو است. اگر یکی از متغیرها حذف شود رویه استوانه میشود که مولدهایی موازی با محور متغیر حذف شده دارد.

اگر معادله ضمنی را برای یکی از متغیرها به عنوان تابعی از دو متغیر دیگر حل کنیم داریم : $z = f(x, y)$

شکل جبری یک قطعه درجه سوم به صورت زیر است:

$$\mathbf{P}(u, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j} u^i w^j, \quad u, w \in [0, 1]$$

بردارهای $a_{i,j}$ ضرایب جبری رویه نامیده می شوند. محدودیت رابطه بالا کران های رویه را قانونمند میکند. در این

رابطه ۱۶ جمله داریم که همه نقاط روی رویه را مشخص میکنند هر بردار مولفه هایی به شرح زیر دارد:

$$\begin{cases} x(u, w) = a_{33x} u^3 w^3 + a_{32x} u^3 w^2 + a_{31x} u^3 w^1 + \dots + a_{00x} \\ y(u, w) = a_{33y} u^3 w^3 + a_{32y} u^3 w^2 + a_{31y} u^3 w^1 + \dots + a_{00y} \\ z(u, w) = a_{33z} u^3 w^3 + a_{32z} u^3 w^2 + a_{31z} u^3 w^1 + \dots + a_{00z} \end{cases}$$

بسیاری از اجسام دارای شکا خاصی هستند که به وسیله هیچکدام از روش ها برای نمایش رویه قابل تعریف نیستند. یک پره ملخ هواپیما ، گوشی تلفن و صورت انسان از این نمونه ها هستند. استفاده از ایده نمایش هندسی منحنی های مختلف می تواند برای تولید رویه ها نیز به کار رود ، به این صورت که با استفاده از حاصل ضرب تانسوری عناصر پایه یک متغیره ، توابع پایه دو متغیره را بدست می آوریم. توابع پایه یک متغیره را به صورت توابع پایه ای برنشتاین در نظر میگیریم. بدین قرار که :

عبارت $Q(u, v)$ را که به صورت زیر تعریف میشود یک رویه بزیه $d \times d'$ می نامیم :

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d'} V_{i,j} P_{i,d}(u) P_{j,d'}(v)$$

در این روابط $P_{i,d}(u)P_{j,d'}(v)$ توابع پایه برنشتاین و $V_{i,j}$ ها رأس های کنترلی رویه در فضا هستند.

۱۲.۲ روش های تولید رویه های بزیه

اکثر روش های موجود برای نمایش رویه ها در رایانه یا بر پایه منحنی ها استوارند ، یا تعمیم مستقیم تولید منحنی ها هستند.

۱۲.۲.۱ روش مستقیم

از تعریف مستقیم رویه استفاده میشود:

ورودی : درجات d و d' و $u^* \in [0,1]$ و $v^* \in [0,1]$ و نقاط کنترلی $V_{0,0}$ و $V_{0,1}$ و ... و $V_{d,d'}$.

قدم اول : به ازای $i = 0, \dots, d$ و $j = 0, \dots, d'$ $P_{i,d}(u)P_{j,d'}(v)$ ها را محاسبه کن.

قدم دوم : $Q(u^*, v^*)$ را بدست آور.

قدم سوم : $Q(u^*, v^*)$ را به عنوان نقطه ای از منحنی نشان ده.

قدم چهارم : توقف

مقادیر ستاره دار را از صفر با بازه های کوتاه تا ۱ مقدار دهی می کنیم تا الگوریتم رویه را رسم کند.

این روش در چندجمله ای های برنشتاین با درجات بالاتر موجب پیدایش خطا^{۳۹} شود.

۱۲.۲.۲ روش رویه های خط کشی شده

فرض کنید $P_1(u)$ و $P_2(u)$ ، دو منحنی بزیه در R^3 با پارامتر مشترک u باشند. رویه های که از اتصال

نقاط آنها به هم توسط خط ایجاد میشود رویه خط کشی گویند. رابطه ای بدین قرار دارد :

$$Q(u, v) = (1 - v)P_1(u) + vP_2(u)$$

^{۳۹} خطای گرد کردن

۱۲.۳ مثلث های بزیه و درونیایی خطی

۱۲.۳.۱ مرکز ثقل

یک مثلث با رأس های a ، b و c را در نظر بگیرید. مختصات هر نقطه مانند $P \in E^2$ در مثلث را

میتوان بر حسب ترکیب خطی (محدب) سه نقطه a ، b و c بدست آورد: $P = ua + vb + wc$

اگر داشته باشیم: $u + v + w = 1$ (هر سه پارامتر بین صفر و یک هستند). آنگاه نقطه P با مختصات

(u, v, w) ، مرکز ثقل متناظر با a ، b و c نامیده میشود. اگر چهار نقطه a ، b ، c و P را داشته باشیم

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\text{area}(P, b, c)}{\text{area}(a, b, c)} \\ v &= \frac{\text{area}(a, P, c)}{\text{area}(a, b, c)} \\ w &= \frac{\text{area}(a, b, P)}{\text{area}(a, b, c)} \end{aligned} \right\} \text{ جواب بدست آمده به صورت روبروست:}$$

به عبارتی داریم (طبق قانون کرامر): $\text{area}(a, b, c) = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$

۱۲.۳.۲ درونیایی

می توان از مختصات مرکز ثقل در درونیایی خطی استفاده کرد.

فرض کنید سه نقطه $P_1, P_2, P_3 \in E^2$ داده شده اند. هر نقطه به صورت:

$$\left\langle \begin{aligned} P &= P(u, v, w) = uP_1 + vP_2 + wP_3 \\ u + v + w &= 1 \end{aligned} \right\rangle \text{ در}$$

درون صفحه تولید شده توسط سه نقطه مذکور قرار دارد. این تابع از E^3 به E^2 درونیایی خطی نامیده

میشود. در تعریف بالا چون $u + v + w = 1$ ، پس می توان u, v, w را با استفاده از مختصات مرکز

ثقل P مربوط به P_1, P_2, P_3 درونیایی کرد.

۱۲.۳.۳ نمونه ای از درونیایی خطی توسط مرکز ثقل (الگوریتم کاستلجو^{۴۰})

ورودی: $t \in R$ و $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n \in E^3$

گام اول: قرار ده $b_i^0(t) = b_i$

گام دوم: قرار ده $b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t)$

گام سوم: $b_0^n(t)$ را به عنوان نقطه ای از منحنی ذخیره کن.

گام چهارم: توقف

که $b_i^0(t) = b_i$ نقطه متناظر با پارامتر t در منحنی بزیه b^n است.

۱۳. تعریف سطوح بزیه به گونه ای دیگر

روش دیگر نمایش یک منحنی، تعریف x, y و z به عنوان توابعی از پارامتر t است، به شرح زیر:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \quad (\text{روابط شماره ۱})$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad \text{و}$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \quad \text{و}$$

دامنه مقادیر t به $0 \leq t \leq 1$ محدود شده است. اولین رابطه از روابط شماره ۱ را می توان به گونه دیگری نوشت:

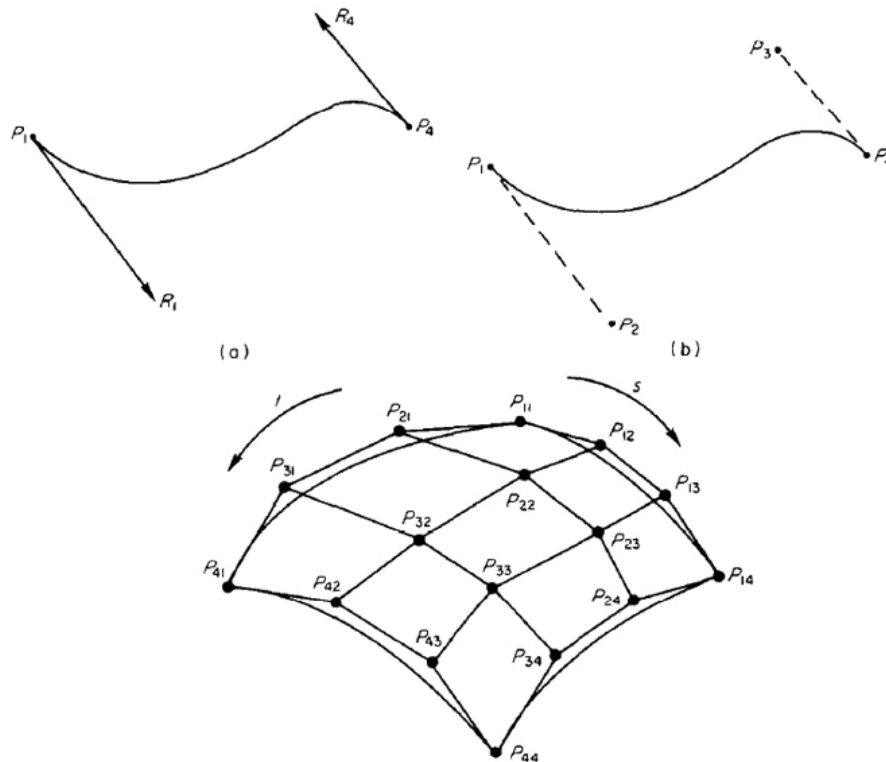
$$x(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (\text{رابطه شماره ۲})$$

$$x(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] C_x, \quad \text{یا}$$

$$x(t) = T C_x \quad \text{یا}$$

پارامتر T ماتریس ردیفی توان های t و C_x ماتریس ستونی ضرایب $x(t)$ است.





شکل ۱۳- الف) منحنی سه بعدی هرمیت و نقاط انتهایی P_1 و P_4 و به طور متناظر بردارهای مماسی R_1 و R_4 (ب) منحنی سه بعدی بزیه و نقاط کنترلی P_2 و P_3 ؛ ج) سطح پارامتری بیکیویک بزیه و چهار نقطه گوشه و ۱۲ نقطه کنترل

حال نقاط پایانی منحنی، که در تصویر الف ۱۳ نشان داده شده اند و همان نقاط P_1 و P_4 و به طور مشابه بردارهای مماسی R_1 و R_4 هستند را، انتخاب میکنیم. مختصات $x(t)$ در نقاط پایانی عبارتند از:

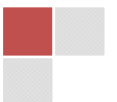
$$(۵) \text{ رابطه شماره } x(0) = P_{1x} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]C_x,$$

$$(۶) \text{ رابطه شماره } x(0) = P_{4x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]C_x,$$

مختصات x برای بردارهای متناظر مماسی با ساده سازی رابطه شماره ۳ و سپس جایگذاری مقادیر پارامتری در نقاط پایانی، بدست می آیند.

$$(۷) \text{ رابطه شماره } x'(0) = R_{1x} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]C_x,$$

$$(۸) \text{ رابطه شماره } x'(0) = R_{4x} = [3 \ 2 \ 1 \ 0]C_x,$$



روابط شماره ۵ و ۸ به فرم ماتریس زیر ترکیب میشوند:

$$(رابطه شماره ۹) H_{h_x} = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_x$$

با حل رابطه برای C_x بدست می آوریم :

$$(رابطه شماره ۱۰) C_x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_h G_{h_x}$$

M_h ماتریس هندسی هرمیت و G_{h_x} بردار هندسی هرمیت است. با استفاده از این نتیجه در رابطه شماره ۴، به رابطه زیر می رسیم :

$$(رابطه شماره ۱۱) x(t) = T M_h G_{h_x}$$

و به طور مشابه :

$$(رابطه شماره ۱۲) y(t) = T M_h G_{h_y}$$

$$(رابطه شماره ۱۳) z(t) = T M_h G_{h_z}$$

روابط شماره ۱۱ و ۱۲ و ۱۳، در فرم ماتریسی، به صورت زیر نیز نوشته می شوند:

$$(رابطه شماره ۱۴) P(t) = T M_h G_h$$

منحنی تعریف شده توسط رابطه شماره ۱۴ به فرم هرمیت است. این فرم، همه مشخصه های مطلوب، به جز آنچه که، برای مشخص کردن بردارهای مماسی، در نقاط پایانی، لازم است، را دارد. تشخیص بردارهای مماسی برای دادن منحنی، شاید مشکل باشد. توسعه این فرم به بزیه، نیازمند مشخص کردن دو نقطه بیشتر P_2 و P_3 (غیر مستقر روی منحنی)، به جای بردارهای مماس نشان داده شده، (همانطور که در شکل ۱۳- ب نشان داده شد)، است. این نقاط را نقاط کنترل می گویند و در راستای نقاط پایانی استفاده می شوند.

$$R_1 = 3(P_2 - P_1) = P'(0),$$

برای تشخیص بردارهای مماسی ، داریم :

$$R_4 = 3(P_4 - P_3) = P'(1)$$

و

رابطه بین بردار هندسی هرمیت (G_h) و بردار هندسی بزیه (G_b) به قرار زیر است.

$$G_h = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = M_{hb} G_b \quad \text{داریم :}$$

که آن را برای حصول G_h در رابطه شماره ۱۱ ، جایگذاری میکنیم :

$$x(t) = TM_h G_{h_a} = TM_h M_{hb} G_{b_x}$$

با در نظر گرفتن $M_b = M_h M_{hb}$ ، به فرم بزیه ($x(t) = TM_b G_b$) میرسیم.

$$M_b = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ماتریس } M_b \text{ عبارتست از :}$$

حال ، فرم بزیه ی منحنی پارامتری کوییک میتواند به سطح گسترش یابد ؛ با توجه به اینکه ۱۶ نقطه دیگر و ۲ پارامتر s و t نیز ، لازم است تعیین شوند. در اینجا ، ۴ نقطه گوشه ، و ۱۲ نقطه کنترل ، برای توصیف چگونگی تولید سطح از نقاط گوشه در هر جهت پارامتری ، وجود دارد. این مطلب در شکل ۱۳- ج نشان داده شد. توصیف اینکه چگونه نقاط کنترلی P_{12} و P_{23} ، شکل تکه های خم شده میان نقاط P_{11} و P_{14} را تعیین میکنند می تواند به همه تکه های خم شده که سطح را می سازند تعمیم داده شود. پاره خط $P_{11} - P_{12}$ ، در نقطه P_{11} ، و پاره خط $P_{13} - P_{14}$ ، در نقطه P_{14} ، به تکه خم شده مماس شده اند، که شیب های اولیه تکه خم شده را از هر نقطه تعریف میکنند. طول خط $P_{11} - P_{12}$ و $P_{13} - P_{14}$ ، طول خم را مشخص میکند.

برای توسعه روابط به سطح بزیه ، x ، y و z ، باید توابعی از دو پارامتر s و t تعریف شوند. برای صورت گرفتن این مسئله ، $x(t)$ ، تابعی از s بیان می شود و G_{b_x} تابعی فضایی از t تعریف میگردد. مطابق فولی و ون دام و فوکس و پرات ، روابط زیر فرم بزیه سطح پارامتری بیکوییک را تعریف میکنند.

$$x(s, t) = SM_b P_x M_b T^t, \quad (\text{رابطه شماره ۱۵})$$

$$y(s, t) = SM_b P_y M_b T^t, \quad (\text{رابطه شماره ۱۶})$$

$$z(s, t) = SM_b P_z M_b T^t \quad (\text{رابطه شماره ۱۷})$$

$$S = [s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1],$$

با دقت بالاتر، ماتریس های ستونی توان های s و t عبارتند از:

$$T = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]$$

و

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}$$

و ماتریس موقعیت هم عبارتست از:

که P_{ij} ، مختصات موقعیت نقاط، در شکل ۱۳- ج، برای هر کدام از جهت های x ، y و z ، است.

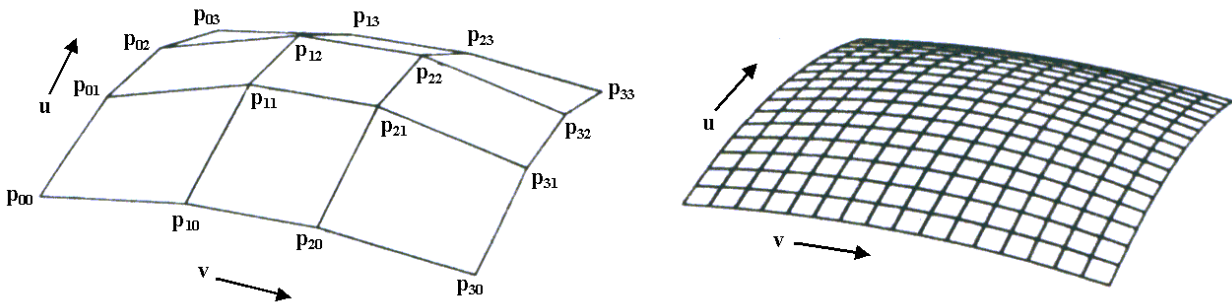
۱۴. رویه

وقتی که کاستلجو منحنی های بزیه را ابداع کرد تصمیم داشت آنها را به رویه ها تعمیم دهد. اولین نوع رویه های او همان مثلث های بزیه اند. هر رویه ای را می توان بوسیله مثلثی کردن بدست آورد. انتخاب فرم رویه بستگی به نوع کاربرد آن دارد. قطعات رویه مثلثی محدوده مفید زیادی دارند. ضرایب $b_i^F(t)$ را در بخش ۱۳ می توان به صورت مثلث نوشت.

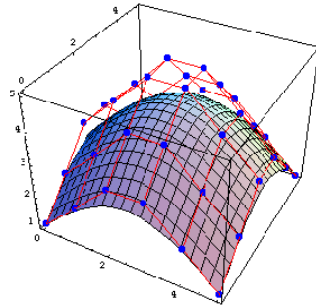
سطوح بزیه توسط یک سری از نقاط دو بعدی $P_{j,k}$ که در آن j در دامنه صفر تا m و k در دامنه صفر تا n تغییر میکند تعریف میشود.

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n p_{j,k} B_{j,m}(v) B_{k,n}(u)$$

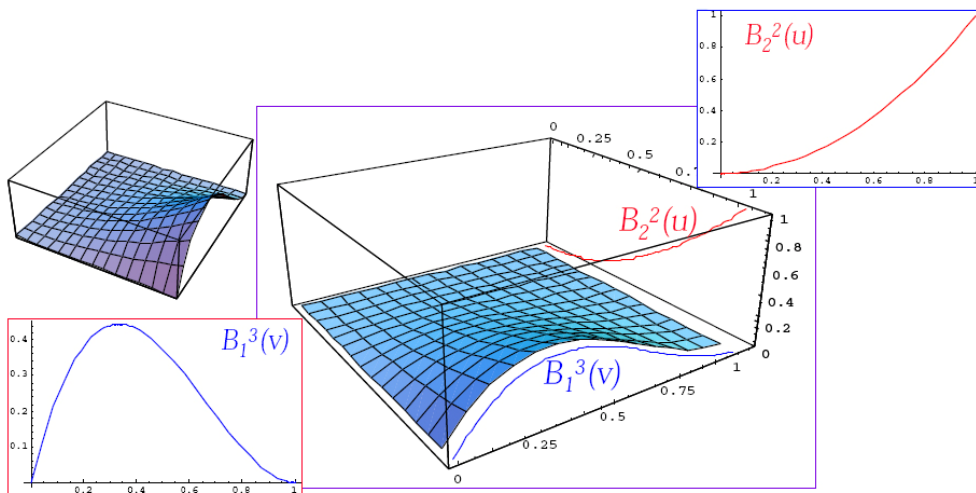
$$B_j^m(v) = \binom{m}{j} (1-v)^{m-j} v^j \quad \text{که}$$



مجموعه $P = \{\{P_{00}, P_{01}, \dots, P_{0n}\}, \{P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1n}\}, \dots, \{P_{m0}, P_{m1}, \dots, P_{mn}\}\}$ یک سری نقاط کنترل با ویژگی $P_{jk} \in \mathbb{R}^3$ (که $j = 0, 1, \dots, m$ و $k = 0, 1, \dots, n$) ایجاد میکنند. در رابطه فوق $B_{k,n}(u)$ و $B_{j,m}(v)$ نمایگر چندجمله ای های برن استاین از درجه m و n در تغییرات، به ترتیب، u و v هستند.



از رابطه اول نمایان است که هر ترم توسط نقاط کنترل و محصول دو چندجمله ای برن استاین یک متغیری بدست می آید. به عنوان مثال: برای تابع $B_2^2(u) \cdot B_1^3(v)$ داریم:



۱۵. استفاده از گرافیک رایانه ای سه بعدی برای طراحی سطح خیش برگرداندار

۱۵.۱ مقدمه

مردم مصر، یونان و روم باستان، با چوب Y شکلی که توسط حیوانات یا برده ها کشیده می شد، زمین هایشان را کشت می کردند. این طرح خیش تقریباً تا قرن ۱۸م، زمانی که فلزات تغییر شکل یافته برای خیش برگرداندار استفاده شد، بدون تغییر ماند. در سال های بسیاری، توسعه و پیشرفت اشکال خیش برگرداندار با «آزمایش و خطا»، توسط طراحی افراد مختلف بوده است. توماس جفرسن در سال ۱۷۸۸ میلادی روشی برای توصیف دقیق سطح خیش برگرداندار بیان کرد. این روش، روشی فیزیکی بود که می توانست در ساخت خیش بکار رود. او از دو خط مستقیم با راستاهای ثابت استفاده کرد، که خط مستقیم سوم در صفحه ای ثابت حرکت می کند و می چرخد. روش جفرسن روشی عملی است؛ شاید، این روش کاملاً بر اساس شهود پایه ریزی شده است. وایت چند خیش را با روش جفرسن بررسی کرد. او به رابطه ای برای توصیف سطح در سیستم مختصات کارترین (دکارتی) دست یافت. او ناتوان از تشریح این رابطه برای نیروهای خیش شد. با اینحال، کار او مزیت نمایش شکل موجود خیش به طور ریاضی را دارد.

توصیفات گرافیکی اشکال خیش با تحقیقات مختلفی مثل وایت، اشبی و کروتیکوف که توسط گیل و ونگنبرگ توصیف شده است، توسعه یافت. آنها از روش های گرافیکی برای تعریف شکل و حصول روابط طراحی، استفاده کردند. یک روش گرافیکی برای بدست آوردن شکل خیش موجود، استفاده از یک جفت سطح عمودی موازی با (Coinciding grid holes). سطوح در صفحه (y-z) مستقر شده اند، که صفحه افقی صفحه (x-y) است. خیش، که شکلش تشخیص داده می شود، روی قسمت جلویی از سطوح شبکه بندی شده عمودی قرار گرفته است. میله اندازه گیری در میان سوراخ های شبکه وارد میشود، تا جایی که به سطح خیش برسد. این روش سنجش x در حالیهست که موقعیت سوراخ های شبکه با ابعاد y و z تشخیص داده شوند. با استفاده از این اطلاعات، سطح را به صورت نمایش دو بعدی، در صفحه x-y، به وسیله رسم اندازه ثابت z خطوط شبکه، رسم می کند. سوان (Soehne) از یک وسیله نوری برای تسریع این روش استفاده کرد. او نوری را از یک شکاف به صورت هم عمودی و هم افقی، بر سطح نقاشی شده خیش تاباند. از دوربینی برای ضبط نور بازتابیده استفاده کرد. یک سری از عکس ها با حرکت خیش به موقعیت های متفاوت گرفته شد. هیچ تلاشی برای توسعه روابط ریاضی برای توصیف شکل دهی انجام نشد. اسلوب کار برای مقایسه شکل خیش ها، مناسب بود. از مطالب فوق بدیهی است، که، هیچ تکنیک و روشی، بدست نیامده است که بتواند برای

توصیف آسان شکل خیش برگرداندار استفاده شود؛ مجوز مهندس طراحی برای تغییر راحت سطح خیش باشد؛ و توصیفات ریاضی سطح را با مدل مکانیکی خاک- ابزار، برای پیشگویی نیروهای عکس العمل خاک، ترکیب کند. تکنیک های گرافیکی کامپیوتری، توسط صنعت هوانوردی، برای سطوح پیچیده و خم اجزای موثر آیرودینامیکی، توسعه یافتند. این روش ها مستقیماً برای سطوح پیچیده خیش برگرداندار، کاربردی هستند. نمایش گرافیکی، وسیله ارتباطی بسیار موثری بین رایانه و مهندس طراح است.

۱۵.۲ نمادها

| نمادها | نمادها |
|--|--|
| $P's$ نقاط روی منحنی یا سطح سه بعدی | a شتاب توده خاک |
| $P_{x,y,z}$ ماتریس مولفه های x و y و z نقطه P | b عرض ابزار |
| $R's$ بردارهای مماس | C چسبندگی خاک |
| S ردیف بردار توان های s | C_a چسبندگی بین ابزار و خاک |
| s, t پارامتر | C_x ماتریس ستونی ضرایب $x(t)$ |
| T ماتریس ردیفی توان های t | d عمق ابزار |
| T_p زمانی که طول میکشد تا خاک روی ابزار طی کند. | d_p مسافتی که خاک روی ابزار طی میکند. |
| T_s زمانی که طول میکشد تا خاک مسافت d_s را طی کند. | d_s مسافتی که خاک در طول صفحه برش طی می کند. |
| ΔT زمانی که برای سرعت مابین V_a و V_0 طول میکشد. | F_0 مساحت سطح کاری ابزار (سطح تماس با خاک) |
| V_a قدرمطلق سرعت خاک | F_1 مساحت پیشرو صفحه برشی خاک |
| V_0 سرعت اولیه خاک | F_x, F_y, F_z مولفه های نیروی عکس العمل خاک |
| V_t سرعت پیشرونده ابزار | g شتاب گرانش |
| x, y, z مختصات دکارتی | G وزن خاک روی ابزار خاکورزی |
| α زاویه بین خط OB و محور x (شکل ۴) | G_h بردار هرمیت |
| | h مسافت بین صفحات متوالی برش |
| | m جرم خاک |

| | |
|---|---|
| β زاویه بین صفحه برش و محور x | M_b ماتریس بزیه |
| ϕ' زاویه بین خط OD و محور z (شکل ۵) | M_h ماتریس هرمیت |
| μ اصطکاک داخلی خاک | M_{hb} ماتریس انتقال هرمیت به ماتریس های بزیه |
| μ_1 اصطکاک ابزار - خاک | N_0 نیروی عکس العمل ابزار (شکل ۳) |
| γ دانسیته وزنی خاک | N_1, N_2 نیروی عکس العمل خاک (شکل ۳) |
| δ زاویه بین خط OA و محور x (شکل ۴) | |

۱۵.۳ اهداف

اهداف مقاله حاضر به قرار زیرند :

۱- توسعه مدل رایانه ای که :

a. استفاده از تکنیک گرافیکی سه بعدی رایانه ای برای توصیف خیش و شکل برگرداندار.

b. ارزیابی نیروهای عکس العمل سه بعدی تک تیغه خیش.

c. اجازه به کاربر برای مشخص کردن شکل ، اندازه و حالات عمل خیش.

۲- بررسی نتایج مدل با استفاده از داده های آزمایشگاهی.

۱۵.۴ نمایش گرافیکی

روش گرافیک رایانه ای انتخاب شده برای مدلسازی خیش برگرداندار ، باید دو ضابطه را برآورده کند. باید اجازه نمایش آسان سطح معلوم و موجود خیش و همچنین تغییر دستی مدل رایانه ای را برای رسیدن به اشکال مختلف بدهد. راه های بسیاری برای نمایش سه بعدی قطعه با مدل های ریاضی وجود دارد. یک سطح پارامتری بیکویبیک (Bicubic) ، (دوفضایی) مشخصه های مطمئنی دارد که این مشخصه ها سطح را ، به طور مشخص و ویژه ، برای مدل سازی خیش های برگرداندار مناسب می سازند. سطوح پارامتری ، قابلیت پذیرش توابع چند مقداری و تعداد بی نهایت شیب را با تعویض شیب ها با بردارهای مماس ، دارند. دلیل نام گذاری این سطوح به سطوح پارامتری اینست که ؛ مختصات x و y و z ، توابع فضایی پارامتر های s و t را ، (از این جهت بیکویبیک نامیده شدند). بیان میکند. یک پارامتر

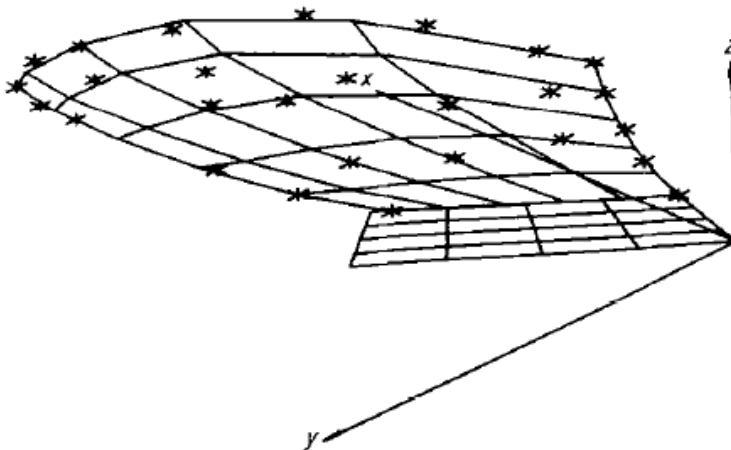
تکی ، یک منحنی سه بعدی را ، با توجه به اینکه دو پارامتر برای توصیف سطح نیاز است ، توصیف میکند. توابع فضایی به دلیل اینکه پایین ترین حاصل نمایش تکه های خمیده که شیب و پیوستگی موقعیت در نقطه پایانی تکه را ایجاد میکنند را دارند ، استفاده میشوند. تقاریب خیلی بالا به نوسان های نامطلوب میل میکند و چندجمله ای سطح پایین ، شکل سطح را محدود میکند. روش های زیادی برای تعریف سطح پارامتری بیکویک وجود دارد. فرم بزیه گزینه ای ویژه برای این منظور است. قبلاً ، شرحی مختصر از سطوح بزیه آمده است. برای اطلاعات بیشتر به فولی و ون دام و فوکس و پرات مراجعه کنید.

۱۵.۵ مدل خیش برگرداندار

برای تعریف و رسم گرافیکی خیش برگرداندار از دو سطح بزیه ، یکی برای تیغه و دیگری برای برگرداندار ، استفاده میشود. شکل سطوح بزیه در مدل ، برای مطابقت با خیش آزمایش دست ساز میشود. به این ترتیب که :

- ۱- مختصات x ، y و z ، هشت نقطه واصف روی تیغه و ۲۹ نقطه واصف روی برگرداندار را تخمین میزنیم.
- ۲- روی سطوح بزیه ، در رایانه ، نقاط را رسم میکنیم.
- ۳- سطوح را برای تطبیق نقاط واصف تغییر می دهیم.

شکل ۱۵.۵.۱ نقاط رسم شده واصف را روی سطوح نمایش میدهد.



شکل ۱۵.۵.۱ - تطابق سطوح بزیه برای توصیف لبه خیش برگرداندار

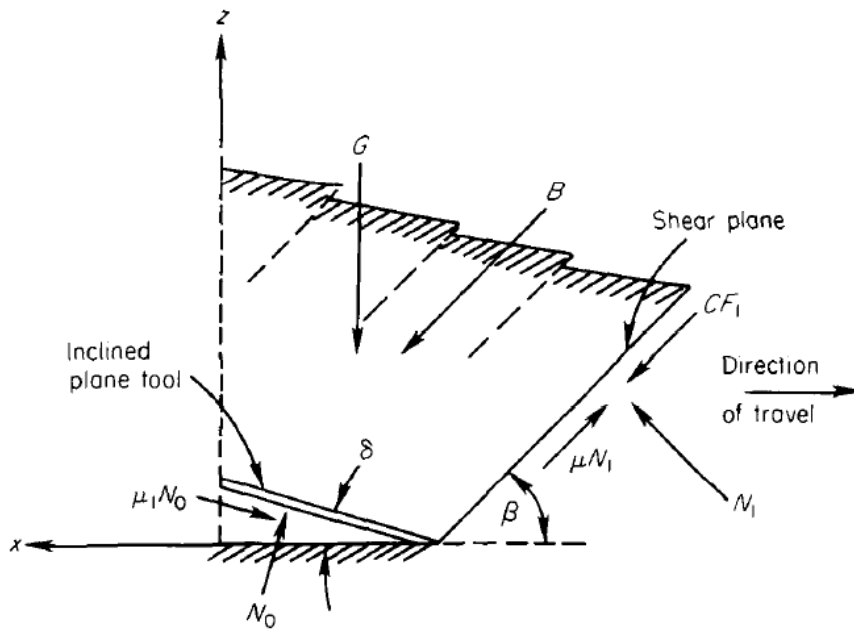
خیشی که بر مبنای تخمین نقاط توصیفی حاصل شد ، به طور عمومی در سال های متمادی استفاده میشده و نسبتاً قدیمی است. بنابراین ، نقاط واصف روی تیغه و برگرداندار به بهترین نحو برای توصیف شکل خیش انتخاب میشوند. خیش سپس روی میز تراش دوکی شکل عمودی Bridgeport نصب شده و هر نقطه به سمت یک اشاره گر سه نظام حرکت می کند ، مادامی که سیر و پیمایش میز ثابت میشود. مؤلف دقت هرکدام از اندازه گیری ها را ۲ میلیمتر تخمین زده است. تطابق سطوح بزیه روی نقاط واصف ، یک فرآیند آزمایش و خطا است. چهار عدد از نقاط واصف ، به دلیل وجود آنها روی گوشه های سطح تیغه و چهار نقطه دیگر ، به دلیل قرار داشتن آنها روی گوشه های سطح برگرداندار ، انتخاب می شوند. نقاط کنترل که به صورت دستی رسم شدند، حداقل خطا را بین نقاط واصف و سطوح بزیه در تخمین بصری تأمین میکنند. نرم افزار هایی ، میتوانند این عمل را بسیار ساده کنند. نرم افزار همچنین قادر به توسعه مقداردهی ریاضی و حداقل خطادهی است.

۱۵.۶ مدل مکانیکی خاک - ابزار

مطالعه مکانیک خاکورزی نخستین بار در سال ۱۹۳۰ توسط نیکولز و رید بیان شد. در سال ۱۹۵۶ ، سوان مدل مکانیکی خاک - ابزار را برای تیغه مایل با استفاده از چهار معادله ساده و توصیف رفتارها ، توسعه داد. این روابط عبارتند از ؛ اصطکاک خاک - فلز ، شکست برشی ، نیروی شتاب هر بلوک خاک و مقاوت برش خاک. فرض های زیر موجب شکل گیری این روابط شده است:

- ۱- شکست خاک در جلوی ادوات ، یک سری صفحات شکست برشی را ایجاد میکند.
- ۲- زاویه جلویی صفحه شکست برشی ، تنها بستگی به خواص اصطکاکی خاک دارد.
- ۳- مقاوت برشی و مقاوت سرخوردن خاک روی فلز ، میتواند به طور تقریبی با تابعی خطی از تنش عمودی روی سطح برش یا سرش محاسبه شود.
- ۴- خاک منظور یک ماده ایزوتروپی و همگن است.

تصویر شماره ۱۵.۶.۱ ، نیروهایی که روی یک بلوک خاک پیشرو روی تیغه ، عمل میکنند را نشان میدهد. نیروهای CF_1 و N_1 ، به ترتیب ، چسبندگی و نیروی اصطکاک داخلی - که به علت برش خاک وجود دارند - هستند.



شکل ۱۵.۶.۱ - عکس العمل نیروهای روی یک تکه خاک ، که در دو بعد روی صفحه اریب ابزار خاکورزی عمل میکنند.

CF_1 فقط در فرم های صفحه شکست برشی حضور دارد. نیروی $\mu_1 N_0$ ، نیروی اصطکاک خاک - فلز است. نیروی B به علت شتاب خاک و G وزن خاک است. نیروی مقاومت برشی خالص در گوشه های ابزار رخ میدهد. سوان متوجه شد که مقاومت خالص برشی خاک خیلی کوچک است و تنها زمانی اهمیت دارد که ابزار کند باشد یا زمانی که در محل کار مواد آلی یا سنگ وجود داشته باشد. بنابراین، در نظر گرفته نمیشود. کشش F_x و نیروهای عمودی F_z را میتوان با جمع نیروهای روی بلوک خاک و تیغه اریب و حل برای مجهولات ، تعیین کرد. گیل و وندنبرگ روابطی برای نیروی کششی ارائه کردند :

$$F_x = \frac{G}{Z} + \frac{CF_1 + B}{Z(\sin\beta + \mu\cos\beta)}$$

(رابطه شماره ۱۸)

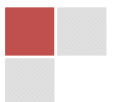
$$Z = \frac{\cos\delta - \mu_1 \sin\delta}{\sin\delta + \mu_1 \cos\delta} + \frac{\cos\beta - \mu \sin\beta}{\sin\beta + \mu \cos\beta}$$

که در آن :

به طور مشابه ، نیروی عمودی هم عبارتست از :

$$F_z = \frac{F_x(\cos\delta - \mu_1 \sin\delta)}{(\sin\delta + \mu_1 \cos\delta)}$$

(رابطه شماره ۱۹)



۱۵.۷ مدل سه بعدی

مدل سه بعدی، چرخش تیغه اریب، حول محور z را، چنانکه تیغه روی خاک حرکت میکند؛ نیروی جانبی موازی محور y هست، به حساب می آورد. شکل شماره ۱۵.۷.۱ تعیین جهت تیغه را حین حرکتش در جهت مخالف محور x شرح میدهد.

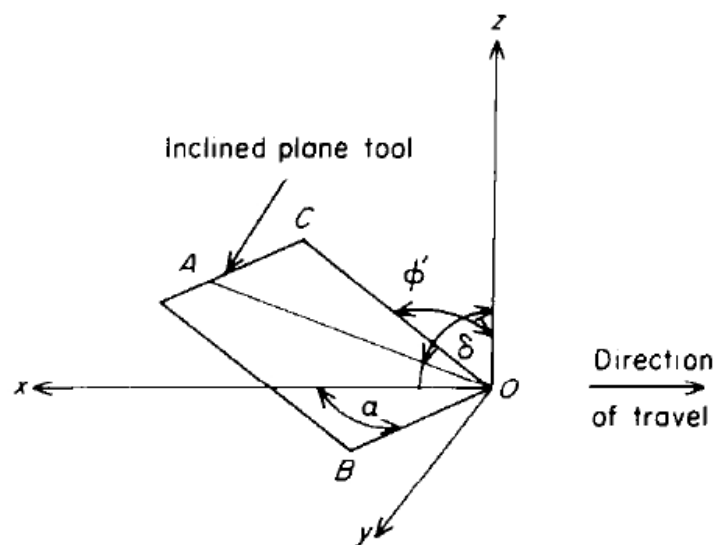
دو زاویه، برای توصیف جهت تیغه در فضای سه بعدی بکار میروند. در شکل شماره ۱۵.۷.۱: OA یک پاره خط عمومی به صفحه تیغه اریب و صفحه x-z است، δ ، زاویه بین پاره خط OA و محور z است، α ، زاویه بین پاره خط OB و محور x است و پاره خط OB پاره خط عمومی به صفحه تیغه اریب و صفحه x-y است.

به منظور ساده سازی محاسبات نیرویی، یک زاویه ϕ' ، بر حسب α و δ تعریف می گردد. این رابطه به گونه زیر است:

$$\phi' = \tan^{-1}((\sin\alpha)(\tan\delta))$$

(رابطه شماره ۲۰)

که ϕ' ، زاویه بین پاره خط OC و محور z است. OC در صفحه تیغه اریب بر OB عمود است.



شکل شماره ۱۵.۷.۱ - نمایش سه بعدی از صفحه اریب یک ابزار خاکورزی

اگر مؤلفه های نیروهای نرمال و اصطکاک را بتوان متقابلاً با هم توصیف کرد ، سپس زمانی که اندازه بلوک خاک بین نهایت کوچک شود ، وزن خاک به صفر میل میکند. بنابر این رابطه شماره ۲۲ به شکل $N_1 \cong N_2$ (رابطه شماره ۲۳) در می آید.

از اینرو ، رابطه شماره ۲۱ می تواند با عبارت $N_1 = N_2$ ساده شود:

$$(24) \text{ رابطه شماره } N_0 = (\beta + CF_1) \cos(\phi' - \beta) + G \sin \phi'$$

شکل شماره ۱۵.۷.۲ عملکرد نیروهای روی تیغه اریب را نشان می دهد. حرکت بلوک خاک ، بسته به ابزار ، در راستای جهت زاویه η ، از محور x و در صفحه تیغه اریب ، است. با جمع کردن نیروها در هر کدام از جهات مؤلفه روابط زیر را ارائه میدهد :

$$(25) \text{ رابطه شماره } F_x = -(C_a F_0 + \mu_1 N_0) \cos \eta \cos \delta + N_0 \cos \phi' \sin \alpha,$$

$$(26) \text{ رابطه شماره } F_y = -(C_a F_0 + \mu_1 N_0) \sin \eta + N_0 \cos \phi' \cos \alpha,$$

$$(27) \text{ رابطه شماره } F_z = -(C_a F_0 + \mu_1 N_0) \cos \eta \sin \delta + N_0 \sin \phi'$$

$$(28) \text{ رابطه شماره } G = \gamma \frac{b dh}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{وزن خاک را میشود ، از حجم بین صفحات برش به طریق روبرو محاسبه کرد :}$$

$$(29) \text{ رابطه شماره } F_1 = \frac{bd}{\sin \alpha \sin \beta} \quad \text{مساحت صفحه جلویی برش نیز عبارتست از :}$$

$$(30) \text{ رابطه شماره } B = ma \quad \text{نیروی شتاب از دومین قانون حرکتی نیوتن به طریق روبرو محاسبه میگردد:}$$

$$(31) \text{ رابطه شماره } m = \frac{G}{g} \quad \text{جرم بلوک خاک شتاب گرفته نیز برابر عبارت روبروست :}$$

برای محاسبه تغییرات با زمان سرعت ، جابجایی خاک بایست مطرح شود. قدر مطلق جابجایی خاک ، فرض به ، بودن در راستای صفحه جلویی برش و در جهت عمود به پاره خط OB (شکل شماره ۱۵.۷.۱) است. بعلاوه ، مفروض است که سرعت پیشروی ابزار ، سرعت پیمایش تیغه توسط خاک روی خط توصیف شده فوق باشد. زمانی که لازم است تیغه پیموده شود

$$(32) \text{ رابطه شماره } T_p = \frac{d_p}{v_t} \quad \text{عبارتست از :}$$

زمان لازم برای پیمایش سطح اریب توسط خاک برابر زمانبست که برای جابجایی خاک در طول سطح جلویی شکست لازم است. بنابراین قدر مطلق سرعت عبارتست از :

$$V_a = \frac{d_s}{T_s} \quad (\text{رابطه شماره ۳۳})$$

و شتاب نیز عبارتست از :

$$a \cong \frac{V_a - V_0}{\Delta t} \quad (\text{رابطه شماره ۳۴})$$

برای این مورد بلوک خاک از سرعت صفر (سکون) شروع میکند. با جایگذاری روابط شماره ۳۱ و ۱۷ در رابطه ۳۰ ، رابطه روبرو حاصل میشود :

$$B = \frac{gV_a}{g\Delta T} \quad (\text{رابطه شماره ۳۵})$$

حال همه متغیرها در روابط شماره ۲۵ ، ۲۶ و ۲۷ معلوم شدند و بنابراین نیروها در جهات x ، y و z میتوانند محاسبه شوند.

۱۵.۸ اجرا توسط رایانه

یک نرم افزار فعل و انفالی رایانه ای ، به نام *PLOW* ، که برای نمایش این روش گرافیکی رایانه ای ، این سطوح بزیه توسعه یافته است ، میتواند برای نمایش ابزارهای خاکورزی استفاده شود و سپس نتایج را با مدل مکانیکی خاک- ابزار برای محاسبه نیروهای اعمال شده توسط خاک روی ابزار خاکورزی ، ترکیب میکند. نرم افزار توسط رایانه هایی با قابلیت هایی از قبیل ؛ زبان فرترن ۵ ، یک Tektronics Plot-10 Terminal ، سیستم کنترلی (TCS) و ترمینال سری ۴۰۰۰ Tektronics ایجاد شده است. همچنین چندین نرم افزار کاربردی برای کاربرد ادوات و قابلیت ها و سیستم ها نوشته شده است. کاربرد حین کار با این نرم افزارهای کاربردی چند انتخاب، برای مشاهده خیش از نقاط متفاوت با تعداد زیادی فاکتور بزرگ سازی ، برای مشاهده و کنترل نقاط کنترل (این مورد به کاربر برای تغییر شمایل سطح خیش کمک میکند.) ، برای تغییر تعداد عناصر سطح و ؛ تغییر حالات عملکرد خاک و ابزار دارد. سطح خیش به تعدادی صفحات متمایل به فضای سه بعدی تقسیم شده است. استفاده از مدل سه بعدی مکانیکی ابزار- خاک ، توصیف سریع تر مؤلفه های نیروهای عکس العمل خاک ، که به طور جداگانه برای هر صفحه محاسبه میشود ، را ممکن می سازد. این مؤلفه ها سپس برای محاسبه نیروی عکس العمل برآیند جمع می شوند.

هر سطح به یک تا صد عنصر تقسیم میشود ؛ با حدود ده تا در جهات s و t . در این دو جهت تعداد عناصر یکسان است. به هر حال ، تیغه و برگرداندار میتوانند تعداد عناصر متفاوت داشته باشند. فرض میشود که همه چهار گوشه از تیغه مستقیم

هستند. بنابراین فقط نقاط گوشه مختصات برای توصیف سطح نیازند. گوشه برگرداندار مجاور تیغه نیز همچنین مستقیم فرض میشود. عناصر در بخش خمیده سطح، تمام نقاط چهارگوش در سطح را در برنمیگیرد و فقط سه نقطه صفحه را شرح میدهد. بنابراین، دورترین نقطه از نقطه صفحه روی هر عنصر جهت محاسبه جهت و تمایل خیش به کار نمیروند. چهار نقطه کنترل سطح مرکزی توسط کاربر مشخص نمیشود. آنها از نقاط معین یال ها محاسبه شده تا اینکه سطح بردارهای پیچ صفر داشته باشد. این عمل اختلالات سطح را حذف میکند.

به منظور حل برای سیر نیروهای عکس العمل خاک روی سطح خیش، لازم است، مسیری که عنصر خاک حین عمل شخم لمس میکند را بدانیم. وقتی که مسیر مذکور نمایان باشد، می توان اقدام به تعیین نیروهایی کرد که مسیر را ایجاد کرده اند. تلاش هایی در گذشته برای تعیین مسیر خاک روی سطح خیش انجام شده است. آقایان Soehne Corley and Pfof، لایه نازکی از لاک را روی سطح ابزار قبل از عمل شخم زدند. اثرهای باقی مانده توسط خاک روی لایه لاک مسیر خاک را نشان داد. آقایان Kummer و Nicholas از دستگاه ردیابی ای استفاده کردند که برای توسعه روابط تجربی توصیف مسیر مفید بود. آقای Emmet یک وسیله اندازه گیری برای اثرات مسیر اختراع کرد. او سپس چند جمله ای هایی برای توصیف مسیر و برای پیشگویی نیروها ارائه داد. هر چند، این روش نیازمند عملکرد واقعی خیش است که اگر کسی قصد داشته باشد نیروهای شکل خیش متفاوتی را برای پیش بینی طرح آن پیش گویی کند، ناممکن می شود. در این تحقیق مسیر خاک بر اساس نیروهای اعمالی روی بلوک خاک قبل از حرکت آن روی عنصر دیگر محاسبه میشود. مسیر خاک با کسینوس جهت نیروهای z و y و جهت هندسی عنصر تشخیص داده میشود. کسینوس جهت x کاربرد ندارد، زیرا قید چهارمی به یک سیستم سه بعدی اضافه میکند. جدا کردن قید کسینوس جهت x هنگامی قابل قبول است که حرکت مطلق خاک، بالا و به طرف راست (به ترتیب، جهات z و y) با، حرکت مطلق خیلی کم خاک، در جهت حرکت خیش باشد. قبل از اینکه خاک روی ردیف ابتدایی تیغه حرکت کند، هیچ نیرویی به خاک اعمال نمیگردد. بنابراین، مسیر خاک روی اولین ردیف از عناصر موازی با جهت حرکت فرض می شود. حرکت تنها در جهات x و z است. کسینوس جهات برای سیر خاک به ترتیب زیر محاسبه میشوند:

$$D_y = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (\text{رابطه شماره ۳۶})$$

$$D_z = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (\text{رابطه شماره ۳۷})$$

$$D_x = \frac{D_y}{\tan \alpha} + D_z \tan \delta \quad (\text{رابطه شماره ۳۸})$$

تعداد عناصر روی هر سطح بزیه به طور آزادانه از بقیه سطوح می تواند تغییر کند. تعداد زیادتر عناصر ، اندازه کوچکتر هر عنصر و دقت بهتر نمایش هندسی را در بر دارد. زمانی که عناصر خیلی کوچک شوند و خاک ، بخشی از سطح اندک خمیده بعد از بخشی با خمیدگی تند دیده شود ، نیروی شتاب منفی خاک بزرگتر از نیروی گرانشی خاک است و بار نرمال محاسبه شده سطح منفی میشود. نظر به اینکه ، از نظر فیزیکی این امر امکان ندارد ، بار نرمال صفر در نظر گرفته میشود. هرچند ، مسیر خاک روی ردیف بعدی عناصر بستگی به نیروی روی ردیف دارد. من تبع ، کاربر آگاه است که مدل خاک - ابزار نیروها را نمی تواند محاسبه کند. یک استثناء وجود دارد آن هم زمانیست که بار نرمال صفر ، روی آخرین ردیف از عناصر برخورد کند ؛ قبل از اینکه خاک از خیش عبور کند. افزایش اندازه عناصر ، تیزی بخش خمیده را کاهش و وزن خاک را افزایش می دهد و بنابراین باعث مثبت شدن بار نرمال می گردد. حداکثر تعداد عناصر برای تیغه و برگرداندار روی خیش Ford ، ۳۶ عدد (۶ عدد در هر یال) است. توجه شود که ، این مدل فرض بر این است که یک تعداد مساوی از عناصر در طول هر یال برای انحصاراً هر سطح وجود دارد. شکل ۱۵.۵.۱ نمایش گرافیکی ای از تیغه را با ۱۶ عنصر و برگرداندار را با ۲۵ عنصر نشان میدهد. هر عنصر نیروهایی دارد که در جهات x ، y و z محاسبه میشوند. مجموع نیروها در هر جهت روی سطوح یکپارچه ، نیروی لازم برای به جلو راندن خیش در خاک است. طبق مفهومات قبلی ، زمانی که عناصر خیلی بزرگی استفاده شوند ، اشتباهات بزرگ هندسی رخ خواهد داد. همچنین ، مکانیک خاک - ابزار نیروها را با فرض اینکه عناصر در اندازه کوچک هستند تخمین میزند. بنابراین ، سطوح تیغه و برگرداندار با یک یا چهار عنصر مطرح نمیشوند.

۱۵.۹ نتایج

نتایج نرم افزار رایانه ای که توسط Richey طراحی شده است را با تخمین ها و محاسبات نیروهایی که توسط Emmet در آزمایشگاه خاکورزی ماشینی ملی در Auburn آلاباما بدست آمده اند مقایسه میشوند. خیش آزمایشی ۱۶ اینچ (۴۰۶.۴ میلیمتر) با کفش معمولی با استفاده عمومی Ford و نوع قابل تعویض تیغه است. خاک و وضعیت های عمل در جدول ۱۵.۹.۱ نمایش داده

شده اند. چسبندگی فلز- خاک صفر است ، زیرا اصطکاک مؤثر فلز- خاک برای جنس ماده خیش که چسبندگی داشته باشد محاسبه میشود. جزئیات پروسه آزمایش و نتایج توسط Emmet ارائه شده اند.

میانگین مؤلفه های نیرو در جدول ۱۵.۹.۲ نشان داده شده اند. نتایج نیروها برای ۹ ، ۱۶ ، ۲۵ و ۳۶ عنصر ترکیب تیغه و برگرداندار بررسی شده اند. برای جهات x ، y و z همه نیروها ، بترتیب ، به اندازه ۳.۵ ، ۵.۱ ، و ۲.۴ درصد از توانایی ها هستند. جدول ۱۵.۹.۲ همچنین مقایسه بین نیروهای پیش بینی شده و محاسبه شده را نشان میدهد. نیروی پیش بینی شده کشش F_x ، ۱۵٪ بزرگتر از نیروی تخمین زده شده است. نیروی جانبی پیش بینی شده F_y ، ۵۳٪ بزرگتر از زمانبست که تخمین زده شده است و نیروی عمودی پیش بینی شده F_z ، ۱۱۵٪ بزرگتر از مقدار تخمین زده شده آن است.

جدول ۱۵.۹.۱- خاک و حالات عمل استفاده شده در بررسی مدل

| نوع خاک | سندی لوم Norfolk |
|------------------------|-------------------------|
| دانسیته توده ای خاک | 1770.0 kg/m^3 |
| چسبندگی خاک | 19.7 kPa |
| زاویه اصطکاک داخلی خاک | 34.8° |
| ضریب اصطکاک خاک با فلز | 0.40 |
| چسبندگی خاک- فلز | 0 kPa |
| سرعت پیشروی | 1.34 m/s |
| عمق ابزار | 0.203 m |

جدول ۱۵.۹.۲- مقایسه نیروهای پیش بینی شده با تخمین زده شده خیش

| نوع | نیروی عمودی | نیروی جانبی | نیروی کشش |
|---------------|-------------|-------------|-----------|
| پیش بینی شده | -۳۳۱۹ | -۱۷۱۲ | ۳۸۹۵ |
| تخمین زده شده | -۱۵۴۲ | -۱۱۱۸ | ۳۳۸۹ |

مدل به طور کافی و مناسب نیروی کشش را پیش بینی میکند. هرچند ، پیش بینی نیروی عمودی و جانبی ، خیلی خوب ، با مقادیر محاسبه شده آنها در آزمایش ها ، قابل مقایسه نیست. این را باید دانست که ، انتخاب مدل برای اثبات روش گرافیک رایانه ای ، خیلی ساده بود. از طرفی ، اطلاعاتی که برای بررسی استفاده و توسط Emmet ارائه شده بودند ، شرایط و وضعیت آزمایش خیش را برای مؤلف روشن نمی کردند. مدل به دقت نمی تواند نیرو ها را برای پوشش کافی خیش پیش بینی کند. این امکان دارد که روشی که برای تعیین مسیر حرکت خاک روی سطح خیش استفاده شده است دقیق نباشد. این آزمایش باید بررسی شود.

۱۶. نتیجه

مقاله به طور روشن تشریح کرد که ، سطوح پارامتری دو مکعبی سه بعدی (فرم بزیه) می توانند برای یک سطح خیش برگرداندار استفاده شوند. با استفاده از یک مدل ساده مکانیکی خاک - ابزار مقاله نشان داد که نیروی کشش را میتوان بدون علم قیاسی (بردن از علت به معلول) از مسیر خاک روی سطح خیش برگرداندار پیش بینی کرد. هر چند ، مدل و روش های محاسباتی به کار گرفته شده در اینجا را نمی توان برای پیش بینی بقیه مؤلفه های نیرو به کار برد.