مدل های تغییرپذیری
(مدل های ARCH , GARCH)

تغییرپذیری و نااطمینانی

تغییرپذیری یکی از مباحث مهم در مطالعات اقتصادی و مالی است.تغییرپذیری را اغلب به صورت انحراف معیار یا واریانس تعریف می کنند که در هر مثالی دارای مفهوم خاصی است. به عنوان مثال در رابطه با بازدهی سهام، انحراف معیار بیانگر ریسک می باشد. همه مدل هایی که برای قیمت پذاری دارایی مالی طرح می شوند، نیازمند برآورد و پیش بینی تغییرپذیری می باشند.

همان طور که می دانیم در مباحث رگرسیون دو متغیره، تغییرات Y_t شامل دو قسمت است: یکی تغییرات توضیح داده شده که توسط $\alpha + \beta X_t$ تبیین می شود و دیگری تغییرات توضیح داده نشده که توسط U_t توصیف می شود. بخش اول برای ما قابل پیش بینی است و هیچ نااطمینانی راجع به آن وجود ندارد اما بخش دوم یک جزء نامطمین است که آن را ثابت فرض میکنیم در حالی که این تغییرات پیش بینی نشده لزوماً ثابت نیستند بنابراین σ^2 به عنوان معیار نااطمینانی لزوماً ثابت نیست.

بنابراین همان طور که برای میانگین شرطی Y_t یک معادله رگرسیون تعریف و برآورد می کنیم، لازم است برای واریانس شرطی نیز یک معادله تعریف و برآورد نماییم.

مدل $ARCH$

این مدل، روشی برای ساختار واریانس U_t است که به صورت «واریانس شرطی خودرگرسیونی» تعریف می کنند.
یکی از ویژگی های مهم برخی از سری های زمانی اقتصادی و مالی این است که دارای تغییرپذیری خوشه ای هستند. یعنی تغییرات بزرگ منجر به تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک منجر به تغییرات کوچک می شود. به عبارت دیگر سطح جاری تغییرپذیری، رابطه مثبت با مقادیر گذشته آن دارد.
مدل $ARCH$ یکی از روش های مناسب برای مدل سازی تغییرپذیری است. برای توصیف این مدل ابتدا واریانس شرطی U_t را که با σ^2 نشان داده میشود، می نویسیم:

$$\sigma_t^2 = var(U_t|U_{t-1},U_{t-2},\dots) = E[(U_t - E(U_t))^2|U_{t-1},U_{t-2},\dots] \qquad (1)$$

در مدل $ARCH$، «خود همبستگی در تغییرپذیری» توسط واریانس شرطی جمله خطا بیان می شود که در ساده ترین حالت، بستگی به مجذور خطای دوره قبل دارد:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \qquad (2)$$

این مدل را $ARCH(1)$ می گویند، زیرا واریانس شرطی فقط بستگی به خطای دوره قبل دارد.اما این رابطه فقط بخشی از مدل است، زیرا درباره میانگین شرطی که همان معادله اصلی است، چیزی بیان نمیکند. در این مدل معادله میانگین شرطی را به هر شکلی می توان تعریف کردمثلا به صورت زیر:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad , \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \qquad (3)$$

که معادله (۲) را می توان گسترش داد و در حالت کلی آن را به صورت $ARCH(q)$ نشان داد:

$$(4)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

توجه به این نکته لازم است که چون واریانس شرطی است، مقدار آن نمی تواند منفی باشد و لذا تمام ضرایب معادله (۴) غیر منفی است.

آزمون $ARCH$

این آزمون راجع به ثابت یا متغیر بودن واریانس جمله خطاست. برای انجام این آزمون باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱- معادله میانگین شرطی را که به صورت معادله (۳) است با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده های آن را حساب میکنیم.

۲- خطاها را مجذور کرده و رگرسیون کمکی زیر را برآورد کرده و R^2 آن را حساب می کنیم:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_1 \hat{u}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t$$

$$(5)$$

۳- به عنوان ملاک آزمون از ضریب لاگرانژ (LM) استفاده می کنیم که برابر با nR^2است و توزیع χ^2 دارد. در اینجا دو مدل مقید($\hat{u}_t^2 = \alpha + v_t$) و غیر مقید داریم و قیدها نیز شامل$\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ هستند.

۴- فرضیه زیر را آزمون میکنیم که معادل با عدم وجود$ARCH$ (یعنی ثابت بودن واریانس) می باشد:

$$H_0: \alpha_i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, q$$
$$H_1: \alpha_i \neq 0$$

اگر آمارهLM و یاF بزرگتر از مقدار بحرانی باشد، آنگاه فرضیه H_0 رد می شود که بیانگر وجود $ARCH$می باشد.

آزمون $ARCH$در $Eviews$:

برای این کار ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می کنیم.

Dependent Variable: HS
Method: Least Squares
Date: 01/23/16 Time: 17:31
Sample (adjusted): 1959M02 1984M12
Included observations: 311 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	17.78705	3.876146	4.588848	0.0000
HS(-1)	0.861938	0.028823	29.90479	0.0000

R-squared	0.743205	Mean dependent var	128.7797
Adjusted R-squared	0.742374	S.D. dependent var	38.83015
S.E. of regression	19.70895	Akaike info criterion	8.806433
Sum squared resid	120028.8	Schwarz criterion	8.830483
Log likelihood	-1367.400	Hannan-Quinn criter.	8.816046
F-statistic	894.2967	Durbin-Watson stat	1.448109
Prob(F-statistic)	0.000000		

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.752270	Prob. F(3,304)	0.5217
Obs*R-squared	2.269655	Prob. Chi-Square(3)	0.5184

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 01/23/16   Time: 17:37
Sample (adjusted): 1959M05 1984M12
Included observations: 308 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	348.9832	51.27815	6.805691	0.0000
RESID^2(-1)	0.021241	0.057385	0.370148	0.7115
RESID^2(-2)	0.082706	0.057190	1.446152	0.1492
RESID^2(-3)	-0.007854	0.057371	-0.136902	0.8912

R-squared	0.007369	Mean dependent var	386.0236
Adjusted R-squared	-0.002427	S.D. dependent var	628.7689
S.E. of regression	629.5313	Akaike info criterion	15.74073
Sum squared resid	1.20E+08	Schwarz criterion	15.78917
Log likelihood	-2420.072	Hannan-Quinn criter.	15.76010
F-statistic	0.752270	Durbin-Watson stat	1.996592
Prob(F-statistic)	0.521747		

مقدار $F=0.75$ و همچنین $\chi^2 = nR^2 = 2.26$ کوچک بوده و در ناحیه بحرانی قرار ندارند. همچنین مقدار احتمال ها که در مقابل F, χ^2 ارایه شده است؛ بزرگتر از 0.05 هستند، لذا فرضیه وجود $ARCH$ رد می شود. به عبارت دیگر واریانس متغیر مورد نظر ثابت است.

محدودیت های مدل $ARCH$

این مدل گر چه چارچوب مناسبی برای تحلیل تغییرپذیری در سری های زمانی ارایه می کند اما مشکلاتی نیز دارد. یکی از مشکلات این مدل مربوط به تعیین q (یعنی تعداد وقفه های جمله خطا) است. مشکل دیگر این است که ممکن است فرض غیرمنفی بودن نقض شود، که در این صورت تخمین مدل $ARCH$ را با مشکل مواجه می کند.برای حل این مشکلات از مدل دیگری موسوم به $ARCH$ تعمیم یافته یا $GARCH$ استفاده می کنیم.

مدل $ARCH$ تعمیم یافته ($GARCH$)

از آنجا که مدل های و خطی نیستند لذا نمی توان آن ها را با روش های معمول مانند برآورد نمود. برای تخمین این مدل ها باید از روش حداکثر درست نمایی استفاده کرد. البته در این روش باید به نکاتی توجه داشت؛ از

جمله اینکه، روش تخمین معادلات غیر خطی به صورت تکراری است، بنابراین مقدار اولیه ای که برای شروع تخمین پارامترها در نظر گرفته می شود، اهمیت خاصی دارد.
نکته دیگر آنکه، فرض بر این است که جمله خطا(u_t) توزیع نرمال دارد و بر اساس آن تابع درستنمایی را تشکیل میدهیم. اما ممکن است این فرض برقرار نباشد. بنابراین برای آزمون نرمال بودن، ابتدا باقیمانده هایی را که از تخمین معادله اصلی به دست می آید، استاندارد کرده و آن را با v_t نشان می دهیم. حال اگر این v_tتوزیع نرمال نداشته باشد، تخمین پارامترها سازگار است، ولی تخمین باقیمانده ها با خطا همراه است و لذا واریانس پارامترها نیز متفاوت خواهد بود. در این حالت از روش شبه حداکثر درستنمایی (QML) استفاده می شود.
معمولاً نرم افزارهایی مانند Eviews چنین تخمین هایی را ارایه میکنند.

تخمین مدل GARCH در Eviews

Dependent Variable: HS
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)
Date: 01/23/16 Time: 18:51
Sample: 1959M01 1984M12
Included observations: 312
Convergence achieved after 26 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	124.8349	1.699387	73.45877	0.0000
Variance Equation				
C	353.8749	113.1621	3.127152	0.0018
RESID(-1)^2	0.708216	0.199548	3.549102	0.0004
GARCH(-1)	0.043167	0.134172	0.321731	0.7477

R-squared	-0.009823	Mean dependent var	128.6753
Adjusted R-squared	-0.009823	S.D. dependent var	38.81152
S.E. of regression	39.00167	Akaike info criterion	9.800340
Sum squared resid	473071.6	Schwarz criterion	9.848328
Log likelihood	-1524.853	Hannan-Quinn criter.	9.819519
Durbin-Watson stat	0.272562		

در قسمت بالای این جدول معادله میانگین شرطی داده شده است که فقط یک مقدار ثابت دارد که از نظر آماری، معنادار است. اما در قسمت پایین، معادله واریانس شرطی داده شده است که مقدار ثابت آن برابر با 353.78 است و ضریب u_{t-1}^2 برابر با 0.708 می باشد. همچنین ضریب واریانس تأخیری معادل با ضریب $GARCH(-1)$ یعنی 0.043 می باشد.

باید توجه کنیم که در این جا R^2 نزدیک به صفر است زیرا معادله میانگین شرطی فاقد متغیر توضیحی است.

در پنجره ای که نتایج برآورد مدل نشان داده شده است، می توان واریانس شرطی را از طریق گزینه $PROC$ با انتخاب $Make\ GARCH\ Variance\ Series$، محاسبه نمود و نمودار آن را نیز رسم کرد: