



#انتهگرال گیری مسیر

از دو سوال زیر فقط به یکی پاسخ دهید (بارم هر دو سوال ۲۰ نمره است)

(۱) جسمی از فاصله d از مرکز یک نیروی جاذبه که با عکس مجذور فاصله متناسب ($F=-kx^{-2}$) است رها می شود. نشان دهید که جسم پس از $t = \pi \left(\frac{md^3}{8k}\right)^{1/2}$ به مرکز نیرو می رسد.

(۲) گلوله ای از سطح زمین به طور مستقیم و عمود بر سطح زمین به بالا پرتاب می شود. اگر نیروی اصطکاک وارد بر گلوله متناسب با منفی مجذور سرعت آن باشد ($F=-kv^2$) معادله ی سرعت گلوله را بر حسب ارتفاع آن از زمین به دست آورید (حرکت به بالا و پایین را جداگانه بررسی کنید)

#حرکت پرتابی

از دو سوال زیر فقط به یکی پاسخ دهید (بارم هر دو سوال ۲۰ نمره است)

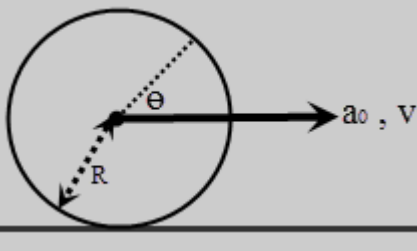
(۳) ذره ی ۱ در لحظه ی $t=0$ از مبدا مختصات با سرعت 20 m/s و زاویه θ نسبت به سطح افقی زمین پرتاب می شود. t_0 ثانیه بعد (یعنی در زمان $t=t_0 > 0$) ذره ی ۲ از مکان $x_0=20\sqrt{3}\text{ m}$ و $y_0=20\text{ m}$ رها می شود و با شتاب $g=10\text{ m/s}^2$ در جهت منفی محور y حرکت می کند. نشان دهید برای اینکه دو پرتابه به هم برخورد کنند دو شرط زیر لازم اند:

$$1) \pi/3 > \theta > \pi/6 \quad 2) 2(\sqrt{3}-1) > t_0$$

(۴) بازیکنی می خواهد از فاصله ی 20 m دروازه توپ را وارد دروازه کند. فرض کنیم میدانیم که بازیکن حتما با سرعت 20 m/s به توپ ضربه خواهد زد. اگر در وسط فاصله ی بین توپ و دروازه یک دیوار دفاعی به ارتفاع 2 m تعبیه شده باشد و ارتفاع دروازه 2.5 m باشد احتمال اینکه توپ بدون برخورد به زمین وارد دروازه شود را حساب کنید. فرض های زیر برای حل مسئله لازم اند: (احتمال ضربه زدن در تمام زاویه ها یکسان است، بازیکن با زاویه ای کمتر از 50° درجه به توپ ضربه می زند، از تمامی اصطکاک ها صرف نظر کرده ایم، توپ را مانند یک ذره در نظر می گیریم، دروازه بان نداریم!)

(۵) مسیر حرکت ذره ای در مختصات قطبی به صورت $r=Re^{kt}$ و $\theta=\omega t$ توصیف می شود. الف) نشان دهید زاویه ی بین بردارهای سرعت و شتاب ذره همیشه ثابت است (R و k و ω همگی ثابت و مثبت هستند) (۲۰ نمره) ب) ω نمره امتیازی: مسیر حرکت ذره را رسم نمایید

(۶) مطابق شکل چرخي به شعاع R روی سطحی می غلتد و شتاب مرکز آن a_0 در امتداد سطح است. الف) نشان دهید شتاب هر نقطه از چرخ نسبت به مرکز چرخ برابر: $(a_0^2 + v^4/R^2)^{1/2}$ و نسبت به سطح برابر: $a_0(2+2\sin\theta + v^4/(a_0R)^2 - (2v^2/a_0R)\cos\theta)^{1/2}$ است. ب) ω نمره امتیازی: شتاب ماکزیموم نسبت به سطح در چه زاویه ای اتفاق می افتد؟ (ص سرعت لحظه ای چرخ رو به جلو است) (۵+۲۰ نمره)



(۷) ذرات گل از چرخي که در حال غلتش محض روی سطح افقی زمین است پرتاب می شوند. اگر سرعت چرخ در امتداد سطح برابر V_0 و شعاع چرخ R باشد نشان دهید که ارتفاع ماکزیموم گل ها از زمین برابر $(R+v_0^2/2g+gb^2/2v_0^2)$ خواهد بود. (فرض کنید $v_0^2/g > R$ و ذرات گل بدون چسبندگی و مماس بر سطح چرخ از آن پرتاب می شوند) (۲۰ نمره)