

زنگ امتحان: (سری اول)



۱. در یک جدول $m \times n$ ، خانه‌ی واقع در ستون j ام ($1 \leq j \leq n$) و سطر i ام ($1 \leq i \leq m$) برابر است با جمع اعداد سطر i ام ضرب در جمع اعداد ستون j ام. ثابت کنید جمع کل اعداد جدول برابر با ۱ است.

۲. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا n را پشت سر هم نوشت که عدد i ام ($1 \leq i \leq n$) از همه اعداد قبل از خود (عدد i ام تا i ام) بزرگتر و یا از همه‌ی آنها کوچکتر باشد؟
به عنوان مثال به ازای $n=5$ دنباله‌ی زیر شرایط مسئله را دارد:

3, 2, 4, 1, 5

۳. می‌خواهیم n عدد را مرتب کنیم. برای این کار می‌توانیم در هر مرحله تعدادی از این اعداد را به دلخواه انتخاب کنیم و با همان ترتیب به انتها ببریم. به عنوان مثال دنباله‌ی زیر در ۳ مرحله مرتب شده است.

1 7 5 2 3 3 4 9

1 2 3 3 7 5 4 9

1 2 3 3 7 4 9 5

1 2 3 3 4 5 7 9

ثابت کنید می‌توان با $\lceil \log n \rceil$ مرحله اعداد را مرتب نمود.

۴. یک جدول $(4n+2) \times (4n+2)$ داریم که در هر یک از خانه‌های آن یکی از اعداد ± 1 وجود دارد. می‌دانیم جمع همه اعداد جدول صفر است. ثابت کنید می‌توان $2n+1$ سطر و $2n+1$ ستون انتخاب کرد به طوری که جمع اعداد واقع در سطر و ستون‌های انتخاب شده بزرگتر یا مساوی $2n+1$ باشند.

به عنوان مثال در جدول زیر با انتخاب سطرهای ۳ و ۵ و ۶ و ستون‌های ۱ و ۳ و ۴، جمع اعداد واقع در این تقاطع‌ها برابر است با ۵. $(5 \geq 3)$

+1	-1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	+1	-1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	+1	-1

۵. ۶۱ وزنه داریم که ۵۹ تا از آنها به وزن a و ۲ تای دیگر به وزن b هستند ($a \neq b$). روشی ارائه دهید که با ۳ بار استفاده از یک ترازوی دو کفه‌ای، بتوان فهمید که $a < b$ یا $a > b$.

همان‌هایی که اهل راز گردند دگر با خویشان دمساز گردند

جراحت در جگر دارند و افسوس کجا یاران رفته باز گردند