بسم الله الرحمن الرحیم

تمارین حل شده درس میدان و موج

۱) خط انتقال بدون تلفات به $Z_L = 100\,\Omega$ ختم شده است، اگر $SWR = 1.5$ باشد، مقادیر ممکن برای امپدانس این خط را پیدا نمائید.

$$SWR = \frac{|\Gamma|+1}{|\Gamma|-1} \longrightarrow |\Gamma| = \frac{SWR-1}{SWR+1} = \frac{1.5-1}{1.5+1} = 0.2$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \longrightarrow |\Gamma| = \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \longrightarrow 0.2 = \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right| \longrightarrow$$

$$1)\ \frac{100 - Z_0}{100 + Z_0} = 0.2 \rightsquigarrow Z_0 = 66.\bar{6}\ \Omega$$

$$2)\ \frac{100 - Z_0}{100 + Z_0} = -0.2 \rightsquigarrow Z_0 = 150\,\Omega$$

یعنی با استفاده از دو خط متفاوت به SWR یکسان می‌رسیم.

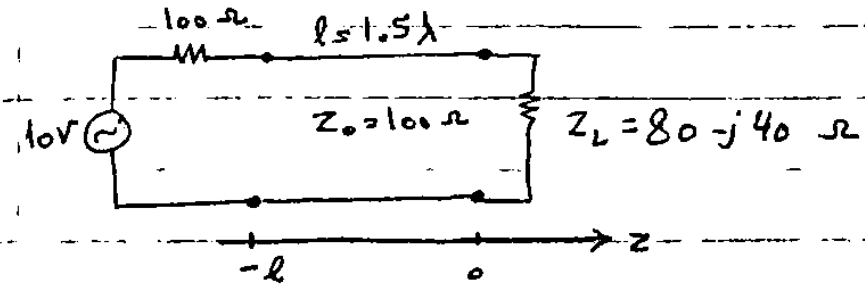
۲) نشان دهید برای امپدانس بار موهومی $Z_L = jX$، ضریب انعکاس $|\Gamma|$ همواره برابر یک می‌شود (حداکثر انعکاس). فرض کنید امپدانس خط Z_0 حقیقی است.

$$Z_L = jX \longrightarrow \Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0}$$

$$|\Gamma|^2 = \Gamma\Gamma^* = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} \times \frac{-jX - Z_0}{-jX + Z_0} = \frac{X^2 \cancel{- jZ_0X} \cancel{+ jZ_0X} + Z_0^2}{X^2 + Z_0^2} = 1$$

پس ضریب انعکاس یک خط انتقال بدون تلفات به بار موهومی یک می‌شود یعنی تمام توان برگشت می‌خورد.

۳) یک منبع به یک خط انتقال مطابق شکل زیر متصل شده است. ولتاژ خط انتقال را روی محور Z محاسبه نمائید و نمودار $|V(z)|$ را در محدوده $-l < z < 0$ رسم کنید



$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - 80 + j40}{100 + 80 - j40} = \frac{44.7\angle -116.6^\circ}{184.4\angle -12.5} = 0.24\angle -104^\circ$$

$$\longrightarrow \Gamma = -0.058 - j0.283$$

ولتاژ روی بار از تقسیم ولتاژ بدست می‌آید

$$V_L = 10\,\frac{80 - j40}{180 - j40} = 4.86\angle -13.5^\circ$$

برای ولتاژ داریم

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} = V^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

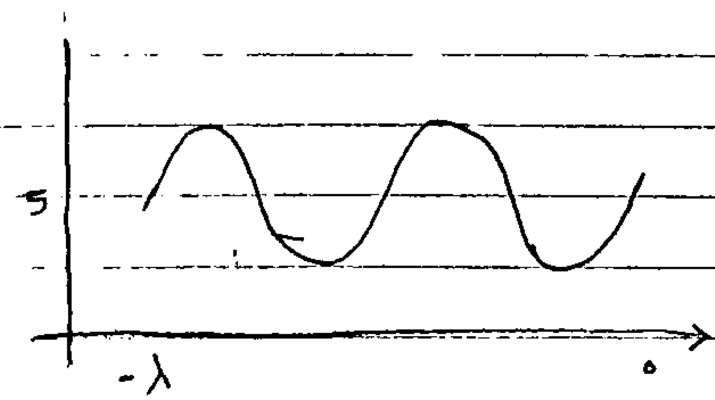
در ابتدای این فصل در فرمولها V^+ را از تقسیم ولتاژ بین امپدانس خط و امپدانس بار بدین گونه بدست می‌آوریم

$$V^+ = 10\,\frac{100}{100 + 100} = 5$$

پس

$$V(z) = 5\left[e^{-j\beta z} + 0.24\angle -104\ e^{j\beta z}\right]$$

برای رسم نمودار داریم

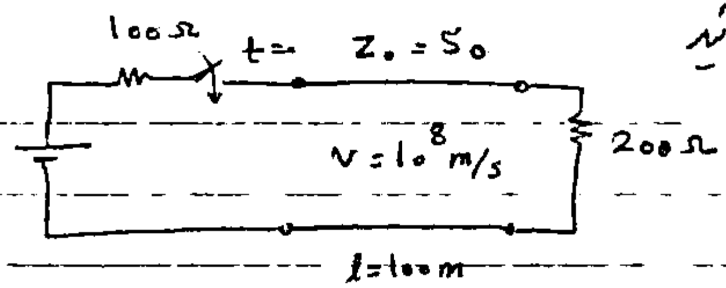


$$V_{max} = V^+(1 + |\Gamma|) = 5(1 + 0.24) = 6.2$$

در $z = -0.355\lambda$

$$V_{min} = 5(1 - |\Gamma|) = 3.8 \rightarrow z = -0.105\lambda$$

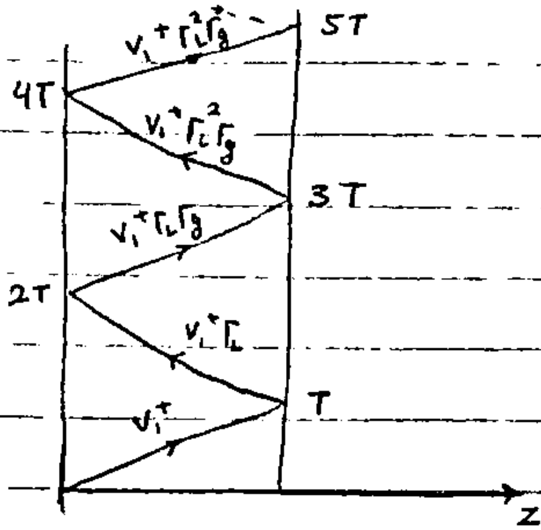
۴) جهت خط انتقال مقابل بدست آورید رسم نمائید



الف) ولتاژ در سمت بار
ب) " " منبع

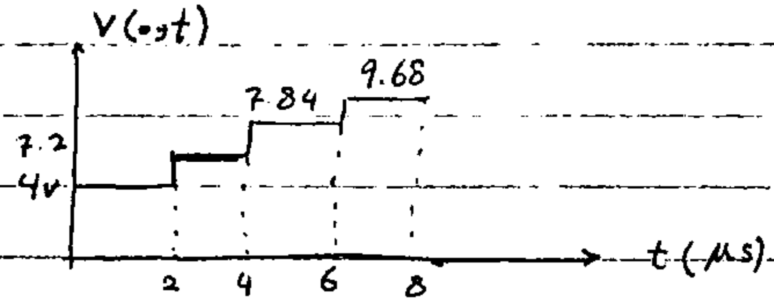
$0 < t < 6\mu s$

$\Gamma_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad \Gamma_g = 1/3 \qquad$ Transit time $T = \dfrac{l}{v} = \dfrac{100}{10^8} = 1\mu s$

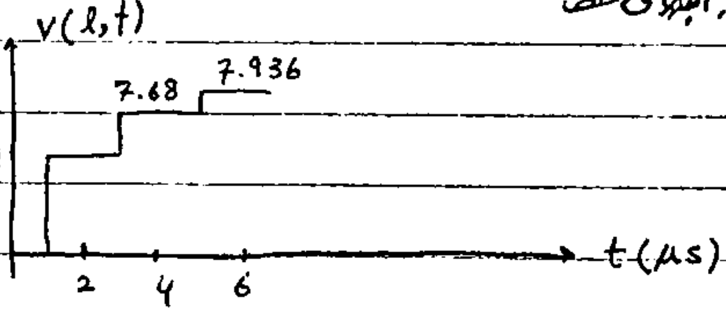


$$V_1^+ = \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} V_s = 4V$$

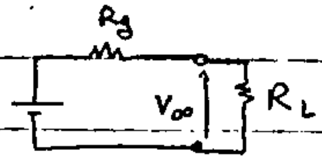
ولتاژ در ابتدای خط



ولتاژ در بار



$t \to \infty \qquad V_\infty = \dfrac{Z_L}{Z_L + Z_g} V_g = 8V$



۱) یک موج TE_{10} با فرکانس 10 GHz در یک موجبر مستطیلی با دیواره‌ی مسی $\sigma_c = 1.5\times10^{7}\ S/m$ دارای ابعاد $a = 1.5\,cm$ و $b = 0.6\,cm$ که از عایق پلی‌استیلن $\varepsilon_r = 2.25$ ، $\mu_r = 1$ و تانژانت تلفات 4×10^{-4} پر شده، منتشر می‌شود. مطلوبست الف) ثابت فاز ب) طول موج موجبر ج) سرعت فاز د) امپدانس موج

طول موج در عایق با $\varepsilon_r = 2.25$ می‌شود

طول موج فضای آزاد

$$\lambda_d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^{10}}{\sqrt{2.25}\times10^{10}} = 2\ cm$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}}\ \frac{m\pi}{a} = 0.667\times10^{10}\ Hz = 6.67\ GHz$$

($m = 1$, $\varepsilon_r = 2.25$, $a = 1.5\,cm$)

$$\beta_{TE} = \overset{K}{\beta}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = 74.5\pi\ \ rad/m$$

طول موج موجبر

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{2}{0.745} = 2.68\ cm$$

سرعت فاز

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{2\times10^8}{0.745} = 2.68\times10^8\ \ m/s$$

که $v = f\lambda_d = 0.02\times10^{10}$

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{377/\sqrt{2.25}}{0.745} = 337.4\ \Omega$$

$a = 0.9$ inch
$b = 0.4$ inch

۲) مطلوبست تعیین تمام مدهای در حال انتشار در فرکانس کار $f = 25\,GHz$

باید مدهای مختلف را بررسی نماییم و ببینیم فرکانس (قطع) شروع کدام فرکانس‌ها از 25GHz پایین‌تر می‌شود

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} < f$$

$$\frac{3\times10^8}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} < 25\times10^9 \longrightarrow m^2 + 5.0625\,n^2 \leq 14.51$$

$$\begin{cases} m=0 \;:\; n=1 \longrightarrow TE_{01} \\ m=1 \;:\; n=0,1 \longrightarrow TE_{10},\ TE_{11},\ TM_{11} \\ m=2 \;:\; n=0,1 \longrightarrow TE_{20},\ TE_{21},\ TM_{21} \\ m=3 \;:\; n=0,1 \longrightarrow TE_{30},\ TE_{31},\ TM_{31} \end{cases}$$

به عنوان مثال فرکانس قطع

$TE_{10} \longrightarrow 6.55\,GHz$

$TE_{20} \longrightarrow 13.1\,GHz$

$TE_{01} \longrightarrow 14.71\,GHz$

$TE_{11}, TM_{11} \longrightarrow 16.1\,GHz$

$TE_{21}, TM_{21} \longrightarrow 19.69\,GHz$

۳) تلفات هدایتی یک موجبر مستطیلی را در مد TE_{10} بدست آورید.

هرگاه (در صورتیکه) دیواره های موجبر هادی کامل نباشند درنتیجه بخشی از توان بصورت حرارت در هر سطح (دیواره) از موجبر تلف می شود (می توان امپدانس سطحی یک هادی را بدین صورت نوشت

$$Z_s = R_s + jX_s = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \xrightarrow{\sigma \gg \omega\varepsilon} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\,(1+j)$$

طبق رابطه مداری توان تلف شده ($\frac{1}{2}RI^2$) در اینجا داریم

$$P_c = \frac{R_s}{2}\iint_{\underset{\text{سه سطح دیواره}}{A_m}} J_s \cdot J_s^* \, ds$$

که جریان سطحی برابر است با $J_s \approx |\hat{n} \times \hat{H}|$

در تلفات هدایتی ضریبی بنام α ضریب تضعیف تعریف می گردد که مبنای تعریف آن بدین صورت است

اگر P_0 نشانگر توان در یک نقطه مبنا ($z=0$) باشد، آنگاه توان P_{mn} در نقطه دیگر z با P_0 چنین رابطه دارد

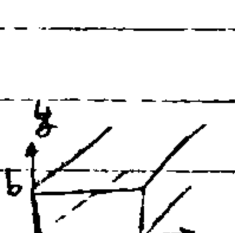
$$P_{mn}(z) = P_{mn}\Big|_{z=0} e^{-2\alpha_c z} = P_0 e^{-2\alpha_c z}$$

نرخ منفی تغییرات P_{mn} نشانگر توان تلف شده در واحد طول است. پس برای طول l موجبر کل توان تلف شده P_c می شود

$$P_c = -z\frac{dP_{mn}}{dz}\Big|_{z=l} = -z\frac{d}{dz}\left(P_0 e^{-2\alpha_c z}\right)\Big|_{z=l}$$

$$P_c = 2\alpha_c l P_{mn} \qquad \boxed{\alpha_c = \frac{P_c/l}{2P_{mn}}}$$

که P_{mn} برابر توان منتشره در موجبر است که براساس قضیه پوینتینگ بدست می آید



فرض کنید $H_z = -j\frac{A_{10}}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_z z}$ ، $H_x^+ = A_{10}^+\frac{\beta_z}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\pi}{a}\sin(\ )\,e$

ابتدا P_c را برای مد TE_{10} بدست می‌آوریم

جریان در دیواره زیرین — جریان در دیواره چپ

$$(P_c)_{10} = 2\left[\frac{R_s}{2}\underbrace{\iint_{y=0}}_{\text{دیواره زیرین}} J_{sb}J_{sb}^*\,ds + \frac{R_s}{2}\underbrace{\iint}_{\text{دیواره سمت چپ}} J_{sl}J_{sl}^*\,ds\right]$$

تلفات و جریان در دیواره‌های بالا و پایین مشابه است همچنین در دیواره‌های چپ و راست.

چگالی جریان روی دیواره پایین می‌شود

$$J_{sb} = \hat{n}\times H\Big|_{y=0} = \hat{a}_y\times(a_xH_x + a_zH_z)\Big|_{y=0}$$

$$= (\hat{a}_xH_z - \hat{a}_zH_x)\Big|_{y=0} = \frac{A_{10}}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\pi}{a}e^{-j\beta_z z}\left(-\hat{a}_x j\left(\frac{\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - a_z\beta_z\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)$$

در دیواره سمت چپ

$$J_{sl} = \hat{n}\times H\Big|_{x=0} = \hat{a}_x\times(\hat{a}_xH_x + \hat{a}_zH_z)\Big|_{x=0} = -\hat{a}_yH_z\Big|_{x=0}$$

$$= \hat{a}_y\, j\frac{A_{10}}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-j\beta_z z}$$

حال این معادلات فوق را در $(P_c)_{10}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$R_s\underbrace{\iint_{y=0}}_{\text{دیواره زیرین یک موجبر}} J_{sb}J_{sb}^*\,ds = R_s|A_{10}|^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\frac{1}{(\omega\mu\varepsilon)^2}\left\{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\int_0^l\int_0^a\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx\,dz + \beta_z^2\int_0^l\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx\,dz\right\}$$

$$= lR_s\frac{|A_{10}|^2}{(\omega\mu\varepsilon)^2}\cdot\frac{a}{2}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \beta_z^2\right]\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

و به طریق مشابه

$$R_s\underbrace{\iint_{x=0}}_{\text{دیواره سمت چپ یک موجبر}} J_{sl}J_{sl}^*\,ds = R_s|A_{10}|^2\frac{bl}{(\omega\mu\varepsilon)}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4$$

در نتیجه با جمع انتگرال ها خواهیم داشت

$$\frac{(P_c)_{10}}{\ell} = \frac{a R_s}{2\eta^2} \cdot \frac{|A_{10}|^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]$$

حال بایستی توان منتشره در موجبر را بیابیم (P_{mn}) ← برای TE_{10} می شود P_{10}

چگالی توان می شود

$$(S_z)_{mn} = \hat{a}_z S_z = \tfrac{1}{2} Re\left[(a_x E_x + a_y E_y) \times (a_x H_x + a_y H_y)^*\right]$$

$$= \hat{a}_z S_z = \hat{a}_z \frac{1}{2} Re\left[E_x H_y^* - E_y H_x^*\right]$$

که با جاگذاری روابط مرتبط آن داریم (در TE_{10} ← $E_x = 0$)

$$(S_z)_{10} = \hat{a}_z S_z = \hat{a}_z |A_{10}|^2 \frac{\beta_x^3}{2\omega\mu\varepsilon^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad \beta_x = \frac{\pi}{a}$$

$$P_{10} = \iint_A (S_z)_{10}\, ds = \int_0^b \int_0^a S_z\, dx\, dy$$

می دانیم

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x\, dx = \begin{cases} a/2 \\ \ell \end{cases}$$

پس

$$P_{10} = |A_{10}|^2 \frac{\beta_z}{2\omega\mu\varepsilon} \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = |A_{10}|^2 \frac{\beta_c^2}{2\eta\varepsilon^2} \frac{ab}{2} \sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

حال که توان تلفاتی و منتشره در موجبر را یافتیم می توانیم ضریب تضعیف را بدست آوریم (TE_{10})

$$(\alpha_c)_{10} = \frac{P_{c0}/l}{2P_{10}} = \frac{\frac{aR_s}{2\eta^2}\,\frac{|A_{10}|^2}{\epsilon^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]}{|A_{10}|^2\,\frac{\beta_c}{\eta\epsilon^2}\left(\frac{a}{2}\right)b\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

که ساده می‌شود به:

$$(\alpha_c)_{10} = \frac{R_s}{\eta b}\,\frac{[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad Np/m$$

روابط میدان در TE_{10} بدین صورت فرض شده است

$$E_y = -\frac{A_{10}}{\epsilon}\,\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_z z}$$

$$H_x = \frac{\beta_z}{\omega\mu\epsilon} \quad 〃 \quad 〃 \qquad H_z = -j\frac{A_{10}}{\omega\mu\epsilon}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_z z}$$