۷- a) به ازای $\alpha > 0$ تبدیل فوریه $e^{-\alpha|x|}$ را به دست آورید. b) آیا $\hat{f}(k)$ متقارن است؟
c) آیا حقیقی است؟ d) رابطه عدم قطعیت را پیدا کنید.

۸- نوسانگر های هماهنگ میرا با رابطه زیر بیان می شود.

$$f(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$\hat{f}(\omega)$ را پیدا کنید و نشان دهید توزیع بسامد با رابطه زیر داده می شود.

$$|\hat{f}(\omega)|^2 = \frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}\right]$$

۹- تبدیل فوریه توزیع φ با رابطه زیر داده می شود:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\delta'(t-n)$$

$\varphi(x)$ را به دست آورید.

۱۰- نشان دهید برای تبدیل فوریه sin و cos داریم:

a) $\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \omega \mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$

b) $\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -\omega \mathcal{F}_c\{f(x)\}$

c) $\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$

d) $\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(1)$

برای توابع زوج داریم:

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

برای توابع فرد داریم:

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

۱۱- در حالت کلی نشان دهید:

c) $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(x)\}$

$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}$

۱۲- Convolution:

$\cancel{\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)}$

$$f*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, G(t)\, e^{-itx}\, dt$$

۱۳- با در نظر گرفتن رابطه ی Convolution $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, G(t)\, e^{itx}\, dt$

a) برای توابع f و g فرد نشان دهید:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g(y)\,[f(x+y) + f(y-x)]\, dy = \int_0^{\infty} F_s(s)\, G_s(s) \cos(sx)\, ds$$

b) برای توابع f و g زوج نشان دهید:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g(y)\,[f(y+x) + f(y-x)]\, dy = \int_0^{\infty} F_c(s)\, G_c(s) \cos sx\, ds$$

۱۴- از رابطه ی پارسوال برای گرفتن انتگرال زیر استفاده کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \pi$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin at}{t}$$

۱۵- با طی مراحل زیر معادلهٔ پواسون را حل کنید:

$$\nabla^2 \psi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

a) از دو طرف تبدیل فوریه بگیرید.

b) با کمک رابطهٔ کانولوشن و تبدیل فوریه‌ی وارون بگیرید.

convolution: $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy$ ~~[illegible]~~

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, G(t)\, e^{-itx}\, dt$$

۱۶- ت.ف تابع $f(x) = 1 - |x/2|$ $(|x|<2)$ را درنظر بگیرید. نشان دهید

$$\tilde{F}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$$

از رابطهٔ پارسوال استفاده کنید و نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{2\pi}{3}$$

$\boxed{17}$- با استفاده از رابطهٔ پارسوال انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\, d\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$

parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega$

۱۸- نشان دهید اگر یک تابع که در یک نقطه گسستگی دارد را بسط ~~[illegible]~~ آن بر حسب $\sin(nx)$ و $\cos(nx)$ بسط دهیم مقدار بسط در نقطه‌ی گسستگی میانگین دو قسمت می‌شود