

یادداشت روز هفتم – نظریه‌ی گراف

– سؤالات ستاره دار در کلاس مطرح نشده‌اند اما برای تمرین بیشتر آمده است.

(یک)

الف- ثابت کنید یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

ب- ثابت کنید هر گراف m یالی مثل G زیرگرافی دوبخشی دارد که دست کم شامل $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ یال‌ها می‌شود.

(دو) تعداد یال‌های یک گراف $2n$ راسی بدون مثلث (دور سه‌تایی) حداکثر چندتا است؟

*سه) ثابت کنید می‌توان K_{2n} (گراف کامل $2n$ راسی) به تعدادی زیر درخت فراگیر افراز کرد.

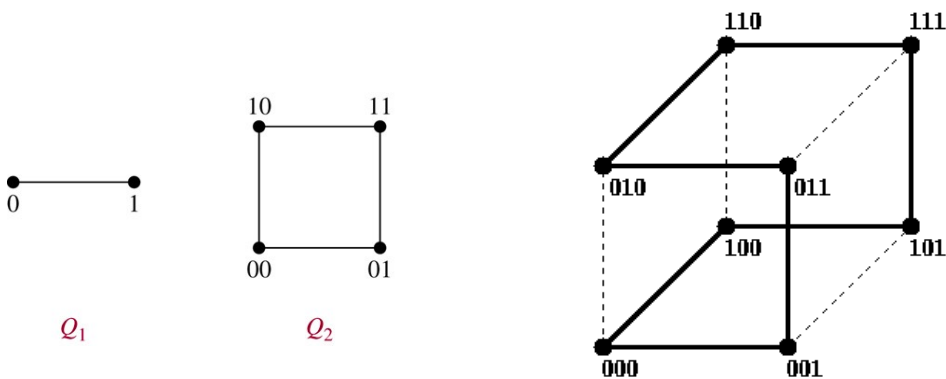
چهار) ثابت کنید در هر گراف با راس‌های درجه‌ی زوج، گذر بسته‌ای وجود دارد که از همه‌ی یال‌ها و راس‌ها عبور می‌کند. (گذر اویلری)

*تعریف: یک دور از گراف که شامل همه‌ی راس‌های گراف باشد را دور همیلتونی می‌نامیم و هر گراف که دور همیلتونی دارد را گراف همیلتونی می‌نامیم.

*پنج) همه‌ی رشته‌های مختلف از صفر و یک به طول n را در نظر بگیرید. گراف Q_n با در نظر گرفتن یک راس متناظر به هر رشته ساخته می‌شود، به طوری که بین دو راس یال است اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن‌ها فقط در یک بیت اختلاف داشته باشند.

الف- ثابت کنید Q_n دوبخشی است.

ب- ثابت کنید گراف Q_n دور همیلتونی دارد (در شکل یک دور همیلتونی در Q_3 پررنگ نمایش داده شده‌است).



- سوالات شش و هفت کمی سخت‌تر از بقیه‌ی سوالات هستند.

*شش) گرافی که در آن هر راسی درجه‌ی حداقل $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ دارد دور همیلتونی دارد.

*هفت) در گراف G ، دو راس نامجاور مثل u و v در نظر بگیرید به طوری که $deg(u) + deg(v) \geq n$. ثابت کنید اگر گراف $G' = G + uv$ (گرافی که با اضافه کردن یال uv به G ایجاد می‌شود) دور همیلتونی داشته باشد، G هم دور همیلتونی دارد.