۱)

۲)

$x_p(t) = v_0 \cos\theta \, t$ ، $y_p(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t$

$x_t(t) = x_0$ ، $y_t(t) = y_0 - \frac{1}{2} g (t-t_0)^2$

ب) در لحظه‌ی برخورد $x_t(t_1) = x_p(t_1)$ ، در نتیجه $t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos\theta}$.

شرط این که برخورد پرتابه و هدف بالای سطح افق باشد این است که $0 \leq y_p(t_1) \leq y_0$.

$$y_p(t_1) \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x_0}{v_0 \cos\theta} \geq 0$$

$$(1) \qquad \tan^2\theta - 2\frac{v_0^2}{g x_0}\tan\theta + 1 \leq 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\tan\theta_1$ و $\tan\theta_2$ بنامیم

$$\tan\theta_1 = \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1}$$

جواب نامعادله‌ی (۱) $\tan\theta_1 < \tan\theta < \tan\theta_2$ است.

$$y_p(t_1) \leq y_0 \Rightarrow$$

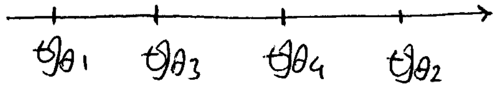
$$(2) \qquad \tan^2\theta - 2\frac{v_0^2}{g x_0}\tan\theta + 1 + \frac{2 v_0^2 y_0}{g x_0^2} \geq 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\tan\theta_3$ و $\tan\theta_4$ بنامیم

$$\tan\theta_3 = \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1} \quad , \quad \tan\theta_4 = \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

جواب نامعادله‌ی (۲) $\tan\theta < \tan\theta_3$ و $\tan\theta > \tan\theta_4$ است.

جواب‌ها به ترتیب بزرگی به این صورت‌اند



اشتراک این جواب‌ها، یعنی جواب قسمت ب) عبارتند از

$$\frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1} < \tan\theta < \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

$$\frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1} < \tan\theta < \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1}$$

شرط وجود این محدوده ها مادامی که زیر رادیکال شامل y_0 منفی نشود این است که

$\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$. وقتی زیر رادیکال شامل y_0 منفی شود یعنی $\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1 < 0$

نامعادله (۲) برقرار است ($y_p(t_1) \leq y_0$ حتماً برقرار است). در این

وضعیت فقط باید $y_p(t_1) \geq 0$ یعنی

$$\frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} \leq \tan\theta \leq \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

که باز هم باید $\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$.

به ازای $x_0 = 50m$ ، $y_0 = 100m$ ، $v_0 = 50 m/s$ و $g = 10 m/s^2$:

$$\tan\theta_1 = 5 - 2\sqrt{6} \quad , \quad \tan\theta_2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad , \quad \tan\theta_3 = 3 \quad , \quad \tan\theta_4 = 7$$

ج) در هنگام برخورد $y_p(t_1) = y_t(t_1)$ که $t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos\theta}$. در نتیجه

$$\sin\theta = \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{2}\frac{g t_0^2}{x_0}\right)\cos\theta + \frac{g t_0}{v_0}$$

که به ازای پارامترهای داده شده ، خواهد شد

$$\sin\theta = (2 - 0.1 t_0^2)\cos\theta + 0.2 t_0 \Rightarrow t_0^2 - \frac{2}{\cos\theta} t_0 + 10(\tan\theta - 2) = 0$$

از آنجا که باید $t_1 > t_0$ باشد جواب قابل قبول $t_0 = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tan\theta - 3)(\tan\theta - 7)}$ است ،

بنابراین

$$t_0\big|_{\theta_3} = \sqrt{10}\, s \quad , \quad t_0\big|_{\theta_4} = \sqrt{50}\, s$$

$$t_0\big|_{\theta_1} = -(\sqrt{80} - \sqrt{30})\, s \quad , \quad t_0\big|_{\theta_2} = \sqrt{30}\, s$$

در نتیجه $-(\sqrt{80} - \sqrt{30})s \leq t_0 \leq \sqrt{10}\, s$ برای $5 - 2\sqrt{6} \leq \tan\theta \leq 3$

و $\sqrt{30}\, s \leq t_0 \leq \sqrt{50}\, s$ برای $7 \leq \tan\theta \leq 5 + 2\sqrt{6}$

د) به ازای $t_0 = \sqrt{10}\, s$ از

$$\sqrt{10} = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tan\theta - 3)(\tan\theta - 7)}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} - \sqrt{(\tan\theta - 3)(\tan\theta - 7)} \Rightarrow \tan\theta = 3 \Rightarrow \theta = \text{Arctg}\, 3$$

یا $\theta = \frac{\pi}{4} + \text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}$

۴) الف)

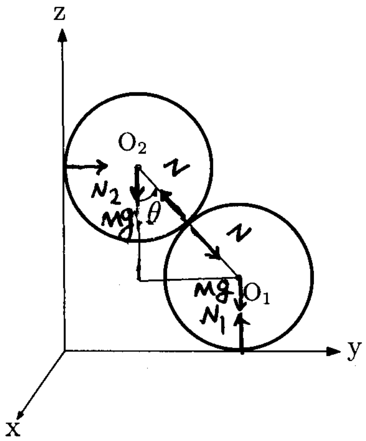
(۱) $y_1 = R + 2R\sin\theta \,,\; z_1 = R \qquad y_2 = R,\; z_2 = R + 2R\cos\theta$

ب)

$$\begin{cases} N\sin\theta = Ma_1 \\ N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -Mg + N\cos\theta = Ma_2 \\ N_2 - N\sin\theta = 0 \end{cases}$$

از دو معادله شامل a_1 و a_2 :

(۲) $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_1}{a_2+g}$$



ج) اگر مبدأ پتانسیل گرانشی را صفحه x-y بگیریم

$$0 + MgR + Mg(3R) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgR + Mg(R + 2R\cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

(۳) $$v_1^2 + v_2^2 = 4gR(1-\cos\theta)$$

د) $$(y_1 - R)^2 + (z_2 - R)^2 = 4R^2$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان : $v_1(y_1 - R) + v_2(z_2 - R) = 0$

(۴) با مشتق‌گیری مجدد نسبت به زمان : $v_1^2 + v_2^2 + a_1(y_1 - R) + a_2(z_2 - R) = 0$

(۵) از قرار دادن معادلات (۱) و (۳) در معادله (۴) : $a_1\sin\theta + a_2\cos\theta + 2g(1-\cos\theta) = 0$

از معادله (۲) و (۵) :

$$a_1 = (3\cos\theta - 2)\,g\sin\theta \,,\quad a_2 = (3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\,g$$

از قسمت ب) :

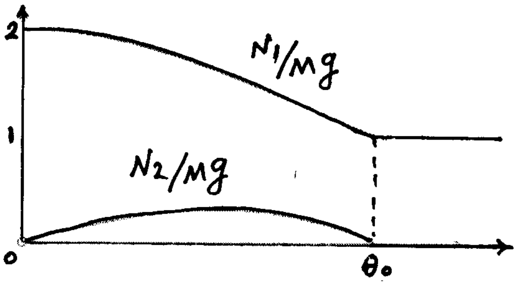
$$N_2 = Ma_1 \Rightarrow N_2(\theta) = Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$$

$$N_1 = Ma_2 + 2Mg \Rightarrow N_1(\theta) = Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)$$

ه) $N = Ma_1/\sin\theta$ ، $N = Mg(3\cos\theta - 2)$ ، به ازای $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ تماس دو استوانه قطع می‌شود.

$$N_1 = \begin{cases} Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) & \theta < \theta_0 \\ Mg & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2) & \theta < \theta_0 \\ 0 & \theta > \theta_0 \end{cases}$$



۹) ابتدا سرعت های v_1 , v_2 را به ازای $\theta=\theta_0$ بدست می آوریم

$$v_1^2\Big|_{\theta=\theta_0} = 4gR(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0 \Rightarrow v_1(\theta_0)=\sqrt{\frac{16}{27}gR}$$

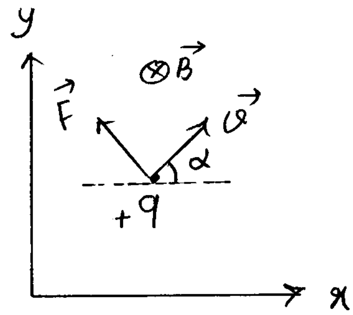
$$v_2 = -v_1\tan\theta \Rightarrow v_2(\theta_0) = -v_1(\theta_0)\tan\theta_0 = -\sqrt{\frac{20}{27}gR}$$

اگر v_{2f} سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه x-y باشد

$$v_{2f}^2 - v_2^2(\theta_0) = -2g\left(R - z_2(\theta_0)\right)$$

$$v_{2f}^2 = v_2^2(\theta_0) + 2g(2R\cos\theta_0) \Rightarrow v_{2f} = -\sqrt{\frac{92}{27}gR}$$

پس سرعت نهایی استوانه زیری $\sqrt{\frac{16}{27}gR}$ و سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه x-y ، $-\sqrt{\frac{92}{27}gR}$ است.



۳)

آ) $F = qvB$ و

$$F_x = -F\sin\alpha = -qBv\sin\alpha = -qBv_y$$

$$F_y = F\cos\alpha = qBv\cos\alpha = qBv_x$$

ب)

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_y$$

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x - g$$

ج)

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_x}{dt} - 0$$

با قرار دادن معادله اول قسمت ب) در معادله اخیر

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

اگر ω را به صورت $\omega = \frac{qB}{m}$ تعریف کنیم

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A\sin(\omega t + \phi)$$

$[\omega] = \frac{[qB]}{m}$ بُعد عکس زمان است، اما $F = qvB$

$$[qB] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

$$[\omega] = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$$

از معادله دوم قسمت ب)

$$v_x = g/\omega + A\cos(\omega t + \phi)$$

در $t=0$ سرعت اولیه ذره صفر است یعنی

$v_x(t=0)=0 \qquad A\cos\phi + g/\omega = 0$

$v_y(t=0)=0 \Rightarrow A\sin\phi = 0$

$\Rightarrow \phi = 0$ و $A = -g/\omega$

بنابراین

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega}(1-\cos\omega t) \quad \text{و} \quad v_y(t) = -\frac{g}{\omega}\sin\omega t$$

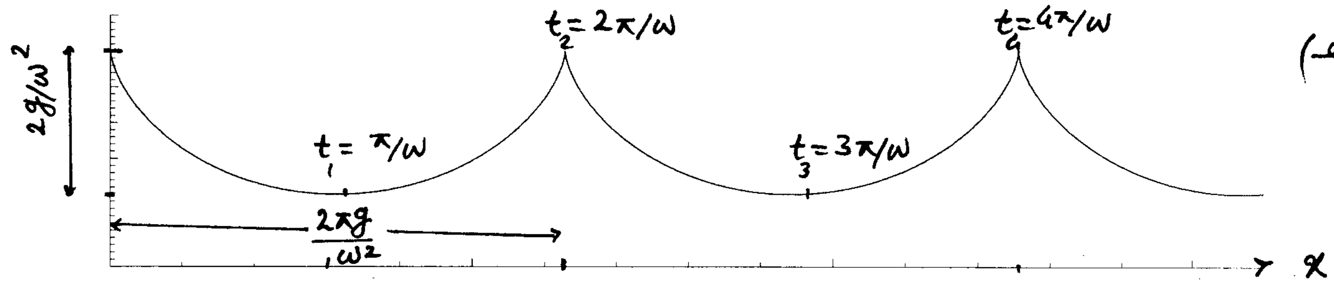
د)

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + x_0 \quad \text{و} \quad y(t) = \frac{g}{\omega^2}\cos\omega t + y_0$$

در $t=0$: $x(0)=0$ و $y(0)=h$ ، بنابراین $x_0=0$ و $y_0 = h - g/\omega^2$

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t \quad \text{و} \quad y(t) = h - \frac{g}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

ه)



و) داریم $\begin{cases} v_x = \frac{g}{\omega} + A\cos(\omega t+\phi) \\ v_y = A\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$ و در $t=0$ $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} \phi = 0 \\ A = v_0 - g/\omega \end{cases}$

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega} + \left(v_0 - \frac{g}{\omega}\right)\cos\omega t \;,\; v_y(t) = \left(v_0 - \frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t$$

داریم:

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t + x_0$$

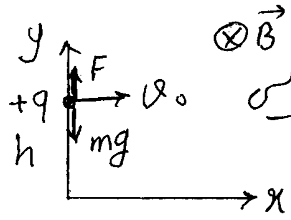
$$y(t) = -\left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\cos\omega t + y_0$$

و در $t=0$: $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=h \end{cases}$ و در نتیجه $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right) \end{cases}$

سرانجام

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t$$

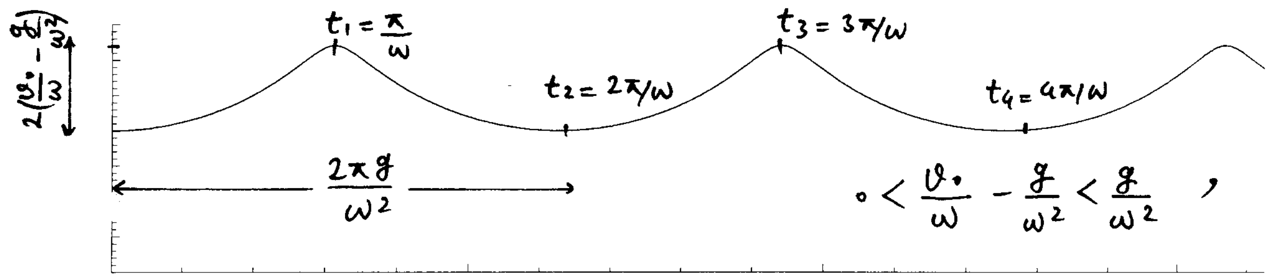
$$y(t) = h + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)(1 - \cos\omega t)$$



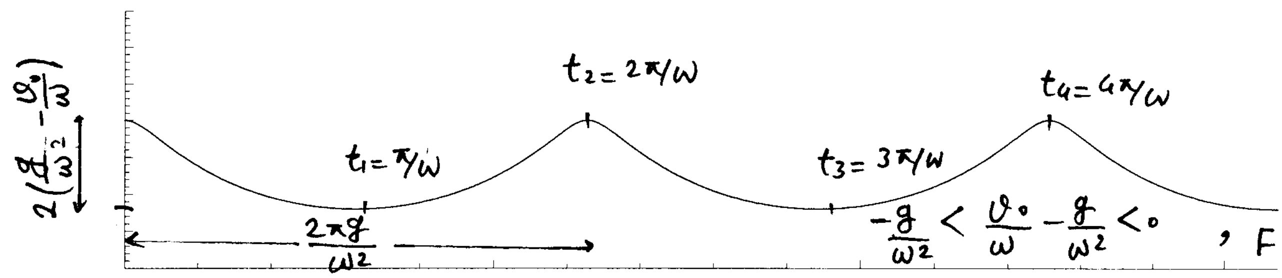
$\otimes \vec{B}$ نیروی مغناطیسی $F = qv_0B$

$\frac{g}{\omega} < v_0 < \frac{2g}{\omega} \Leftarrow F > mg$ و $v_0 < \frac{2g}{\omega}$

$0 < v_0 < \frac{g}{\omega} \Leftarrow F < mg$



$0 < \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2} < \frac{g}{\omega^2}$, $F > mg$



$-\frac{g}{\omega^2} < \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2} < 0$, $F < mg$

۱۴) ۳) اگر در وضعیت θ فشار گاز سمت راست و چپ به ترتیب P_1 و P_2 باشد

و در وضعیت $\theta=0$ فشار گاز در ظرف P_0 باشد، در دمای ثابت

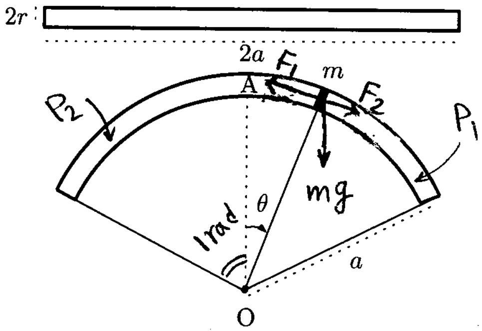
$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_2(\pi r^2)(1+\theta)a$$: قانون بویل برای گاز سمت چپ

$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_1(\pi r^2)(1-\theta)a$$: " " " راست

$$P_0(\pi r^2)(1)a = nRT$$ که

بنابراین

$$P_1 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1-\theta)}, \quad P_2 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1+\theta)}$$



$$F_1 = \pi r^2 P_1 = \frac{nRT}{a(1-\theta)}$$

$$F_2 = \pi r^2 P_2 = \frac{nRT}{a(1+\theta)}$$

نیروی کل عمود بر سطح استوانه

$$F = -\frac{2nRT}{a}\frac{\theta}{1-\theta^2} + mg\sin\theta$$

است.

ب) در حالت تعادل $F=0$ است و:

$$\sin\theta = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

که

$$K(\theta) = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

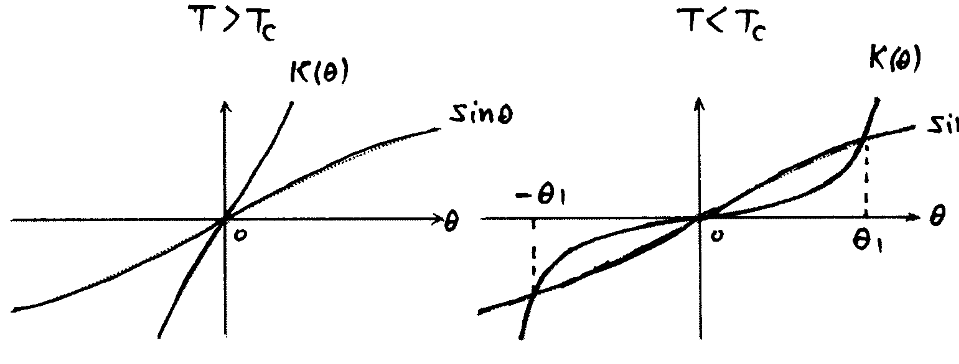
ج) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T>T_c$

د) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T<T_c$

$$\frac{dk(\theta)}{d\theta} = \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} > 0, \quad \left.\frac{dk(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{T}{T_c}, \quad \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 1$$

در حالت ج) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ بیشتر است و

در حالت د) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ کمتر است.



ه) در یک نقطه قطع می‌کند. $\theta_0=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\cos\theta - \left.\frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}\right|_{\theta_0=0} = mg - \frac{2nRT}{a} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

از آنجا که $T>T_c$ است پس $\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0}<0$ و $\theta_0=0$ تعادل پایدار است.

و) در سه نقطه قطع می‌کند $\theta_0=0$ و $\theta_0=\pm\theta_1$

$$F=0 \Rightarrow -mg\frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}+mg\sin\theta=0 \Rightarrow \frac{T}{T_c}=\sin\theta_0\frac{1-\theta_0^2}{\theta_0}$$

که $T<T_c$ است.

به ازای $\theta_0=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)>0$$

به ازای $\theta_0=\theta_1$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1} = mg\cos\theta_1 - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

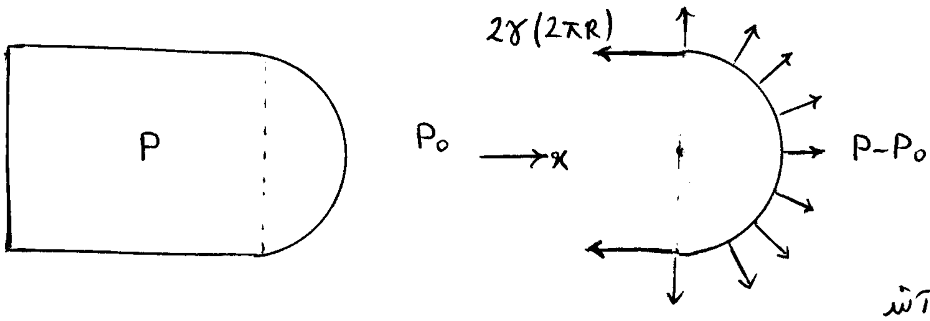
$$= mg\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\frac{1-\theta_1^2}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\cos\theta_1\left(1-\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}\right)$$

اما $-1\,\mathrm{rad}<\theta_1<1\,\mathrm{rad}$ بنابراین $\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}>1$ و $\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}>1$ پس

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1}<0$$

پس به ازای $T<T_c$ ، $\theta_0=0$ نقطه تعادل ناپایدار و $\theta_0=\pm\theta_1$ نقطه تعادل پایدار است.



۵) ۲) نیروی ناشی از فشار بر پوسته‌ی نیمکره‌ای شکل در هر نقطه عمود بر سطح نیمکره است. برآیند این نیروهای جزئی برابر است با برآیند تصویر این نیروی جزئی در جهت x، یعنی $(P-P_0)\pi R^2$.

در حالت تعادل: $(P-P_0)\pi R^2 = 2\gamma(2\pi R)$ ولذا $P = P_0 + \frac{4\gamma}{R}$

ب)

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$T = T_0 \frac{\left(P_0 + \frac{4\gamma}{R}\right)\left(\pi R^2 \times 4R + \frac{2}{3}\pi R^3\right)}{P_0 \left(\pi R^2 \times 4R\right)}$$

$$T = \frac{7}{6}\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 R}\right) T_0$$

ج)

$$2\gamma \Delta A = 2\gamma(2\pi R^2 - \pi R^2) = 2\gamma\pi R^2$$

د)

$$P_0 \Delta V = P_0 \frac{2}{3}\pi R^3$$

ه)

$$\Delta U = \frac{5}{2} n R \Delta T$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{P_0 V_0}{T_0}\right)(T - T_0)$$

$$\Delta U = 10\pi R^3 P_0 \left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0 R}\right)$$

و)

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W$$

$$Q = 10\pi R^3 P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0 R}\right) + 2\gamma\pi R^2 + \frac{2}{3} P_0 \pi R^3$$

$$Q = \frac{7}{3}\pi R^3 P_0 + \frac{146}{3}\pi R^2 \gamma$$

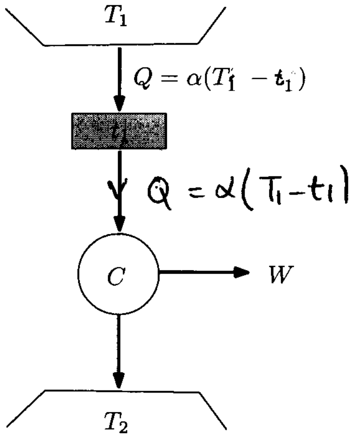
۴) آ) برای چرخه‌ی کارنو بازده

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{t_1}$$

است ، بنابراین

$$1 - \frac{T_2}{t_1} = \frac{W}{Q}$$

$$(۱) \quad W = \frac{t_1 - T_2}{t_1}\,\alpha\,(T_1 - t_1)$$



ب)

$$\frac{dW}{dt_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{t_1^2}\left(T_1 T_2 - t_1^2\right) = 0$$

$$t_1 = \sqrt{T_1 T_2} \quad , \quad W_{max} = W\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_2}} \Rightarrow W_{max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$$

ج)

$$Q_2 = Q - W$$

و از قسمت آ)

$$W = Q\,\frac{(t_1 - T_2)}{t_1}$$

$$\Downarrow$$

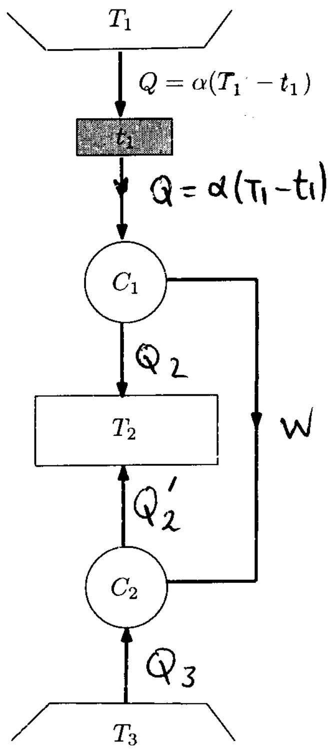
$$(۲) \quad Q_2 = \frac{T_2}{t_1}\,Q \Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)}{t_1}$$

برای یخچال کارنو

$$(۳) \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{Q_3}{Q'_2}$$

همچنین

$$(۴) \quad Q'_2 = Q_3 + W$$



از معادله (۱) ، (۳) و (۴) :

$$Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (t_1 - T_2)(T_1 - t_1)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

$$Q_2 + Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)(t_1 - T_3)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

د)

$$\frac{d(Q_2 + Q'_2)}{dt_1} = 0$$

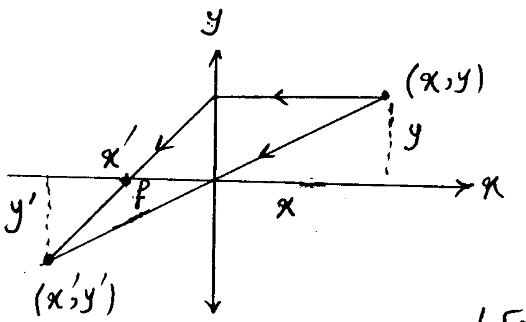
$$\frac{\alpha T_2 (T_1 T_3 - t_1^2)}{t_1^2 (T_2 - T_3)} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{T_1 T_3}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = (Q_2 + Q'_2)\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_3}}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = \frac{\alpha T_2}{T_2 - T_3}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2$$

۷)

۳)



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{-x'} = \frac{1}{f}$$

$$\Downarrow$$

$$(1) \qquad x' = -\frac{xf}{x-f}$$

با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویه (با نسبت طول جسم به طول تصویر)

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-x'}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} x'$$

با جایگذاری x' در آن

$$(2) \qquad y' = -\frac{yf}{x-f}$$

ب) به ازای $t<0$ ذره در مسیر Ad به سمت A نزدیک می‌شود

$$Ad: \quad \begin{cases} x = -vt + a \\ y = b \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = -\frac{(a-vt)f}{a-vt-f} \quad , \quad y' = -\frac{bf}{a-vt-f}$$

به ازای $0 < t < \frac{2b}{v}$ ذره در مسیر $A\,B$ به سمت B می‌رود

$$AB: \quad \begin{cases} x = a \\ y = b - vt \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = \frac{-af}{a-f} \quad , \quad y' = -\frac{(b-vt)f}{a-f}$$

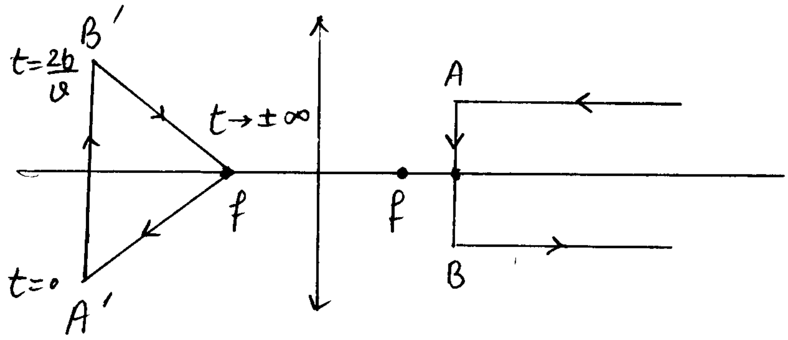
به ازای $t > \frac{2b}{v}$ در مسیر Bd از B دور می‌شود

$$Bd: \quad \begin{cases} x = a + v\left(t - \frac{2b}{v}\right) = a - 2b + vt \\ y = -b \end{cases}$$

پس از جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = -\frac{(a-2b+vt)f}{a-2b+vt-f} \quad , \quad y' = \frac{bf}{a-2b+vt-f}$$

ج)



$A' \left(x_{A'} = \dfrac{-af}{a-f} \quad , y_{A'} = \dfrac{-bf}{a-f} \right)$ به ازای $t=0$

$B' \left(x_{B'} = \dfrac{-af}{a-f} \quad , y_{B'} = \dfrac{bf}{a-f} \right)$ به ازای $t = \dfrac{2b}{v}$

$f \left(x_f = -f \quad , y_f = 0 \right)$ به ازای $t \to \pm\infty$

د) از معادلات (۱) و(۲) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$v'_x = \frac{v_x f^2}{(x-f)^2} \quad , \quad v'_y = \frac{(v_x y - v_y x) f + v_y f^2}{(x-f)^2}$$

به ازای $t<0$

$$v'_x = -\frac{vf^2}{(a-f-vt)^2} \quad , \quad v'_y = -\frac{bvf}{(a-f-vt)^2}$$

به ازای $0<t<\frac{2b}{v}$

$$v'_x = 0 \quad , \quad v'_y = \frac{vf}{a-f}$$

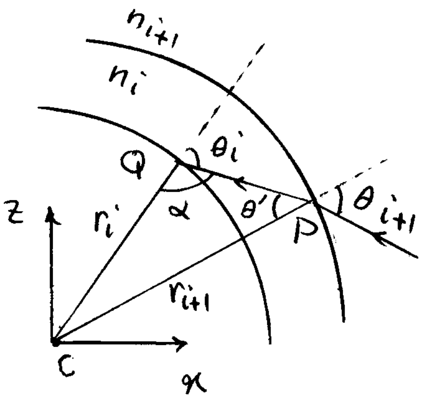
به ازای $t>\frac{2b}{v}$

$$v'_x = \frac{vf^2}{(a-2b+vt-f)^2} \quad , \quad v'_y = -\frac{bvf}{(a-2b+vt-f)^2}$$

$t' \to \pm\infty$

$$v'_x = 0 \quad , \quad v'_y = 0$$

۸)



آ) مبدأ مختصات را مرکز زمین می‌گیریم.

طبق قانون اسنل

(۱) $$n_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i \sin\theta'$$

از طرفی در مثلث QCP از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\alpha}{r_{i+1}}$$

اما $\theta_i+\alpha=\pi$، بنابراین $\sin\alpha=\sin\theta_i$ و

(۲) $$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\theta_i}{r_{i+1}}$$

از معادله‌ی (۱) و (۲):

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}\,\frac{r_i}{r_{i+1}}$$

ب) از قسمت قبل پیداست که $n_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i r_i \sin\theta_i$

با تکرار این رابطه برای هر دو لایه‌ی مجاور یا این که $n_i r_i \sin\theta_i =$ ثابت است

شدوی را بین بیرونی‌ترین لایه‌ی جو که برای آن $n_\infty = 1$ و زاویه‌ی ورود پرتو θ_∞ است و لایه‌ی مجاور سطح زمین که برای آن $n=n_0$ و زاویه‌ی پرتو با خط عمود (محور z) θ_0 است می‌نویسیم:

$$n_0 R \sin\theta_0 = n_\infty (h+R)\sin\theta_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\theta_\infty = n_0 \frac{R}{R+h}\sin\theta_0$$