آکادمی کنکور
دانشگاه تهرانی ها

آدرس:

تهران-میدان انقلاب- ابتدای خیابان آزادی

خیابان نوفلاح – جنب ایستگاه اتوبوس های انقلاب –

پلاک ٦٢

شماره تلفن :

۰۲۱-۶۶۱۲۵۵۲۴

۰۲۱-۶۶۱۲۵۴۴۸

کلاس کنکور

مشاوره

جزوه و کتاب

اولین

موسسه

کنکوری

کشور

با کادر

رتبه های

تک رقمی

و دو رقمی

برای رتبه برتر شدن باید از رتبه برتر ها یاری خواست

Daneshgahtehraniha.com

۱ بردارها

دانش‌آموزان گرامی، درود بر شما. در این بسته‌ی آموزشی برگزیده‌ای از مطالب فصل «بردارها» از کتاب هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی را برای شما درنظر گرفته‌ام. امیدوارم آن‌ها را با دقت دنبال کنید و چون همیشه، در راه آموختن کوشا باشید.

گیریم دو نقطه‌ی $A=(a_1,a_2,a_3)$ و $B=(b_1,b_2,b_3)$ داده شده‌اند و $C=(c_1,c_2,c_3)$ نقطه‌ای دلخواه است؛ در این‌صورت برای سه بردار $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$، $\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$ و $\overrightarrow{BC}=(c_1-b_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$، ویژگی‌های زیر را داریم:

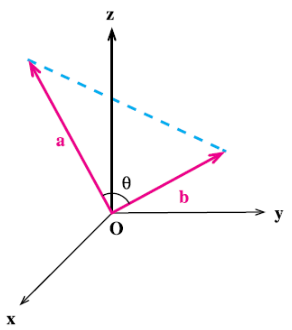
(ویژگی ۱ طول) $|\overrightarrow{AB}|=0 \Leftrightarrow A=B$؛

(ویژگی ۲ طول) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$؛

(ویژگی ۳ طول) $\overrightarrow{AB}\leq\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$. این ویژگی به **نابرابری مثلثی** معروف است.

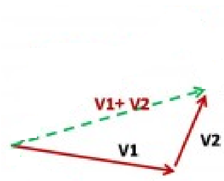
توجه. حالت برابری در ویژگی سوم فقط و فقط هنگامی رخ می‌دهد، که C روی امتداد خط گذرا از A و B قرار گیرد.

زاویه‌ی میان دو بردار ناصفر. زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را زاویه‌ای چون θ فرض می‌کنیم، به‌گونه‌ای که $\theta\in[0,\pi]$.

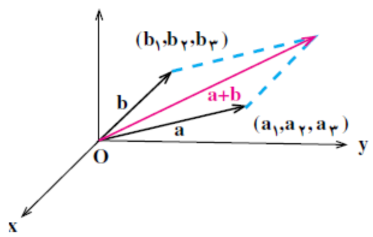


شکل ۱: زاویه‌ی بین دو بردار

تعبیر هندسی جمع دو بردار. برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، مجموع این دو بردار، یعنی $\vec{a}+\vec{b}$ برابر با برداری است که آن بردار، ضلع سوم مثلثی می‌باشد که این دو بردار ضلع‌های دیگر آن هستند؛ به‌گونه‌ای که ابتدای یکی از آن‌ها بر نوک (انتهای) دیگری قرار بگیرد (شکل۲). یا می‌توان قطر متوازی‌الاضلاعی درنظر گرفت که این دو بردار ضلع‌های آن (هر دو با نقطه‌ی آغاز مشترک) باشند(شکل۳).



شکل ۲: روش مثلث

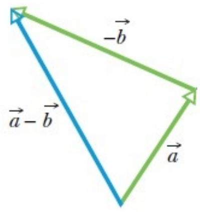


شکل ۳: روش متوازی‌الاضلاع

مثال ۱٫۱. طول ضلع سوم مثلثی که بردارهای $\vec{a}=(۰,۱,-۳\sqrt{۶})$ و $\vec{b}=(۴,-۱,\sqrt{۶})$، دو ضلع دیگر آن هستند را بیابید.

حل. $|\vec{a}+\vec{b}|=|(۰+۴,۱-۱,-۳\sqrt{۶}+\sqrt{۶})|=|(۴,۰,-۲\sqrt{۶})|=\sqrt{(۴)^۲+۰^۲+(-۲\sqrt{۶})^۲}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$

شبیه به حالت جمع دو بردار، **تفاضل** آن‌ها هم دارای تعبیر هندسی زیر است.



شکل ۴: تفاضل دو بردار

ضرب درونی دو بردار. گیریم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند، که θ زاویه‌ی بین آن‌هاست. ضرب درونی این دو بردار یک کمیت اسکالر (عددی) است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{a}.\vec{b}=|a||b|\cos\theta$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a||b|}$$

توجه (تعریف غیر وابسته به طول). ضرب درونی دو بردار دلخواه $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ را می‌توانیم به‌صورت

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

هم تعریف کنیم، که **مستقل از طول** بردارهاست و دیگر شرط ناصفر بودن‌شان را لازم ندارد.

تست۱. سه نقطه‌ی $A(۲,۱,۰)$، $B(۳,-۱,۲)$ و $C(-۱,۱,۳)$، رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

(سراسری ریاضی_۹۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

حل. $\overrightarrow{AB}=(۱,-۲,۲)$ و $\overrightarrow{AC}=(-۳,۰,۳)$، پس $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+۲^۲}=۳$ و $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-۳)^۲+۰+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$.
حال اگر θ را زاویه‌ی رأس A بگیریم خواهیم داشت $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{۱(-۳)+۰+۲(۳)}{۳(۳\sqrt{۲})}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

تست۲. اگر $\vec{a}=۲i+۳j+k$ و $\vec{b}=i-j+k$ آن‌گاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی_۸۱)

۱) $-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۲) $-\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$

حل. $\vec{a}-\vec{b}=(۱,۴,۰)$ پس خواهیم داشت: $\cos\theta=\frac{(\vec{a}-\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}||\vec{b}|}=\frac{۱-۴+۰}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۳}}=\frac{-۳}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۳}}=-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$. بنابر این گزینه‌ی (۱) درست است.

تعامد بردارها. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را برهم عمود می‌گوییم هرگاه داشته باشیم $\vec{a}.\vec{b}=۰$.

مثال ۱٫۲. اگر دو بردار $\vec{a}=(-۱,۲m-۳,۵)$ و $\vec{b}=(۴,-۲,۳)$ برهم عمود باشند، آن‌گاه m را بیابید.

حل. باید حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ برابر صفر شود، درنتیجه باید داشته باشیم:

$$-1(4)+(2m-3)(-2)+5(3)=0 \Rightarrow -4-4m+6+15=0 \Rightarrow 4m=17 \Rightarrow m=\frac{17}{4}$$

نکته‌ی ۱. چند ویژگی مهم ضرب درونی به‌شرح زیر است:

(۱) اگر $\vec{a}$ یک بردار باشد، آن‌گاه $\vec{a}.\vec{a}=|a|^2$؛

(۲) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$؛

(۳) $a.(b+c)=a.b+a.c$.

تست۳. دو بردار a و b با تصویرهای $(1,\alpha+1,2\alpha)$ و $(-1,0,2)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقادیر α بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود برهم‌اند؟
(سراسری ریاضی‌ـ۸۹)

۱) $-1,\frac{4}{10}$ ۲) $-1,\frac{6}{10}$ ۳) $1,\frac{4}{10}$ ۴) $1,\frac{6}{10}$

حل. بنابر نکته‌ی۱ اخیر می‌توانیم بنویسیم:

$$(a+b).(a-b)=0 \Leftrightarrow a.a-a.b+b.a-b.b=0 \Leftrightarrow a.a=b.b \Leftrightarrow |a|^2=|b|^2$$

اما $|a|^2=1+(\alpha+1)^2+(2\alpha)^2=5\alpha^2+2\alpha+2$ و $|b|^2=2^2+0+(-1)^2=5$ در نتیجه:

$$|a|^2=|b|^b \Leftrightarrow 5\alpha^2+2\alpha+2=5 \Leftrightarrow 5\alpha^2+2\alpha-3=0 \Leftrightarrow (5\alpha-3)(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow \alpha=-1,\frac{3}{5}(=\frac{6}{10})$$

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

نکته‌ی ۲. از نکته‌ی پیشین می‌توانیم نتیجه بگیریم که (چرا؟) $|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|a|^2+|b|^2\pm 2\vec{a}.\vec{b}$

تست۴. اگر $|a|=2\sqrt{6}$ و $|b|=5$ و $|\vec{a}.\vec{b}|=0$ اندازه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی‌ـ۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

حل. بنابر نکته‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|a|^2+|b|^2-2\vec{a}.\vec{b}$$

حال از جایگذاری داده‌های سؤال می‌بینیم که:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|a|^2+|b|^2-2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\sqrt{6})^2+5^2-2(0)=49 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|=7$$

پس گزینه‌ی (۴) درست است.

تصویر بردار ناصفر a روی امتداد بردار ناصفر b. گیریم a و b دو بردار ناصفر باشند. تصویر بردار a روی امتداد b، که آن را با $\acute{a}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\acute{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|b|^2}b$$

تست۵. تصویر قائم بردار $(0,-3,6)$ روی امتداد بردار $(2,-1,-2)$ کدام بردار است؟

(سراسری ریاضی‌ـ۸۲)

۱) $(2,-1,-2)$ ۲) $(-2,1,2)$ ۳) $(4,-2,-4)$ ۴) $(2,3,-1)$

حل. اگر فرض کنیم $\vec{a}=(0,-3,6)$ و $\vec{b}=(2,-1,-2)$، آن‌گاه بنابر فرمول داده شده خواهیم داشت:

$$\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|b|^2}b=\frac{0(2)+(-3)(-1)+6(-2)}{2^2+(-1)^2+(-2)^2}(2,-1,-2)=\frac{-9}{9}(2,-1,-2)=(-2,1,2)$$

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

ضرب خارجی دو بردار. گیریم $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی این دو بردار، که با نماد $\vec a \times \vec b$ آن را نشان می‌دهیم **برداری** است، که به‌صورت زیر آن را تعریف می‌کنیم:

$$\vec a \times \vec b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

از دید هندسی، حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$، برداری است که همواره بر هر دوی آن‌ها عمود است؛ یعنی همواره:

$$\vec a.(\vec a \times \vec b) = 0 \ , \ \ \vec b.(\vec a \times \vec b) = 0$$

مثال ۱٫۳. اگر $\vec a = (3, 1, -1)$ و $\vec b = (-1, 1, 2)$، آنگاه داریم:

$$\vec a \times \vec b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = (1 \times 2 - (-1) \times 1, -1 \times -1 - 3 \times 2, 3 \times 1 - 1 \times (-1)) = (3, -5, 4).$$

نکته‌ی۳. درباره‌ی ضرب خارجی بردارها چند مطلب شایان ذکر است:

(۱) در حالت کلی ویژگی جابه‌جایی ندارد (یعنی $\vec a \times \vec b \neq \vec b \times \vec a$)؛

(۲) شرکت‌پذیر نیست (یعنی نوشتن عبارت $\vec a \times \vec b \times \vec c$ بدون درج پرانتز، بی‌معناست)؛

(۳) $\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$؛

(۴) $\vec a \times \vec a = 0$؛

(۵) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

اندازه‌ی بردار حاصل‌ضرب خارجی. برای دو بردار ناصفر a و b، که θ زاویه‌ی بین آن‌هاست، طول بردار حاصل‌ضرب خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$| \vec a \times \vec b | = | a || b | \sin\theta.$$

تست۶. اگر $\vec a = i - 2j$ و $\vec b = 3j + 2k$ و $\vec c = 4i + j - 2k$ باشند. تصویر بردار $(a \times b) \times c$ روی محور x ها، کدام است؟

(سراسری ریاضی‌ـ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل. بنابر فرمولِ تعریف ضرب خارجی و با انجام محاسبات لازم خواهیم داشت: $\vec a \times \vec b = (1, -2, 0) \times (0, 3, 2) = (-4, -2, 3)$ با به‌کارگیری دوباره‌ی فرمول یادشده داریم: $(\vec a \times \vec b) \times c = (-4, -2, 3) \times (4, 1, -2) = (1, 4, 4)$؛ بنابر این گزینه‌ی (۱) درست است.

تست۷. زاویه‌ی بین دو بردار a و b کم‌تر از ۹۰ درجه است، اگر $|\vec a| = 6$، $|\vec b| = 5$ و $| a \times (a \times b) | = 18$، حاصل $| a.(a + b) |$ کدام است؟

(سراسری ریاضی‌ـ۸۵)

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

حل. بنابر بند (۵) و (۴) نکته‌ی ۳ داریم: $a \times (a + b) = a \times a + a \times b = 0 + a \times b = a \times b$. در ادامه می‌توانیم ببینیم که (با فرض این‌که زاویه‌ی میان بردارها برابر θ باشد):

$$| a \times b | = | a || b | \sin\theta = 6 \times 5 \times \sin\theta = 18 \Rightarrow \sin\theta = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

با توجه به اتحاد $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ می‌توانیم به‌دست آوریم که $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$ و چون بنابر فرض سؤال $\theta \leq 90^\circ$، پس باید $\cos\theta = \frac{4}{5}$. حال خواهیم داشت:

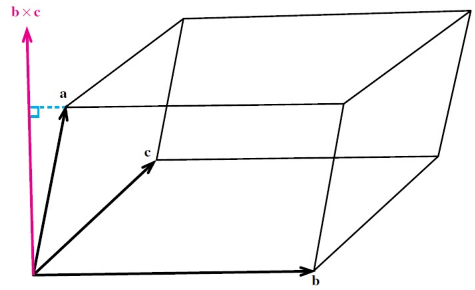
$$| a.(a + b) | = | a.a + a.b | = || \vec a |^2 + a.b | = | 6^2 + | a || b | \cos\theta | = | 36 + 6 \times 5 \times \frac{4}{5} | = 60$$

پس گزینه‌ی (۳) درست است.

مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار. مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ ساخته می‌شود، برابر است با $\frac{1}{2} | \vec a \times \vec b |$.

حجم متوازی‌السطوح. گیریم $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه باشند (هر سه در یک صفحه قرار نگیرند). حجم متوازی‌السطوحی که روی این بردارها ساخته می‌شود (شکل۵)، برابر است با قدرمطلق هر کدام از ضرب‌های دوگانه‌ی (مختلط) زیر:

$$|\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\ |=|\ \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})\ |=|\ \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})\ |$$



شکل ۵: متوازی‌السطوح

محک هم‌صفحه بودن سه بردار. هرگاه سه بردار هم‌صفحه باشند، بدیهی است که حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط آن‌ها، برابر صفر می‌شود.

مثال ۱،۴. سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$، $\vec{b}=(۱,-۱,۳)$ و $\vec{c}=(۱,۹,-۱۱)$ هم‌صفحه‌اند، زیرا $\vec{b}\times\vec{c}=(-۱۶,۱۴,۱۰)$ در نتیجه خواهیم داشت: $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۲(-۱۶)+۳(۱۴)+(-۱)(۱۰)=-۳۲+۴۲-۱۰=۰$.

(مثال ۷ صفحه‌ی ۳۲ کتاب درسی)

تست۸. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین <u>متفاوت</u> است؟

(سراسری ریاضی_۸۴)

۱) $a.(c\times b)$ ۲) $a.(b\times c)$ ۳) $b.(a\times c)$ ۴) $(a\times c).b$

حل. گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی۱) $c\times b=-b\times c\Rightarrow a.(c\times b)=a.(-b\times c)=-a.(b\times c)$

گزینه‌ی۲) بنابر گزینه‌ی (۱) روشن است.

گزینه‌ی۳) بنابر ویژگی جابه‌جایی ضرب درونی، حاصل عبارت این گزینه و گزینه‌ی (۴) باهم برابر است و داریم:

$$b.(a\times c)=b.(-c\times a)=-b.(c\times a)$$

حال بنابر فرمول حجم متوازی‌السطوح می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$-a.(b\times c)=-b.(c\times a)$$

در نتیجه عبارت گزینه‌های یکم، سوم و چهارم باهم برابر هستند و عبارت گزینه‌ی دوم متفاوت است. پس گزینه‌ی (۲) درست است.

* * *

خب! دانش‌آموزان گرامی به پایان گزیده‌ای از سراسر فصل «بردارها» رسیدیم. امیدوارم این گزیده‌ی نسبتا کوتاه برایتان سودمند باشد و بتوانید از آن، بهره‌ی لازم را ببرید و آمادگی بیش‌تری برای آزمون به‌دست آورید. با آرزوی بهروزی برای همه‌ی شما فرزندان ایران.

نوید مجیدی