Differential Geometry

هندسه دیفرانسیل

گرداورنده : محمدحسین باشوق

نویسنده : مهدی کریم نژاد

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۳ Month: ۱۱ Date: ۱۶

منابع: آشنایی با هندسه دیفرانسیل - آبراهام گوتشس
هندسه دیفرانسیل موضعی - اونیل
هندسه دیفرانسیل - لیپ شیتز
هندسه دیفرانسیل خم‌ها و رویه‌ها - دوکارمو

+ + + + + + +

خم‌ها
- T و N و B کنج فرنه
- انحنا و تاب T
- قضیه اساسی خم‌ها

رویه‌ها
- اولین فرم اساسی یا متریک رویه
- دومین فرم اساسی
- قضیه‌های اساسی رویه‌ها
- ژئودزیک‌ها (کوتاه‌ترین مسیر)
- قضیه گوس - بونه

+ + + + + + + +

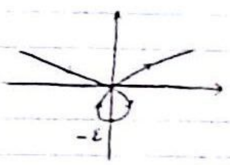
خم‌ها: $\underset{\text{بازه}}{I} \subseteq \mathbb{R}$ $n = ۲$ یا ۳

تعریف ــ هر تابع برداری پیوسته $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را یک خم در $\mathbb{R}^n$ گوییم. در حالتی که $n = ۲$ باشد آن را خم در صفحه و در صورتی که $n = ۳$ باشد آن را خم فضایی گوییم. با فرض مؤلفه‌ی سوم برابر صفر هر خم در صفحه یک خم در فضا هست.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

پیوسته بودن خم γ به مفهوم پیوستگی توابع x و y و z است.

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t^3 - 4t,\ t^2 - 4)$



هرگاه $\gamma(t)$ یک به یک باشد، آنرا خم پارامتری ساده می نامیم
تمام رسم های انجام گرفته برد $\gamma(t)$ است

شرط یک به یک بودن $\quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \rightarrow t_1 = t_2$

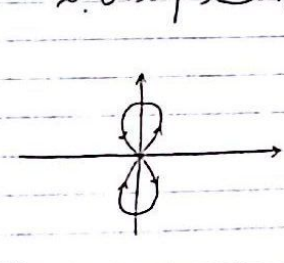
هرگاه $\gamma [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ خم پارامتری باشد $\gamma(a) = \gamma(b)$
خم را بسته گوییم بعلاوه $\gamma(a,b)$ خم ساده باشد - آنرا خم بسته‌ی ساده می نامیم

مثلاً $\quad \gamma(t) = (a\cos t,\ b\sin t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

بیضی است و خم ساده‌ی بسته

$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\sin 2t,\ \cos t)$

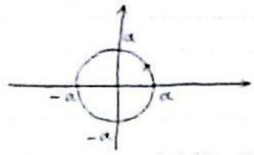


خم بسته‌ی غیر ساده (خودش را قطع کرده)

مثال ۱ $\quad \gamma_1(t) = (a\cos t,\ a\sin t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$I = [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

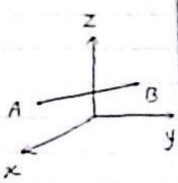
خم بسته‌ی ساده



مثال ۲ $\quad A$ ، B دو نقطه‌ی ثابت در فضا باشند.

$\gamma(t) = (1-t)A + tB \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$A(a_1, a_2, a_3)$
$B(b_1, b_2, b_3)$



$\gamma(t) = \big((1-t)a_1 + tb_1,\ (1-t)a_2 + tb_2,\ (1-t)a_3 + tb_3\big)$

مثال ۳ $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t^2, t^3)$

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow$
$(t_1^2, t_1^3) = (t_2^2, t_2^3)$
$\Rightarrow t_1 = t_2$
یک به یک است

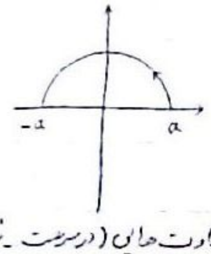
تعریف ــ هرگاه $C \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه ی نقاطی باشد که برد یک خم پارامتری است آن را خم در $\mathbb{R}^n$ گوییم که با آن خم پارامتری ، پارامتری (نمایش) شده است.

یک خم ممکن است به روش های مختلف پارامتری شود
مثلاً برد دو تابع پارامتری زیر یکسان است

$\gamma_1 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(t) = (a\cos t , a\sin t)$

$\gamma_2(t) = (-t , \sqrt{1-t^2})$ $\qquad \gamma_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$



نیم دایره

ولی هر پارامتری شدن تفاوت هایی (در سرعت ـ شتاب) دارد.

قرارداد ــ هرگاه $f(t)$ یک تابع دلخواه باشد که k بار مشتق پذیر است و $f^{k}(t)$ پیوسته باشد، می نویسیم $f \in C^k$ یا گوییم f از رده یا کلاس C^k است. (رده ی C^0 یعنی پیوستگی خود تابع)

C^∞ یعنی از هر مرتبه ای مشتق پذیر بودن ــ به طور خلاصه هموار بودن

$t|t|$ $\quad C^1$ هست و C^2 نیست
$t^k|t|$ $\quad C^k$ هست و C^{k+1} نیست

یا $\quad f(t) = t^{k+\frac{1}{2}} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
از رده ی C^k هست و C^{k+1} نیست

یک خم را از رده ی C^k گوییم هرگاه تک تک مؤلفه هایش از رده ی C^k باشد.

درصورتیکه $\gamma(t)$ از رده ی C^1 باشد.

$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

که خم پارامتری از رده ی C^1 است

$\gamma'(t)$ را تابع برداری سرعت یا سرعت سیر می گوییم و با $T(t)$ نشان می دهیم

درصورتیکه برای هر t ، $\gamma'(t) \neq 0$ یا $|\gamma'(t)| \neq 0$ باشد، خم پارامتری را منتظم یا عادی گوییم (regular)

برای خم پارامتری از رده‌ی C^2 تابع برداری شتاب عبارتست از

$$a(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \gamma''(t)$$

خم دایره از رده‌ی C^∞ است (مثال ۱) و منتظم است.

در مثال ۲ $\gamma'(t) = B - A \neq 0$

در مثال ۳ $\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \in C^\infty$

خم پارامتری که در یک لحظه مشتق آن صفر شود ـ دیگر منتظم نیست.

پارامتری سازی مجدد (بازپرمایش) ←

هرگاه $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک خم پارامتری باشد، تابع $\varphi : J \longrightarrow I$ که $J \subset \mathbb{R}$ یک بازه است، و φ وارون‌پذیر بوده و $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$ تابع

$$\gamma \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ترکیب توابع

را پارامتری سازی مجدد $\gamma(t)$ گوییم.

برد یک خم پارامتری و برد پارامتری سازی مجدد آن یکسان می‌باشد.

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t) \qquad \gamma : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2\pi] \qquad t \longrightarrow 2t$$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{t}{2} \qquad \varphi, \varphi^{-1} \in C^\infty$$

$$\gamma(\varphi(t)) = (a\cos 2t, a\sin 2t) \quad (0, \pi)$$

بازه نصف شده و سرعت دو برابر

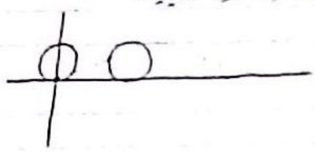
تمرین ۱: درصورتیکه خم پارامتری منتظم باشد هر پارامتری سازی مجدد آن نیز منتظم است.

۲ـ اگر $\gamma(t)$ یک خم پارامتری مشتق‌پذیر با اندازه‌ی ثابت باشد ($|\gamma(t)| =$ ثابت) آنگاه $\gamma'(t)$ در هر لحظه بر $\gamma(t)$ عمود است.

۳ـ برای تابع $y = f(x)$ اگر C نمودار آن در صفحه باشد ـ C را پارامتری کنید، این خم پارامتری ساده است؟

شرط از رده‌ی C^k بودن آن چیست؟ آیا با این شرایط خم منتظم است؟

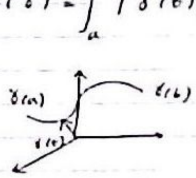
۲ـ فرض کنید دایره ای به شعاع a و نقطه ای ثابت مانند P روی آن در نظر بگیرید. این دایره روی خط راست از جهت بدون لغزش می چرخد. مسیر حرکت P یک منحنی است، آن را پارامتری نمایید.
(چرخ نما)



جلسه دوم ۹۳/۱۱/۲۴ * * * * *

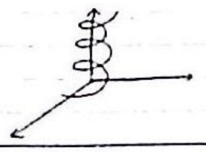
ـ طول یک خم پارامتری: هرگاه $\gamma(t)$ یک خم پارامتری از رده ی C^1 باشد، که $a \leq t \leq b$، طول آن از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$



مثال ـــــ $\gamma(t) = (\overset{x}{\overline{a\cos t}}, \overset{y}{\overline{a\sin t}}, \overset{z}{\overline{bt}}) \quad a, b > 0$

مارپیچ استوانه ای



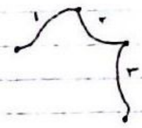
طول یک دور از این مارپیچ برابر است با ـــــ $\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt$

$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

نکته ـــــ اگر منحنی از قسمت هایی تشکیل شده باشد که آنها C^1 هستند. طول منحنی مجموع طول آنهاست. این گونه منحنی ها را قطعه ای C^1 می گویند.



$L_\gamma = l_1 + l_2 + l_3$

طول قوس یا پارامتر طبیعی
برای منحنی پارامتری $\gamma(t)$ که از رده ی C^1 است

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)|\, du}$$

s را پارامتر طبیعی یا پارامتر طول قوس می نامیم.

طول منحنی، حساب دیفرانسیل با توجه به پیوستگی $|\gamma'(t)|$ تابع s مشتق‌پذیر است.

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \geq 0$$

در صورتیکه γ هم منتظم پارامتری باشد ($|\gamma'(t)| > 0$).
بنابراین s تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین وارون‌پذیر هم هست و می‌توان t را تابعی از s فرض نمود $t = t(s)$

قرار می‌دهیم ← $\gamma(s) = \gamma(t(s))$
خم برحسب طول قوس پارامتری شده است.

اگر منحنی برحسب طول قوس پارامتری شده باشد، سرعت منحنی یکه است.

$$|\gamma'(s)| = \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \cdot \frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = 1$$

نکته ـ اگر $\gamma(t)$ خمی با اندازه‌ی سرعت ثابت ۱ باشد، آنگاه

$$s = \int_{t_0}^{t} \underbrace{|\gamma'(u)|}_{1} du = t - t_0 \to \underline{t = s + t_0}$$

یعنی t با اختلاف t_0 همان طول قوس s است.

مثال ← $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad t \geq 0$

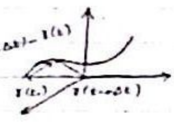
$$|\gamma'| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \gamma(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

* * * * *

[illegible] ←



$$\gamma'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t}$$

در منحنی منظم است.

بردار سرعت در هر لحظه بر مسیر مماس است.

برای منحنی با پارامتری منتظم $\gamma(t)$ قرار می‌دهیم.

$$\boxed{T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}} \; 1$$

T را بردار یکانی مماس

در صورتیکه s=t باشد آنگاه داریم $T(s) = \gamma'(s)$

طبق قضیه‌ی حساب دیفرانسیل با توجه به پیوستگی $|\gamma'(t)|$ تابع s مشتق‌پذیر است و

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \geq 0$$

درصورتیکه γ خم منتظم پارامتری باشد $|\gamma'(t)| > 0$

بنابراین s تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین وارون‌پذیر هم هست و می‌توان t را تابعی از s فرض نمود $t = t(s)$

قرار می‌دهیم ← $\gamma(s) = \gamma(t(s))$

خم برحسب طول قوس پارامتری شده است.

اگر منحنی برحسب طول قوس پارامتری شده باشد ـ معادله‌ی منحنی یکتا است.

$$|\gamma'(s)| = \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|\cdot\frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = 1$$

نکته ـ اگر $\gamma(t)$ خمی با اندازه‌ی سرعت ثابت 1 باشد. آنگاه

$$s = \int_{t_0}^{t} \underbrace{|\gamma'(u)|}_{1}\, du = t - t_0 \Rightarrow \underline{t = s + t_0}$$

یعنی t با اختلاف t_0 همان طول قوس s است.

مثال ← $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad t \geq 0$

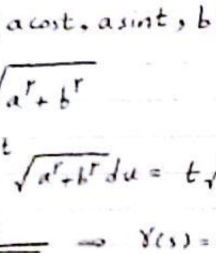
$$|\gamma'| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \gamma(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

* * * * *

کنج مرزی ←



$$\gamma'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t_0+\Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t}$$

در شکل دیگر است.

بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است.

برای منحنی با پارامتری منتظم $\gamma(t)$ قرار می‌دهیم.

$$\boxed{T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}} \; 1$$

T را بردار یکانی مماس

درصورتیکه t=s باشد آنگاه داریم $T(s) = \gamma'(s)$

مثال ← برای مارپیچ استوانه ای داریم ←

$$T(t) = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

مثال ← معادله ی پارامتری خط راست گذرنده از نقطه ی P و موازی بردار u در فضا

$$\gamma(t) = p + tu$$

دو بردار موازی یعنی مضربی از یکدیگر بودن

پس اگر u بردار یکه باشد، t همان پارامتر طول قوس است.

$$T(t) = \frac{u}{|u|}$$

اگر مسیر خط راست باشد ⟸ $\gamma''(t) = 0$ می باشد.

مثال ← $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$

$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$ $\quad |\gamma'(t)| = a$

$$s = \int_0^t a\,du = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}\right)$$

$\gamma''(s) = \left(\frac{-1}{a}\cos\frac{s}{a}, \frac{-1}{a}\sin\frac{s}{a}\right)$ $\quad |\gamma''(s)| = \frac{1}{a}$

نکته ← اگر بخواهیم ببینیم یک منحنی چقدر به راست بودن نزدیک است باید $\gamma''(t)$ را بررسی نماییم.

$$\underset{\text{صاف تر}}{0} \leftarrow \gamma''(t) \rightarrow \underset{\text{منحنی تر}}{\infty}$$

$\boxed{k(s) = |T'(s)|}$ ← خمیدگی یا انحنای منحنی

$$|T'(s)| = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{dt}\right|\cdot\frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = \left|\frac{T'(t)}{\gamma'(t)}\right|$$

مثال ← $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

$\gamma''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$

$|\gamma'| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad |\gamma''| = a$

$k(t) = \frac{a}{a^2+b^2}$ ثابت

مثال ← برای مارپیچ استوانه ای داریم ←

$$T(t)=\frac{(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

مثال ← معادله ی پارامتری خط راست گذرنده از نقطه ی P و موازی بردار u در فضا

$$\gamma(t)=P+tu$$

دو بردار موازی یعنی مضربی از یکدیگر بودن

پس اگر u برداریکه باشد، t همان پارامتر طول قوس است.

$$T(t)=\frac{u}{|u|}$$

اگر مسیر خط راست باشد $\Longleftrightarrow$ $\gamma''(t)=0$ می باشد.

مثال ← $\gamma(t)=(a\cos t,\ a\sin t)$

$$\gamma'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t) \qquad |\gamma'(t)|=a$$

$$s=\int_0^t a\,du=at \Rightarrow t=\frac{s}{a}$$

$$\gamma(s)=\left(a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a}\right)$$

$$\gamma''(s)=\left(\frac{-1}{a}\cos\frac{s}{a},\ \frac{-1}{a}\sin\frac{s}{a}\right) \qquad |\gamma''(s)|=\frac{1}{a}$$

نکته ← اگر بخواهیم ببینیم یک منحنی چقدر به راست بودن نزدیک است باید $\gamma''(t)$ را بررسی نماییم.

$$\bullet \longleftarrow \gamma''(t) \longrightarrow \blacksquare$$

صاف تر   منحنی تر

$\boxed{k(s)=|T'(s)|}$ ← خمیدگی یا انحنای منحنی

$$|T'(s)|=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right|=\left|\frac{dT}{dt}\right|\cdot\frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}=\left|\frac{T'(t)}{\gamma'(t)}\right|$$

مثال ← $\gamma(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$

$$\gamma''(t)=(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$|\gamma'|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad |\gamma''|=a$$

$$k(t)=\frac{a}{a^2+b^2}$$ ثابت

Subject: هندسه‌ی دیفرانسیل
Year: ۹۳ Month: ۱۱ Date: ۲۶

مثال ← $\gamma(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$

$x^2 + y^2 = e^{2t} = z^2$ منحنی مخروطی شکل

$\gamma'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$

$|\gamma'| = \sqrt{2e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = \sqrt{3}\, e^t$

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ 1)$

$\gamma''(t) = (e^t\cos t - 2e^t\sin t - e^t\cos t,\ e^t\sin t + 2e^t\cos t - e^t\sin t,$

$e^t) = (-2e^t\sin t,\ -2e^t\cos t,\ e^t)$

$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t,\ -\sin t + \cos t,\ 0)$

$|T'| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(-\sin t - \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\boxed{\kappa(t) = \frac{|T'|}{|\gamma'|}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$ تابع نزولی

KHATEREH

Subject: هندسه‌ی دیفرانسیل
Year: ۹۳ Month: ۱۱ Date: ۲۴

نکته ← اگر $\gamma(t)$ خمی با اندازه‌ی ثابت باشد، آنگاه داریم.

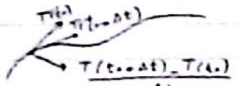
$|\gamma(t)| = a \rightarrow \gamma(t)\cdot\gamma(t) = a^2$

$\gamma'(t)\cdot\gamma(t) + \gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0 \Longrightarrow \gamma \perp \gamma'$

فرض کنید γ خم با پارامتری منتظم از رده‌ی C^2 باشد،

$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'|}$

T خم با پارامتری t است که اندازه‌ی ثابت ۱ دارد. پس $T \perp T'$



در صورتیکه $\kappa(t) \neq 0$ باشد

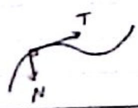
$\boxed{N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}} \longrightarrow$ (N) جهت آن همیشه در جهت خمیدگی منحنی است.

بردار قائم اصلی یا نرمال اصلی

$N(t)$ برای خط راست معنایی ندارد.

N برای طول قوس

$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$



$T'(s) = N(s)\cdot\kappa(s)$

KHATEREH

مثال ← $\gamma(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$

$x^2 + y^2 = e^{2t} = z^2$ منحنی مخروطی مارپیچی

$\gamma'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$

$|\gamma'| = \sqrt{2e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = \sqrt{3}\,e^t$

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ 1)$

$\gamma''(t) = (e^t\cos t - 2e^t\sin t - e^t\cos t,\ e^t\sin t + 2e^t\cos t - e^t\sin t,$

$e^t) = (-2e^t\sin t,\ -2e^t\cos t,\ e^t)$

$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t,\ -\sin t + \cos t,\ 0)$

$|T'| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(-\sin t - \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\boxed{k(t) = \frac{|T'|}{|\gamma'|}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}\,e^t} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$ تابع تحدبی

نکته ← اگر $\gamma(t)$ خمی با اندازه‌ی ثابت باشد، آنگاه داریم:

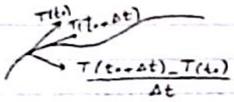
$|\gamma(t)| = a \rightarrow \gamma(t)\cdot\gamma(t) = a^2$

$\gamma'(t)\cdot\gamma(t) + \gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0 \Rightarrow \gamma \perp \gamma'$

فرض کنید γ خم با پارامتری منتظم از رده‌ی C^2 باشد،

$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'|}$

T خم با پارامتری t است که اندازه‌ی ثابت ۱ دارد. پس $T \perp T'$



در صورتیکه $k(t) \neq 0$ باشد

$\boxed{N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}}$ ⟶ (N) جهت آن همیشه در جهت خمیدگی منحنی است.

بردار قائم اصلی یا اول نام دارد

$N(t)$ برای خط راست معنایی ندارد.

N برای طول قوس

$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{T'(s)}{k(s)}$

$T'(s) = N(s)\cdot k(s)$

نکته ← اگر $\gamma(t)$ خمی با اندازه‌ی ثابت باشد، آنگاه داریم:

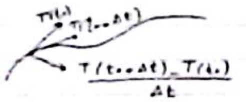
$$|\gamma(t)| = a \rightarrow \gamma(t).\gamma(t) = a^2$$

$$\gamma'(t).\gamma(t) + \gamma(t).\gamma'(t) = 0 \Rightarrow \gamma \perp \gamma'$$

فرض کنید γ خم پارامتری منتظم از رده‌ی C^2 باشد،

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'|}$$

T خم پارامتری است که اندازه‌ی ثابت 1 دارد. پس $T \perp T'$



در صورتیکه $\kappa(t) \neq 0$ باشد

$$\boxed{N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}} \longrightarrow$$ (N) جهت آن همیشه در جهت خمیدگی خم است.

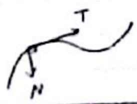
بردار قائم اصلی یا اول یکه

$N(t)$ برای خط راست معنایی ندارد.

N برای طول قوس

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

$$T'(s) = N(s).\kappa(s)$$



مثال ←

$$\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$$

$$x^2 + y^2 = e^{2t} = z^2$$ سهمی مربوط به ...

$$\gamma'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t)$$

$$|\gamma'| = \sqrt{2e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = \sqrt{3}e^t$$

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1)$$

$$\gamma''(t) = (e^t\cos t - 2e^t\sin t - e^t\cos t, e^t\sin t + 2e^t\cos t - e^t\sin t,$$
$$e^t) = (-2e^t\sin t, -2e^t\cos t, e^t)$$

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t, -\sin t + \cos t, 0)$$

$$|T'| = \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{(-\sin t - \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|T'|}{|\gamma'|}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$$ تابع نزولی

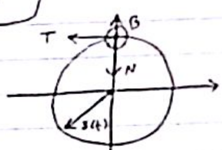
Subject: هندسه‌ی دیفرانسیل
Year: ۹۳ Month: ۱۱ Date: ۲۴

تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)}$$

بردار یکانی قائم دوم

مثال ← دایره



$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t)$

$T(t) = \frac{1}{a}(-a\sin t, a\cos t)$ $\qquad T'(t) = (-\cos t, -\sin$

$= \frac{-1}{a}\gamma(t)$

$N(t) = (-\cos t, -\sin t)$

$B(t) = T(t) \times N(t) \Longrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$

Subject: هندسه‌ی دیفرانسیل
Year: ۹۳ Month: ۱۲ Date: ۳

جلسه‌ی سوم

می‌دانیم: $B(s) = T(s) \times N(s)$ $\qquad T(s) = R'(s)$

$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$

صفحه‌ی شامل N و B صفحه‌ی قائم نام دارد که بردار نرمال آن T است. صفحه‌ی شامل T و N که بردار نرمال آن B است، صفحه‌ی اصلاحی نام دارد.

مثال ← برای دایره در $\mathbb{R}^2$ صفحه‌ی اصلاحی همان صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است. در واقع برای هر منحنی مسطح یعنی منحنی واقع در یک صفحه، صفحه‌ی اصلاحی همان صفحه‌ی شامل منحنی است.

تاب یک منحنی ← فرض کنید $\gamma(s)$ یک خم پارامتری معمولی از رده‌ی C^3 باشد که $k(s) \neq 0$

$B(s) = T(s) \times N(s)$

$B'(s) = \underbrace{T'(s) \times N(s)}_{} + T(s) \times N'(s)$

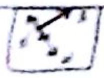
چون: $T' = kN$

$\Longrightarrow B' = T \times N' \Longrightarrow B' \perp T, \; B' \perp N'$

$\Longrightarrow$ $B'(s)$ در صفحه‌ی B و N قرار دارد. از طرفی $|B| = 1$

$|B| = |T||N|\sin 90^\circ = 1$

بنابراین B' و B عمود است. پس B' موازی N است.



تابع $\tau(s)$ را تاب منحنی می‌نامیم

$$\boxed{B'(s) = -\tau(s)\, N(s)}$$

مثلاً

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ b)$$

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a},\ 0\right)$$

$$T(s) = \left(-\sin\frac{s}{a},\ \cos\frac{s}{a}\right) \qquad \kappa(s) = \frac{1}{a}$$

$$N(s) = \left(-\cos\frac{s}{a},\ -\sin\frac{s}{a}\right)$$

$$B(s) = (0, 0, 1) \qquad B'(s) = 0 \longrightarrow \tau(s) = 0$$ ← تاب

یعنی منحنی از صفحه‌ی اصلاحی (شامل منحنی) خارج نگردیده است.

تمرین ① ـ برای $\gamma(t)$ انحنا و تاب از فرمول های زیر بدست می‌آید

انحنا $\kappa(t) = \dfrac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$

تاب $\tau(t) = \dfrac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$

② یک منحنی مانند $\gamma(t)$ در یک صفحه قرار دارد (مسطح است.) اگر و تنها اگر

$\tau = 0$ در همه جای منحنی

مثال ←

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

$$\gamma' = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b) \qquad T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$|T'| = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \gamma'' = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$\gamma''' = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)$$

$$|\gamma' \times \gamma''| = a\sqrt{a^2+b^2}$$

انحنا
$$\kappa(t) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma''' = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2) \cdot$$

$$(a\sin t,\ -a\cos t,\ 0) = (a^2b\sin^2 t + a^2b\cos^2 b) = a^2b$$

Subject: هندسه‌ی دیفرانسیل
Year: ٩٣ Month: ١٢ Date: ٣

تمرین ۳ـ برای $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ خمیدگی و تاب را بیابید.

* * * * * *

ـ قضیه اساسی نظریه‌ی خم ـ هر خم با تاب و خمیدگی اش شناسایی می‌شود

هر خمی که سرعت تاب به انحنای آنها عددی ثابت اند، مارپیچ هستند.

ـ اگر $k(s)>0$ و $\tau(s)$ دو تابع پیوسته باشند، خم با پارامتری مستقیم $\gamma(s)$ وجود دارد که انحنا و تاب آن به ترتیب k و τ است. هر خم دیگری این انحنا و تاب را داشته باشد با انتقال و دوران دادن بر $\gamma(s)$ منطبق می‌شود.

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

فرمولهای فرنه

ـ قضیه وجود جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad A = [a_{ij}(t)]$$

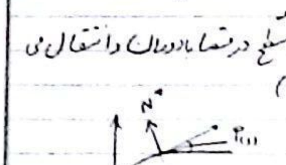
درصورتیکه درایه‌های A توابعی پیوسته باشند، دستگاه معادلات خطی $y' = A\vec{y}$

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n$$

$$\vdots$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n$$

حالت خاص منحنی های مسطح ـ هر خمی مسطح در فضا با دوران و انتقال می توان در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ قرار داد. $(\tau = 0)$



$N^*(s)$ بردار عمود بر $T(s)$ با ۹۰ درجه دوران عکس عقربه های ساعت است.

$$T(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)$$

$$T'(s) = (-\varphi'(s)\sin\varphi(s), \varphi'(s)\cos\varphi(s))$$

$$\to \varphi'(s)(\underbrace{-\sin\varphi(s)}_{\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi(s))}, \underbrace{\cos\varphi(s)}_{\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi(s))}) = \varphi'(s)\, N^*(s)$$

چون T و T' عمود است پس $T'(s) = k^*(s)N^*(s)$

$k^*(s)$ را انحنای علامت دار منحنی می نامیم $\quad |k^*(s)| = k(s)$

$$\varphi'(s) = k^*(s) \to \varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k^*(t)\,dt$$

$$T(s) = \left(\cos\left(\int_{s_0}^{s} k(t)\,dt\right), \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(t)\,dt\right)\right)$$

$$\gamma(s) = \left(\int \cos\left(\int_{s_0}^{s} k(t)\,dt\right), \int \sin\left(\int_{s_0}^{s} k(t)\,dt\right)\right) + \vec{C_0}$$

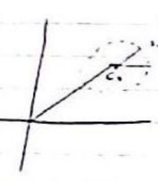
– اگر انحنای علامت‌دار را به ما بدهند ما می‌توانیم منحنی را بیابیم (اگر منحنی در صفحه باشد)

مثال ← $k(s) = \frac{1}{a} > 0$, $\tau = 0$

$$\gamma(s) = \left(\int \cos\underbrace{\left(\int_{s_0}^{s} \frac{1}{a}\,dt\right)}_{\frac{s-s_0}{a}} ds , \int \sin\underbrace{\left(\int_{s_0}^{s} \frac{1}{a}\,dt\right)}_{\frac{s-s_0}{a}} ds\right) + C_0$$

$$= \left(a\sin\left(\frac{s}{a} - \frac{s_0}{a}\right), -a\cos\left(\frac{s}{a} - \frac{s_0}{a}\right)\right) + C_0$$

– اگر $\frac{\pi}{2} + \frac{s_0}{a}$ دوران دهیم تبدیل به دایره می‌شود.



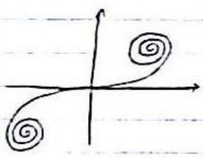
– مثال ← $k(s) = s > 0$ $\tau = 0$

$$\gamma(s) = \left(\int \cos\left(\int_0^s t\,dt\right) ds, \int \sin\left(\int_0^s t\,dt\right) ds\right) + C_0$$

بردار ثابت

$$= \int \cos \frac{s^2}{2}\, ds , \int \sin \frac{s^2}{2}\, ds$$

تابع اولیه ندارند ← به روش‌های تقریبی می‌توان آن را رسم نمود.



* * * * *

جلسه‌ی چهارم — هندسه‌ی دیفرانسیل — ۹۳/۱۲/۱۰

معادله‌ی ذاتی یک منحنی ← معادله‌هایی که انحنا و تاب یک منحنی را به طور صریح یا ضمنی مشخص می‌کنند، معادلات ذاتی منحنی هستند.

$k = k(s)$
$\tau = \tau(s)$

$\left.\begin{array}{l} k = \frac{1}{a} \\ \tau = 0 \end{array}\right\}$ ← معادله‌ی ذاتی یک دایره

$\left.\begin{array}{l} k = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau = \frac{b}{a^2+b^2} \end{array}\right\}$ ⇒ معادله‌ی ذاتی خم مارپیچ استوانه‌ای

$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

* مارپیچ تعمیم یافته ← هر منحنی که بردار مماس با راستای ثابتی (بردار ثابت) زاویه‌ی ثابت بسازد را (مارپیچ تعمیم یافته) نامیده می‌شود.

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

هر لحظه با محور z ها زاویه‌ی ثابتی می‌سازد

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \qquad |\gamma'| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma'\cdot(0,0,1)}{|\gamma'||(0,0,1)|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- تمرین ← مارپیچ تعمیم یافته $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$

- گزاره ← یک منحنی هموار با انحنای $k(s) > 0$ و تاب $\tau(s)$ مارپیچ تعمیم یافته است، اگر و تنها اگر $\frac{\tau}{k}$ عددی ثابت باشد.

اثبات ← فرض کنید $\gamma(s)$ مارپیچ تعمیم یافته باشد که با بردار یکه‌ی $\vec{a}$ زاویه‌ی ثابت θ می‌سازد.

$$T(s)\cdot a = |T||a|\cos\theta_0 = \cos\theta_0$$

مشتق می‌گیریم

$$T'(s)\cdot a + T\cdot\cancel{a'} = 0$$

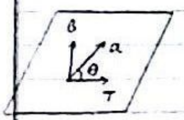
$$\Rightarrow k(s)\cdot N(s)\cdot a = 0 \Rightarrow N\cdot a = 0 \qquad N\perp a$$

مشتق می‌گیریم

$$N'\cdot a = 0 \Rightarrow (-kT + \tau B)\cdot a = 0$$

$$-k(T\cdot a) + \tau(B\cdot a) = 0$$

با توجه به رابطه‌ی * a در صفحه‌ی شامل T و B است.



$$a = (T\cdot a)T + (B\cdot a)B$$

$$a = c_1 T + c_2 B$$

$$a\cdot T = c_1 \underbrace{T\cdot T}_{1} + c_2 B\cdot T \Rightarrow c_1 = a\cdot T$$

$$a\cdot B = c_1 T\cdot B + c_2 \underbrace{B\cdot B}_{1} \Rightarrow c_2 = a\cdot B$$

$$B\cdot a = \sin\theta_0$$

$$-k\cos\theta_0 + \tau\sin\theta_0 = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \cot\theta_0$$ ثابت

برعکس فرض کنید $\frac{\tau}{k} = c$ عدد ثابتی باشد

ثابت

بردار b به صورت روبه‌رو را در نظر می‌گیریم $b(s) = cT + B$

$$\frac{db}{ds} = c\frac{dT}{ds} + \frac{dB}{ds} = \frac{\tau}{k}(kN) + (-\tau N) = 0$$

پس b برداری ثابت است و

ثابت $T\cdot b = T\cdot(cT+B) = cT\cdot T + T\cdot B = c$

پس T با بردار ثابت B زاویه‌ی ثابت می‌سازند - یعنی منحنی مارپیچ است.

تمرین ② ← تحت چه شرطی روی اعداد a و b منحنی

$$\gamma(t) = (at, bt^2, t^3)$$

مارپیچ تعمیم یافته است؟

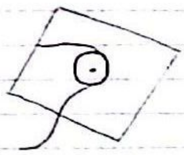
تمرین ③ ← هر منحنی که روی کره‌ای به شعاع a به مرکز مبدأ قرار گرفته باشد که k و τ همواره مخالف صفر است

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\right)^2 = a^2$$

تمرین ④ ← منحنی از رده‌ی C^4 مارپیچ تعمیم یافته است، اگر و تنها اگر $\gamma'' \times \gamma''' \cdot \gamma^{(4)} = 0$

دایره‌ای که

برای منحنی هموار منتظم از رده‌ی حداقل C^2 در هر نقطه که $k(s) > 0$ باشد
دایره‌ای که به آن منحنی مماس است و انحنای آن k است
مرکز این دایره در منحنی اصلاحی (منحنی بوسان) است، این دایره
را دایره‌ی بوسان می‌نامند.



$\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ شعاع انحنا

$O = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$

مرکز دایره‌ی بوسان

مثال ← معادله‌ی دایره‌ی بوسان برای مارپیچ استوانه

$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ در نقطه‌ی $t=0$

$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ $|\gamma'| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$T'(0)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a,0,0) \Rightarrow N(0)=(-1,0,0)$$

$$k=\frac{a}{a^2+b^2}$$

مرکز دایره بوسان

$$O(t)=\gamma(0)+\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)(-1,0,0)$$

$$=\left(a-\frac{a^2+b^2}{a},0,0\right)=\left(-\frac{b^2}{a},0,0\right)$$

$$B(0)=T(0)\times N(0)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(0,a,b)\times(-1,0,0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(aj+bk)\times -i=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(0,-b,a)$$

معادله‌ی دایره‌ی بوسان

$$\begin{cases}\left(x+\frac{b^2}{a}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2 & \text{کره‌ی بوسان}\\ 0(x-a)-b(y-0)+a(z-0)=0 & \text{صفحه‌ی بوسان (اصلاحی)}\end{cases}$$

تمرین ۵ ← اگر $f(x)=y$ تابعی از رده‌ی C^2 باشد، برای یک منحنی انحنای تابع در یک نقطه، مرکز دایره و معادله‌ی دایره بوسان را بنویسید

$\gamma(t)=(t,f(t),0)$

تم‌ها (توپولوژی جبری)

در یک بادکنک تو در تو اگر درون باشد ← داخل
بیرون باشد ← خارج

قضیه‌ی خم جردن

(هندسه جبری) برای $n>3$ جواب صحیح برای a و b و c نیست

$a^n+b^n=c^n$ قضیه‌ی فرما

نواحی در فضا و صفحه (توپولوژی فضا)

فرض کنید $a\in\mathbb{R}^n$ ، $\delta>0$ عددی ثابت باشد مجموعه‌ی زیر

$$B_\delta(a)=N_\delta(a)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\vec{x}-\vec{a}|<\delta\}$$

گوی باز، همسایگی باز از a به شعاع δ نامیده می‌شود

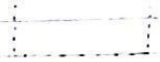
برای زیرمجموعه‌ی $A\subseteq\mathbb{R}^n$ نقطه‌ی $a\in A$ داخل است هرگاه یک همسایگی از a وجود داشته باشد که کاملاً در زیرمجموعه A باشد

$$\exists\delta>0\quad N_\delta(a)\subseteq A$$

نقطه‌ی مرزی مجموعه‌ای است که همسایگی‌اش دارای نقاط خارج و نقاط داخل باشد.

مجموعه‌ی A باز نامیده می‌شود، هرگاه هر نقطه اش درونی باشد

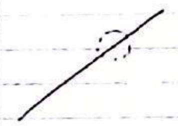
مثلاً



← مجموعه‌ی باز ← مستطیل بدون محیط

حتی اگر یک نقطه هم از محیط وجود داشته باشد. دیگر مجموعه باز نیست

مثلاً یک خط راست باز نیست



باز

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ باز

ϕ باز

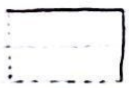
انتفاع مقدّم

مجموعه A بسته است هرگاه A^c باز باشد

متمم

$\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ بسته

$\phi \subseteq \mathbb{R}^2$ بسته



نه باز و نه بسته

$\{(r,s) \mid \underbrace{r,s \in \mathbb{Q}}_{\text{گویا}}\} = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ [باز نیست / بسته نیست

$\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ باز نیست

← همسایگی در اینجا کروی می باشد.

$\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^2$ — $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}^3$

باز است — بسته است

یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ همبند (راهی) نام دارد، هرگاه هر دو نقطه از آن قابل وصل با یک مسیر در آن مجموعه باشد.

خط راست همبند است

ناهم

همبند

بسمه تعالی

مجموعه کراندار ← $A \subseteq \mathbb{R}^n$
را کراندار گوییم هرگاه

$\exists M \geq 0 \quad \forall a \in A \quad |a| \leq M$

یعنی عدد $M \geq 0$ موجود باشد که فاصله هر نقطه $a \in A$ از مبدأ کمتر از M باشد.

$A \subseteq B_M(0)$

ϕ ← کراندار و $\mathbb{R}^n$ بی‌کران است.

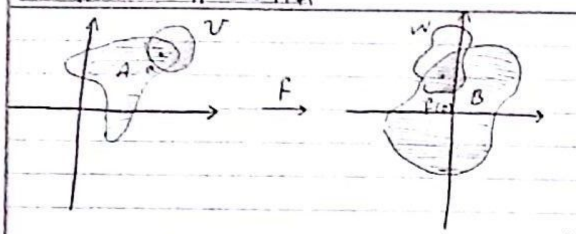
هر گوی باز یا بسته کران‌دار است.

نقاط داخل یک مستطیل (باز و بسته) کران‌دار است.

پیوستگی: اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ($m, n = 3$ یا 2) و $f: A \to B$ یک تابع باشد و $a \in A$. تابع f را در a پیوسته گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $W \subseteq \mathbb{R}^m$ شامل $f(a)$، باز $V \subseteq \mathbb{R}^n$ شامل a موجود باشد که

$f(V \cap A) \subseteq B \cap W$

یعنی ←



برای مثال.
هر تابع ثابت پیوسته است. (در هر نقطه پیوسته باشد.)

$f(\vec{x}) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

f پیوسته است ⟺ توابع $f_1, \ldots, f_m$ پیوسته باشد.

هرگاه $f: A \to B$ وارون‌پذیر باشد (دوسویی) و f و وارونش هردو پیوسته باشند، تابع f را همئومورفیسم یا همسانی گویند

مثال ← فرض کنید A و B دو بردار ثابت در فضا (ناموازی)؛ P_0 نقطه‌ای ثابت در فضا باشد.

$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$r(u, v) = P_0 + u\vec{A} + v\vec{B}$ برد r صفحه شامل P_0 و شامل بردارهای A و B گذرنده از P_0

r هر گوی به شعاع δ شامل نقطه (u, v) در صفحه را به گوی به شعاع δ شامل $r(u, v)$ در فضا می‌برد

$$r(B_\delta(u, v)) \subseteq S \cap B_\delta(r(u, v))$$

r پیوسته است.

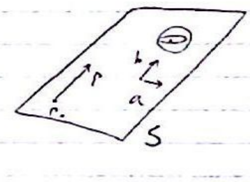
به صورت مؤلفه‌ای

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$
$$b = (b_1, b_2, b_3)$$
$$p = (x_0, y_0, z_0)$$

$$r(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v, y_0 + a_2 u + b_2 v, z_0 + a_3 u + b_3 v)$$

نکته ← در تعریف پیوستگی می‌توان به جای مجموعه‌های باز از گوی‌ها باز استفاده کرد.

$$r^{-1}: S \to \mathbb{R}^2$$



$$p_0p = ua + vb$$

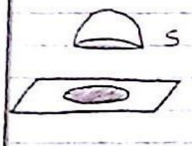
چون p_0p در صفحه S است پس اعداد u و v وجود دارند که

بردار p_0p را می‌توان برحسب a و b نوشت.

پس r^{-1} نیز پیوسته است پس $r: \mathbb{R}^2 \to S$ همئومورفیسم است.

مثال ← فرض کنید $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

و $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$
نیم کره بسته ی ...



می‌خواهیم یک تابع از D^2 به S تعریف کنیم

$$f: D^2 \to S$$

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

پیوسته است، تک تک مؤلفه‌ها پیوسته

$$f^{-1}: S \to D^2$$

$$(x, y, z) \to (x, y)$$

پس f همئومورفیسم است.

نکته ← هر همئومورفیسم هر مجموعه باز، بسته، بسته و کراندار، همبند ...
تحت یک همئومورفیسم به ترتیب باز، بسته، بسته و کراندار، همبند ...
است.

نکته ← تصویر هر مجموعه‌ی کراندار ← کراندار نیست. مثال

$(0,1) \to (1,\infty)$

$x \to \frac{1}{x}$

\+ + + + +

رویه‌ها

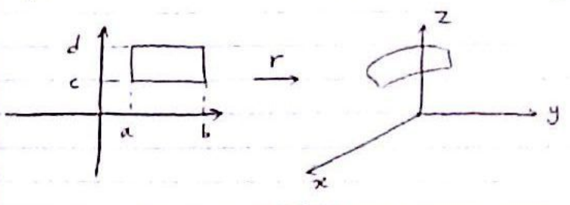
پارچه‌ی ساده ← هر زیرمجموعه از فضا ($\mathbb{R}^3$) که تصویر (برد) یک تابع پیوسته و یک‌به‌یک با دامنه‌ی یک مستطیل بسته باشد یا پارچه‌ی ساده نامیده می‌شود.

$r:[a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

r یک پارامتری‌سازی پارچه‌ی ساده داده شده است.

در واقع ثابت می‌شود که در این حالت r به روی بردش همئومورفیسم است



همئومورفیسم یعنی تغییر شکل به صورتیکه شرایط تغییر نکند

چون $\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^2$ متفاوت است! چون اگر یک نقطه از $\mathbb{R}$ برداریم ناهمبند می‌شود ولی $\mathbb{R}^2$ همچنان همبند است.

نکته ← به جای تعریف مستطیل بسته در تعریف پارچه‌ی ساده می‌توان هر مجموعه‌ی کراندار بسته همئومورف با مستطیل بسته را در نظر گرفت (مثل دیسک بسته - مثلث بسته ....) یعنی هر شکلی در صفحه که از کشیدن یا فشردن مستطیل بدون ایجاد پارگی یا حفره در آن به دست می‌آید.

مثال ← تابع‌های روی مستطیل پارچه‌ی ساده است

مجموعه‌ی کراندار بسته ← فشرده compact

مجموعه‌ی همبند ← چند تکه نباشد - هر نقطه‌اش را به وسیله‌ی یک منحنی به هم وصل کرد

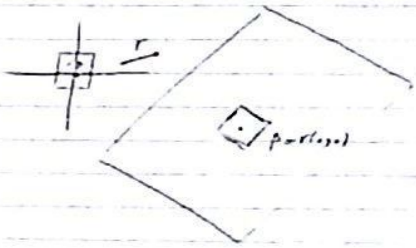
تعریف رویه یا سطح ـــ یک رویه مانند S در فضا شامل نقاطی است که هر نقطه از آن در داخل و نه مرزی یک پارچه‌ی ساده است.

مثال ـــ صفحه دلخواه در فضا یک رویه است.

$\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار ناموازی در صفحه باشند و P_0 نقطه دلخواهی در این صفحه باشد برای هر مستطیل

$$\underbrace{r:[-1,1]\times[-1,1]}_{\text{دامنه پارچه ساده}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$



مثال ـــ هر کره به شعاع a به نقطه مرکز O یک رویه است. مثلاً

$$\{P\in\mathbb{R}^3 \mid |P-O|=a\}$$

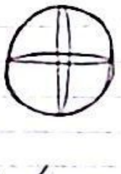
$$S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

KHATEREH

ـــ هر نیمکره یک پارچه‌ی ساده است.

 ـــ اگر هر نقطه روی X روی یک پارچه‌ی ساده باشد ـ X ـ رویه است

S^2 را می‌توان با ۶ نیمکره‌ی بسته پوشاند که این نیمکره‌ها پارچه‌های ساده‌اند

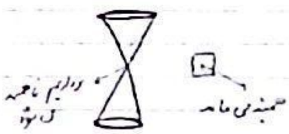


نیمکره پشتی $\quad r(u,v)=(-\sqrt{1-u^2-v^2},\ u,\ v)$

نیمکره جلویی $\quad r(u,v)=(\sqrt{1-u^2-v^2},\ u,\ v)$

ـ مکعب مستطیل رویه است.

ـ مخروط رویه نیست.



KHATEREH

مرور مفاهیم باز و بسته

نواحی در $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3,\dots)$

$$B_\delta(p) = N_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < \delta\}$$

گوی باز در $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

$p \in A$ $\quad \exists \delta > 0 \quad B_\delta(p) \subseteq A$

درونی است

A باز است: هرگاه هر نقطه اش درونی باشد.

$B \subseteq \mathbb{R}^n$

بسته است

هرگاه $\mathbb{R}^n - B$ باز باشد.

ϕ باز و بسته $\leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ باز و بسته

خط راست در فضا باز نیست.

خط راست در فضا بسته است.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad |x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \varepsilon$$

$x \in B_\delta(p)$ $\quad f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$

$$f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $B \subseteq \mathbb{R}^m$ که $m,n = 2$ یا 3،
$f : A \rightarrow B$ یک تابع باشد.

تابع f در A را پیوسته گوییم. هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(B_\delta(a) \cap A) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \cap B$$

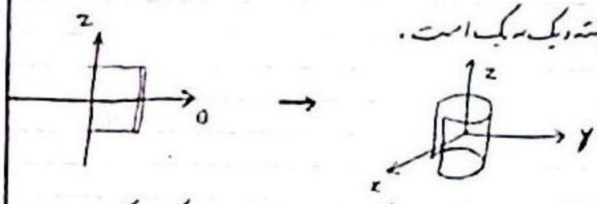
اگر f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند آن را همسانی گوییم.

تابعی که وارون و خودش پیوسته باشد. همئومورفیسم یا همسانی گوییم.

هر نیم کره ی بسته خود یک پارچه ی ساده است

مثال ← $r: [0, \frac{3\pi}{2}] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$r(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$



- پیوسته و یک به یک است.

- چسبیدن دو نقطه‌ای از یک پارچه ساده در فضا یک به یک بودن را به هم می‌زند

مفهوم همئومورفیسم همان قابل تاب را نشان دادن پارچه ساده در فضا است.

نکته ← اگر $r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک پارچه‌ی ساده تعریف کند.

$r^{-1}: \underbrace{r(R)}_{\mathbb{R}^3} \to R$ پیوسته است بنابراین $r: R \to r(R)$ همئومورفیسم است.

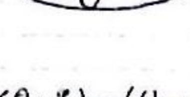
تعریف رویه ← $S \subset \mathbb{R}^3$ یک رویه است هرگاه هر نقطه اش داخل یک پارچه‌ی ساده باشد

$r(u, v) = p + ua + vb$

هر صفحه موازی از بردارهای a و b (که $a \nparallel b$) گذرنده از نقطه p یک رویه است

هر کره را با شش پارچه ساده (نیم کره) می‌توان پوشش داد.

استوانه یک رویه است



- چنبره رویه است.

با ۲ پارچه ساده می‌توان آن را پوشاند.

$r(\theta, \varphi) = ((b + a\cos\varphi)\cos\theta, (b + a\cos\varphi)\sin\theta, a\sin\varphi)$

1) $0 \leq \theta < \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$

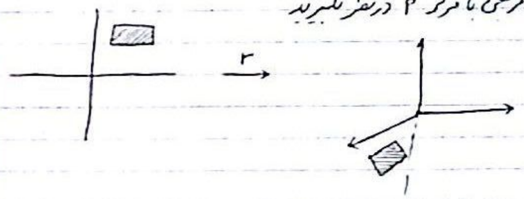
Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۳-۹۴ Month: ۱ Date: ۱۶

۲)  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ $\quad -\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

صفحه $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}^3$ یک رویه است

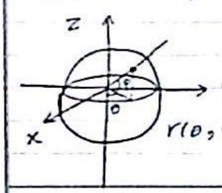
$r(x,y) = (x,y,0)$

برای هر p مربعی با مرکز p در نظر بگیرید



هر نقطه بجز مبدأ

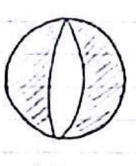
به همین ترتیب هر نقطه روی کره به شعاع a با مختصات کروی قابل بیان است.



$r(\theta,\varphi) = (a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi)$

مختصات کروی

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۱ Date: ۱۶

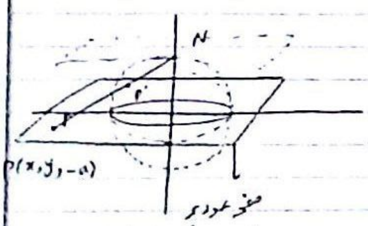


$r : [0, \frac{3\pi}{2}] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$

پیوسته است و یک به یک

با دوران ۹۰ درجه حول محور x ها و دوران ۱۸۰ حول محور y جدید

پس کره را با توجه به مختصات کروی می توان با دو پارچه ساده پوشاند



تصاویر استریوگرافی ←

$N(0,0,a)$

صفحه عمود بر محور z ها در نقطه $(0,0,-a)$ در نظر می گیریم

خط حاصل NP کره را در نقطه p' قطع می کند.

برعکس هر نقطه از کره به مختصات p' را اگر به N وصل کنیم صفحه را در یک نقطه p قطع خواهد کرد

می توان این کار را به جای قطب شمال برای قطب جنوب هم انجام داد.

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۱ Date: ۱۶

تمرین ← ضابطه‌ی تابع

$r:$ صفحه $\longrightarrow$ کره

$P(x, y, -a) \longrightarrow P'(x, y, z)$

* * * * *

۹۴/۱/۲۳ هندسه دیفرانسیل

نکته: $u^1, u^2, \ldots$ این اعداد بالای u اندیس هستند.

$(u^1)^2, (u^2)^2$ توان‌ها به صورت پرانتز نوشته می‌شوند.

قرارداد جمع بندی انیشتین ← اگر در یک عبارت ریاضی (جبری) یک اندیس بالا و همان اندیس پایین ظاهر شده باشد، آن اندیس، اندیس جمع بندی است. به شرطی که دامنه‌ی اندیس مشخص باشد.

مثلاً $\sum_{i=1}^{n} a_i b^i$ را با $a_i b^i$ نمایش می‌دهیم.

$$a_{ij} b^{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b^{kj} = a_{i1} b^{k1} + a_{i2} b^{k2}$$

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۱ Date: ۲۳

$a_{ij} b^{jk} c_{kr}$ j و k اندیس‌های جمع بندی هستند.

دلتای کرونکر $\delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

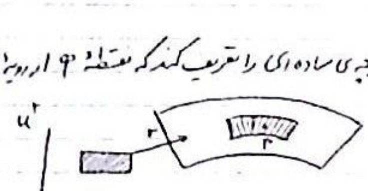
$\delta^{ij} = \delta_{ij}$

نکته مهم ← $\delta_i^i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^i = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ بار}} = n$

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^{k} \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} = 0$$

ـ اون اندیس جمع بندی است.

هرگاه $r(u^1, u^2)$ پاره‌ی ساده‌ای را تعریف کند که نقطه‌ی P از رویه S داخل آن است.



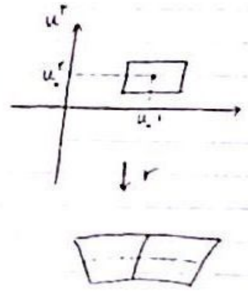
$r(u_0^1, u_0^2) = P$

ـ مختصات خمیده یا گاوسی P می‌نامیم.

اگر $\gamma(t)$ یک منحنی روی رویه باشد، که داخل پارچه‌ی ساده است معادله‌ای به شکل زیر خواهد داشت.

$$\gamma(t) = r(u^1(t), u^2(t))$$

$a \leq t \leq b$



$\gamma(u^2) = r(u^1_0, u^2)$ منحنی

$\alpha(u^1) = r(u^1, u^2_0)$ منحنی

در این حالت α را u^1-خم و γ را u^2-خم می‌نامیم.

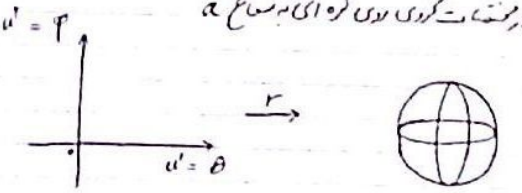
مثال ← صفحه‌ی xy با معادله‌ی پارامتری $r(\underset{u^1}{\underset{\downarrow}{x}}, \underset{u^2}{\underset{\downarrow}{y}}) = (x, y, 0)$

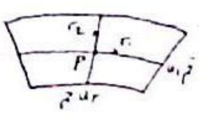
u^1-خم‌ها همان خطوط موازی محور x ها و u^2-خم‌ها همان خطوط موازی محور y هاست.

در کره - θ ثابت باشد - یک نصف‌النهار داریم u^2-خم

در کره - φ ثابت باشد - یک مدار داریم u^1-خم

مثال ← در مختصات کروی روی کره‌ای به شعاع a





$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial y}{\partial u^1}, \frac{\partial z}{\partial u^1}\right) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial y}{\partial u^2}, \frac{\partial z}{\partial u^2}\right)$$

درصورتیکه r_1 و r_2 موجود و پیوسته باشند گوییم رویه‌ی پارامتری $r(u^1,u^2)$ از رده‌ی C^1 است. بعلاوه اگر r_1 و r_2 در نقطه‌ی P مخالف صفر باشند (P را نقطه‌ی پارامتری منتظم) گوییم.

اگر هر نقطه از رویه‌ی پارامتری منتظم باشد - رویه‌ی منتظم است.

رویه‌ی پارامتری از رده‌ی C^k باشد $r(u^1,u^2)$ یعنی مؤلفه‌های r نسبت

مشتقات جزئی تا مرتبه‌ی k را داشته و همگی آنها پیوسته اند.

مثال ← صفحه‌ی $r(u^1,u^2) = p_0 + u^1 a + u^2 b$ در صورتیکه a,b دو بردار که ناموازی هستند که از رده‌ی C^∞ اند.

$\vec{r}_1 = \vec{a} \qquad \vec{r}_2 = \vec{b}$

مشتقات بعدی همگی صفراند

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$

پس همه نقاط منتظم هستند.

صفحه‌ی xy در مختصات قطبی

از رده‌ی C^∞ است. $r(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \vec{r}_2 = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (0, 0, r)$

در مبدأ مختصات داریم $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$

← پس مبدأ در مختصات قطبی یک نقطه‌ی منفرد است.

ـ اولین فرم اساسی یا متریک رویه ← فرض کنید $r = r(u^1, u^2)$ یک رویه‌ی پارامتری از رده‌ی C^k باشد $(k \geq 1)$

خم $\gamma(t) = r(u^1(t), u^2(t))$ که $a \leq t \leq b$ را در نظر بگیرید

$$\gamma'(t) = \frac{\partial r}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial t} = r_1\frac{\partial u^1}{\partial t} + r_2\frac{\partial u^2}{\partial t}$$

$$= \vec{r}_i \frac{\partial u^i}{\partial t}$$

$$|\gamma'|^2 = \gamma'\cdot\gamma' = \overbrace{r_1\cdot r_1}^{g_{11}}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + \overbrace{r_1\cdot r_2}^{g_{12}}\frac{du^1}{dt}\cdot\frac{du^2}{dt}$$

$$+ \underbrace{r_2\cdot r_1}_{g_{21}}\frac{du^2}{dt}\cdot\frac{du^1}{dt} + \underbrace{r_2\cdot r_2}_{g_{22}}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2$$

قرارداد ← $g_{ji} = g_{ij} = \vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$

$$|\gamma'|^2 = g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}$$

$$\text{طول } \gamma = \int_a^b |\gamma'|\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\ dt$$

$ds^2 = g_{ij}\,du^i du^j$

ـ ds^2 را متریک یا اولین فرم اساسی رویه می‌نامیم.

مثال ← برای کره به شعاع a و مرکز مبدأ در مختصات کروی

$$r(\theta,\varphi) = (a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi)$$

$$r_1 = (-a\cos\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$r_2 = (-a\sin\varphi\cos\theta,\ -a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi)$$

$$g_{11} = r_1\cdot r_1 = a^2\cos^2\varphi \qquad g_{12} = g_{21} = r_1\cdot r_2 = 0$$

$$g_{22} = r_2\cdot r_2 = a^2$$

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi\,(d\theta)^2 + a^2(d\varphi)^2$$

تمرین ← متریک چنبره - استوانه - کره در مختصات استریوگرافی

مثال ←

$$r(u^1,u^2) = P_0 + u^1\vec{a} + u^2\vec{b}$$

$$r_1 = \frac{dr}{du^1} = \vec{a} \qquad r_2 = \frac{dr}{du^2} = b$$

$$g_{11} = \vec{r_1}\cdot\vec{r_1} = 1 \qquad g_{21} = g_{12} = \vec{r_1}\cdot\vec{r_2} = ab$$

$$g_{22} = \vec{r_2}\cdot\vec{r_2} = 1$$

پس $ds^2 = 1(du^1)^2 + ab(du^1)(du^2) + 1(du^2)^2$

مثلاً برای صفحه‌ی xy که $r(u^1,u^2) = (u^1,u^2,0)$ داریم

$$\underbrace{ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2}_{\text{متریک صفحه در مختصات دکارتی}} \longleftrightarrow a\cdot b = 0$$

برای صفحه‌ی xy در مختصات قطبی

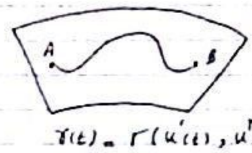
$$\vec{r} = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$$
$$\vec{r_1} = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) \qquad \vec{r_2} = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$$

$$g_{11} = \vec{r_1}\cdot\vec{r_1} = 1 \qquad g_{12} = g_{21} = \vec{r_1}\cdot\vec{r_2} = 0 \qquad g_{22} = \vec{r_2}\cdot\vec{r_2} = r^2$$

متریک $\underbrace{ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2}_{\text{متریک صفحه در مختصات قطبی}}$

مرور جلسه قبل – $r(u^1, u^2)$

متریک یا اولین فرم اساسی $ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j$



$\gamma(t) = r(u^1(t), u^2(t)) \quad a \le t \le b$

طول $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{g_{ij}\, du^i du^j}_{ds^2}}\; dt$

$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\, du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2$

$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \qquad r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1} \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$

در واقع برای هر رویه پارامتری $r = r(u^1, u^2)$ که هم

$\gamma(t) = r(u^1(t), u^2(t))$

$|\gamma'(t)|^2 = ds^2$ روی آن است.

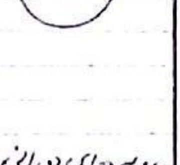
مثال – اولین فرم اساسی کره به شعاع a در مختصات کروی

$ds^2 = a^2\cos^2\varphi\,(d\theta)^2 + a^2(d\varphi)^2$

$\theta = t$ طول مدار $\varphi = \varphi_0$

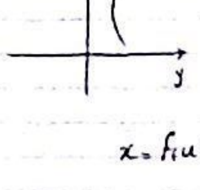
$\gamma(t) = (a\cos\varphi_0 \cos t,\ a\cos\varphi_0 \sin t,\ a\sin\varphi_0)$

طول مدار $= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi_0 (\underbrace{\tfrac{d\theta}{dt}}_{1})^2 + a^2(\underbrace{\tfrac{d\varphi_0}{dt}}_{0})^2}\; dt$

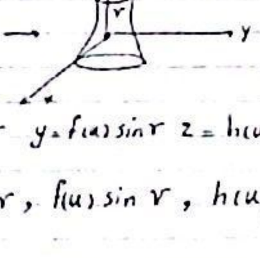


$\int_0^{2\pi} a\cos\varphi_0\, dt = \underbrace{2\pi a\cos\varphi_0}_{\text{مدار ساده روی کره}}$

– رویه های دورانی یا دوار



$\begin{cases} y = f(u) \\ z = h(u) \end{cases}$



$x = f(u)\cos v \quad y = f(u)\sin v \quad z = h(u)$

$r(u, v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ h(u))$

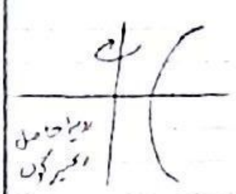
Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۱ Date: ۳۰

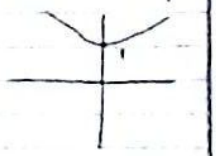
اگر به جای y و z همان $a\cos\varphi$ و $a\sin\varphi$ بگذاریم یک نیم‌دایره تولید شده و بعد از دوران همان معادله کره خواهد شد.

★مثال ← کره ـ چنبره ـ استوانه ـ مخروط رویه‌های دوار هستند.

مثال ← $y = a\cosh\frac{z}{a}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$





ـ تمرین ← متریک زنجیرگون را به‌دست آورید.

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۱ Date: ۳۰

فرض کنید $r = r(u^1, u^2)$ یک پارچه ساده از رده C^1 باشد

$$u^1 = u^1(v^1, v^2)$$
$$u^2 = u^2(v^1, v^2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v^1} = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial u^1}}_{r_1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial u^2}}_{r_2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial v} = r_i \frac{du^i}{dv^1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v^2} = \frac{\partial r}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + \frac{\partial r}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial v^2} = r_j \frac{du^j}{dv^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v^1} \times \frac{\partial r}{\partial v^2} = \left(r_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + r_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \right) \times \left(r_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + r_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \right)$$

$$= \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial v^2}\, \vec{r_1} \times \vec{r_2} + \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial v^2}\, \vec{r_2} \times \vec{r_1}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{vmatrix}}_{\text{ژاکوبین}} \vec{r_1} \times \vec{r_2} = A$$

← اگر $A \neq 0$ باشد نقطه منفردی در مختصات منحنی الخط جدید به‌دست نمی‌آید

صفحهٔ xy دکارتی $r(x,y)=(x,y,0)$

قطبی $r(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

$r_1=(1,0,0)$ $\quad r_2(0,1,0)$ $\quad r_1\times r_2\neq 0$

$r_1=(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $\quad r_2=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$r_1\times r_2=(0,0,r)\longrightarrow$ مبدأ نقطهٔ منفرد

$J=r$
ژاکوبی تبدیل قطبی

$r_1\times r_2$ عمود بر رویه است.

$PP_0\times n=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot r_1\times r_2=0$

معادلهٔ صفحهٔ مماس

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0 \\ & r_1 & \\ & r_2 & \end{vmatrix}=0$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس در نقطهٔ P_0

مثال ← برای کره $r=(a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, a\sin\varphi)$

$P_0\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \theta=\varphi=\frac{\pi}{4}$

$r_1=(-a\sin\varphi\cos\theta, -a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\varphi)$

$r_2=(-a\cos\varphi\sin\theta, a\cos\varphi\cos\theta, 0)$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{a}{2} & y-\frac{a}{2} & z-\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-a}{2} & \frac{-a}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix}=0$$

برای هر (u^1,u^2)، $r=r(u^1,u^2)$ نقطهٔ پارامتری منتظم است هرگاه $r_1\times r_2\neq 0$

یا $|r_1\times r_2|^2\neq 0$

$|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|^2=(r_1\times r_2)\cdot(r_1\times r_2)=$

$$\begin{vmatrix} r_1\cdot r_1 & r_1\cdot r_2 \\ r_2\cdot r_1 & r_2\cdot r_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

این دترمینان را با g نمایش داده و متریک یا اولین فرم اساسی می‌نامند

اگر دترمینان ماتریس $\neq 0$ باشد، آن وارون پذیر است.

ماتریس در نقاط پارامتری منتظم ماتریس $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ وارون پذیر است و وارون آن را با $\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & g_{21} \\ g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}$$

$$g = \frac{g_{11}}{g_{22}}$$

مثال - برای صفحه دکارتی $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

صفحه قطبی $ds^2 = (dr^2) + r^2 (d\theta)^2$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \rightarrow [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

کره در مختصات کروی

$$ds^2 = a^2 (d\varphi)^2 + a^2 \cos^2\varphi \, (d\theta)^2$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\varphi \end{bmatrix} \rightarrow [g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\cos^2\varphi} \end{bmatrix}$$

دومین فرم اساسی

- بردار یکه رویه برای مشخص کردن طول رویه

$$m = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$$

رویه پارامتری $r = r(u^1, u^2)$ منتظم

$$dr = r_1 du^1 + r_2 du^2 = r_i du^i$$

$$dm = \frac{\partial m}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial m}{\partial u^2} du^2 = m_j du^j$$

$\mathrm{II} = -dr \cdot dm$ ← دومین فرم اساسی رویه

پس

$$\mathrm{II} = -(r_i du^i) \cdot (m_j du^j) =$$

$$-r_i \cdot m_j \, du^i du^j$$

$b_{ij} = -r_i \cdot m_j$ قرار می‌دهیم

$$\mathrm{II} = b_{ij} \, du^i du^j$$

$r(u_1, u_2) = r$

$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j \qquad g_{ij} = r_i \times r_j$

تذکر

$r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i} \qquad m = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$

- دومین فرم اساسی (میزان دور شدن از صفحه مماس)

$\mathrm{II} = -dr \cdot dm = b_{ij}\, du^i du^j$

$b_{ij} = -r_i \cdot m_j$

می‌دانیم که $\vec{r}_i \cdot \vec{m} = 0$

از طرفین نسبت به u^j مشتق بگیریم داریم

$\frac{\partial r_i}{\partial u^j} \cdot m + r_i \cdot \frac{\partial m}{\partial u^j}$

$b_{ij} = -r_i \cdot m_j = r_{ij} \cdot m$

اگر r رویه‌ی پارامتری از رده‌ی C^2 باشد که ۲×۲ آنگاه

$r_{ij} = r_{ji} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

مثال — برای صفحه‌ی دکارتی

$r(x, y) = (x, y, 0)$

$r_1 = (1, 0, 0) \qquad r_2 = (0, 1, 0) \qquad r_1 \times r_2 = m = (0, 0, 1)$

$dm = 0$

$\mathrm{II} = -dr \cdot dm = 0$

صفحه xy بدون مبدأ در مختصات قطبی

$r_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$r_1 \times r_2 = m = (0, 0, \frac{r}{r})$

$r_2 = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$dm = 0$

$\mathrm{II} = -dr \cdot dm = 0$

- تمرین — دومین فرم اساسی کره، چنبره، رویه‌ی دوار را بیابید.

ماتریس b_{ij} متقارن است و دترمینان آن را دترمینان دومین فرم اساسی گفته و با b نمایش می‌دهیم:

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

مثال ـ کره ای به شعاع a

$$r(\varphi,\theta) = (a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi)$$

$$r_1 = (-a\sin\varphi\cos\theta,\ -a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi)$$

$$r_2 = (-a\cos\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$r_1 \times r_2 = (-a^2\cos^2\varphi\cos\theta,\ -a^2\cos^2\varphi\sin\theta,\ -a^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$|r_1 \times r_2| = a^2\cos\varphi$$

$$m = (-\cos\varphi\cos\theta,\ -\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi)$$

$$r_{12} = r_{21} = (a\sin\varphi\sin\theta,\ -a\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$r_{11} = (-a\cos\varphi\cos\theta,\ -a\cos\varphi\sin\theta,\ -a\sin\varphi)$$

$$b_{11} = \vec{r}_{11}\cdot\vec{m} = a\cos^2\varphi\cos^2\theta + a\cos^2\varphi\sin^2\theta + a\sin^2\varphi = a$$

$$b_{12} = b_{21} = r_{12}\cdot m = r_{21}\cdot m = -a\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + a\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

$$b_{22} = r_{22}\cdot m = a\cos^2\varphi\cos^2\theta + a\cos^2\varphi\sin^2\theta = a\cos^2\varphi$$

$$\mathrm{II} = a(d\varphi)^2 + a\cos^2\varphi(d\theta)^2$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a^2\cos^2\varphi$$

فرم رویه‌ی دوران دلخواه

$$r(u^1,u^2)=(f(u^1)\cos u^2,\ f(u^1)\sin u^2,\ h(u^1))$$

$$r_1=(f'\cos u^2,\ f'\sin u^2,\ h')$$

$$r_2=(-f\sin u^2,\ f\cos u^2,\ 0)$$

$$r_1\times r_2=(-fh'\cos u^2,\ -fh'\sin u^2,\ ff')$$

$$|\vec{r_1}\times\vec{r_2}|=\sqrt{f^2h'^2+f^2f'^2}\underset{f>0}{=}f\sqrt{f'^2+h'^2}$$

$$\vec{m}=\frac{r_1\times r_2}{|r_1\times r_2|}=\frac{1}{\sqrt{f'^2+h'^2}}(-h'\cos u^2,-h'\sin u^2,\ f')$$

$$r_{11}=(f''\cos u^2,\ f''\sin u^2,\ h'')=\frac{\partial r_1}{\partial u_1}$$

$$r_{12}=r_{21}=(-f'\sin u^2,\ f'\cos u^2,\ 0)=\frac{\partial r_1}{\partial u_2}=\frac{\partial r_2}{\partial u_1}$$

$$r_{22}=(-f\cos u^2,\ -f\sin u^2,\ 0)=\frac{\partial r_2}{\partial u_2}$$

$$b_{11}=r_{11}\cdot m=\frac{1}{\sqrt{f'^2+h'^2}}(-f''h'\cos^2u_2-f''h'\sin^2u_2+f'h'')$$

$$=\frac{f'h''-f''h'}{\sqrt{f'^2+h'^2}}$$

$$b_{12}=b_{21}=m\cdot r_{12}=\frac{1}{\sqrt{f'^2+h'^2}}\underbrace{(f'h'\cos u_2\sin u_2-f'h'\cos u_2\sin u_2)}_{0}$$

$$=0$$

$$b_{22}=r_{22}\cdot m=\frac{1}{\sqrt{f'^2+h'^2}}\underbrace{(+fh'\cos^2u_2+fh'\sin^2u_2)}_{fh'}$$

$$\mathrm{II}=\left(\frac{f'h''-f''h'}{\sqrt{f'^2+h'^2}}\right)(du_1)^2+\frac{fh'}{\sqrt{f'^2+h'^2}}(du_2)^2$$

برای رویه‌هایی که این مدل پارامتری شده باشند - فرم دوم اساسی از ۲۱ بدست می‌آید.

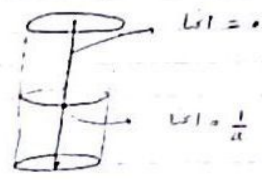
$$b=\frac{fh'(f'h''-f''h')}{f'^2+h'^2}$$

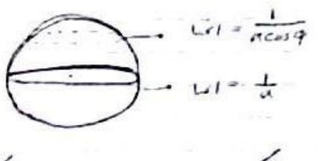
مثلاً برای استوانه $x^2+y^2=a^2$

$f(u^1)=a$
$h(u^1)=u^1$ $\quad h'=1$
$h''=0$

$$\mathrm{II}=a(du^2)^2$$

- در کره هر سمتی دارای انحنای غیر صفر است.
- ولی در استوانه خط عمودی انحنای صفر دارد.





بیشترین انحنا و کمترین انحنا روی یک رویه را انحنای اصلی (گاوسی) گویند.

$b =$ max انحنای × min انحنای

انحنای اصلی

نقشه چون تصویر از کره روی صفحه است - چون انحنای صفحه با سطح زمین متفاوت است از نظر انحناهای اصلی، پس نمی‌تواند دقیق باشد.

انحنای گاوسی - برای هر رویه‌ی منظم با پارامتری از رده‌ی C^2 که کسر $K = \frac{b}{g}$ را انحنای گاوسی می‌نامند.

مثال - برای صفحه در مختصات دکارتی یا استوانه‌ای چون $b = 0$ پس $K = 0$

برای کره در مختصات کروی

$$ds^2 = a^2(d\varphi)^2 + a^2\cos^2\varphi\,(d\theta)^2$$

$$II = a(d\varphi)^2 + a\cos^2\varphi\,(d\theta)^2$$

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\varphi \end{vmatrix} = a^4\cos^2\varphi$$

$$b = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a\cos^2\varphi \end{vmatrix} = a^2\cos^2\varphi$$

$$K = \frac{b}{g} = \frac{1}{a^2}$$

* تمرین ـ انحنای گاوسی رویه‌های زیر را بیابید. چنبره ـ رویه دوار ـ [illegible]

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

λ مقدار ویژه و $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بردار ویژه می‌نامیم

مقدارهای ویژه ماتریس متقارن $[g^{ij}][b_{ij}]$ را انحناهای اصلی می‌نامیم

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = A$$

برای بدست آوردن انحناهای اصلی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$\det\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\right) = 0$$

اگر k_1 و k_2 انحناهای اصلی باشند، ثابت می‌شود که انحنای گاوسی برابر است با $K = k_1 k_2$

انحنای میانگین $= \frac{k_1 + k_2}{2}$

مثال ـ برای صفحه در مختصات دکارتی

$g_{11} = g_{22} = 1$

$g_{21} = g_{12} = 0 \qquad b_{ij} = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$k_1 = k_2 = 0 \qquad K = 0 = k_1 k_2$

برای استوانه

$g_{22} = r_2 \cdot r_2 = a^2$

$g_{12} = g_{21} = 0 \qquad g_{11} = 1$

$$\det\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}\right] = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & a - \lambda a^2 \end{vmatrix}$$

$-\lambda a + \lambda^2 a^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \qquad k_2 = \frac{1}{a^2}$

$k_1 k_2 = K = 0$

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۱۳

تقسیم بندی نقاط یک رویه منتظم ←

اگر
$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

دترمینان های فرم اساسی یک و دوم رویه ی منتظم باشد.
داریم $g > 0$

(۱) اگر در یک نقطه $b > 0$ (یا $K > 0$) نقطه را بیضوی گویند.

مثلا همه ی نقاط کره بیضوی است.

همه ی نقاط بیضیگون بیضوی است.

اگر در نقاط بیضوی صفحه ی مماس رسم کنیم، همسایگی از رویه ی در یک طرف صفحه ی مماس قرار گرفته و محل برخورد صفحه ی مماس فقط همان نقاط است.

← در چنبره بعضی نقاط بیضوی و برخی دیگر بیضوی نیستند.

← استوانه هرجا صفحه قرار دهیم (مماس کنیم) در یک خط راست قطع می کند.

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۴

برای کره
$$ds^2 = a^2 (d\varphi)^2 + a^2 \cos^2\varphi \, (d\theta)^2$$

$$\mathrm{II} = a (d\varphi)^2 + a \cos^2\varphi \, (d\theta)^2$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a\cos^2\varphi \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\varphi \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda a^2 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi (a - a^2 \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{a} \qquad K = \frac{1}{a^2}$$

← انحنای گاوسی مستقل از انتخاب پارچه ساده است.

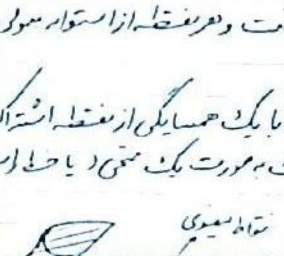
② اگر $d = 0$ / یعنی دو سطر مضربی از هم باشند / یا کل درایه‌ها صفر اند

الف ـ هر L_{ij} صفر باشد ـ در این حالت نقطه را تخت می‌نامیم. (Flat)

ب ـ حداقل یک $L_{ij} \neq 0$ باشد ـ نقطه را سهموی می‌نامیم.

برای مثال هر نقطه از صفحه نقطه‌ی تخت و هر نقطه از استوانه سهموی است.

نکته ← در نقاط تخت صفحه‌ی مماس با یک همسایگی از نقطه اشتراک دارد. در نقاط سهموی این اشتراک به صورت یک منحنی (یا خط) است.



③ $d > 0$ / نقطه زینی نامیده می‌شود. یا هذلولوی

مثال ← برای رویه‌ی زین اسبی $z = y^2 - x^2$

اگر صفحه‌ی مماس بر نقطه‌ی زینی رسم شود یعنی بخشی از رویه یک طرف ـ و بخش دیگر در طرف دیگر می‌افتند.

مثال ← چنبره

$$r(u^1, u^2) = ((a + b\cos u^1)\cos u^2, (a + b\cos u^1)\sin u^2, b\sin u^1)$$

$$0 \leq u^1, u^2 \leq 2\pi$$

نقاط $-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}$ و u^2 دلخواه بیضوی

نقاط $\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{3\pi}{2}$ و u^2 دلخواه هذلولوی

نقاط $u^1 = \pm\frac{\pi}{2}$ و u^2 دلخواه سهموی

نقاط تخت هم ندارد.

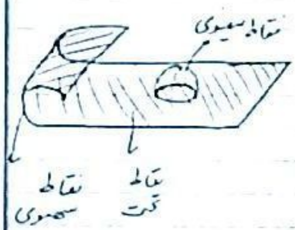
② اگر $K = 0$ / یعنی دو سطر صفری از هم باشند / یا کل درایه‌ها صفر باشد

الف ـ هر L_{ij} صفر باشد ـ در این حالت نقطه را تخت (Flat) می‌نامیم.

ب ـ حداقل یک $L_{ij} \neq 0$ باشد ـ نقطه را سهموی می‌نامیم.

برای مثال هر نقطه از صفحه نقطه‌ی تخت و هر نقطه از استوانه سهموی است.

نکته ـ در نقاط تخت صفحه‌ی مماس با یک همسایگی از نقطه اشتراک دارد. در نقاط سهموی این اشتراک به صورت یک منحنی (یا خط) است.

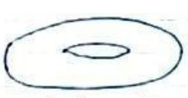


③ $K < 0$ / نقطه زینی نامیده می‌شود. یا هذلولوی

مثال ـ برای رویه‌ی زین اسبی $z = y^2 - x^2$

اگر صفحه‌ی مماس بر نقطه‌ی زینی رسم شود یعنی بخشی از رویه یک طرف ـ و بخش دیگر در طرف دیگری افتد.

مثال ـ چنبره



$$r(u^1, u^2) = ((a + b\cos u^1)\cos u^2, (a + b\cos u^1)\sin u^2, b\sin u^1)$$

$0 \leq u^1, u^2 \leq 2\pi$

نقاط $-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}$ و u^2 دلخواه بیضوی

نقاط $\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{3\pi}{2}$ و u^2 دلخواه هذلولوی

نقاط $u^1 = \pm\frac{\pi}{2}$ و u^2 دلخواه سهموی

نقاط تخت هم ندارد.

نکته ــ منحنی دارای هر یک نقطه متفاوت زین میمون نام دارد.

تمرین ــ نوع نقاط یک زنجیرگون را مشخص نمایید.

فرض کنید $f(t)$ تابعی از رده‌ی C^2 باشد. برای اعداد ثابت a و b و c و d نوع نقاط رویه‌ی $z=ax+by+f(cx+dy)$ را مشخص کنید.

= نظریه‌ی اساسی رویه‌ها =

فرض کنید $r=r(u^1,u^2)$ رویه پارامتری منتظم از رده‌ی $C^k_{k\geq 2}$ باشد.

بردار $\vec{r}_{ij}=\dfrac{\partial r_i}{\partial u^j}$

را می‌توان برحسب سه بردار r_1 و r_2 و m نوشت

$$\vec{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^{1}\vec{r}_1+\Gamma_{ij}^{2}\vec{r}_2+\beta_{ij}\,\vec{m} \quad *$$

Γ_{ij}^{k} (۶ عدد متمایز) را علائم کریستوفل نوع دوم گویند.

با ضرب طرفین رابطه‌ی * در $\vec{m}$ داریم:

$$\underbrace{\vec{r}_{ij}\cdot\vec{m}}_{b_{ij}}=\Gamma_{ij}^{k}\,\vec{r}_k\cdot\vec{m}+\beta_{ij}\,\vec{m}\cdot\vec{m}$$

m عمود بر r_1 و r_2 است پس برابر صفر است.

و چون m بردار یکه است. $\vec{m}\cdot\vec{m}$ برابر یک است.

$$\Rightarrow \beta_{ij}=b_{ij}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^{k}\vec{r}_k+b_{ij}\,\vec{m}$$ (فرمول‌های گاوس)

طرفین * را در $\vec{r}_l$ ضرب داخلی کنیم داریم

$$\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_l=\Gamma_{ij}^{k}\underbrace{\vec{r}_k\cdot\vec{r}_l}_{g_{kl}}+b_{ij}\underbrace{\vec{m}\cdot\vec{r}_l}_{0}$$

قرار می‌دهیم $\Gamma_{ijl}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{r}_l$ و آنها را علائم کریستوفل نوع اول می‌نامند. با حل دستگاه معادلات

$$g_{kl}\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ijl}$$

$$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{ij}^{1}+g_{21}\Gamma_{ij}^{2}=\Gamma_{ij1} \\ g_{12}\Gamma_{ij}^{1}+g_{22}\Gamma_{ij}^{2}=\Gamma_{ij2} \end{cases}$$

وارون $[g_{kl}]$ همان $[g^{kl}]$ است پس

$$\Gamma_{ij}^{\ k} = \Gamma_{ijl}\, g^{kl}.$$

ـ از رابطه‌ی * مشخص است که

$$\Gamma_{jil} = \Gamma_{ijl} \quad , \quad \Gamma_{ij}^{\ k} = \Gamma_{ji}^{\ k}$$

مثال ـ برای صفحه‌ی xy در مختصات دکارتی

$$r(x,y) = (x, y, 0)$$

$$\vec{r_1} = (1, 0, 0) \qquad \vec{r_2} = (0, 1, 0) \qquad \vec{r_{ij}} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ijl} = 0$$

$$\Gamma_{ij}^{\ k} = \Gamma_{ijl}\, g_{lk} = 0$$

مثال ـ صفحه در مختصات قطبی

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

$$r_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad r_2 = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$ds = (dr) + r^2 (d\theta)^2 \qquad g_{11} = 1 \ , \ g_{22} = r^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$r_{11} = 0 \qquad r_{12} = r_{21} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$g^{11} = 1 \ , \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$r_{22} = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 0) \qquad g^{21} = g^{12} = 0$$

علائم نوع اول

$$\Gamma_{11l} = r_{11} \cdot r_l = 0 \qquad \Gamma_{121} = r_{12} \cdot r_1 = 0$$

$$l = 1, 2$$

$$\Gamma_{212} = r_{21} \cdot r_2 = r \qquad \Gamma_{221} = r_{22} \cdot r_1 = -r$$

$$\Gamma_{222} = r_{22} \cdot r_2 = 0$$

ـ حال دستگاه تشکیل می‌دهیم.

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۱۳

علائم نوع دوم

$$\Gamma^{1}_{11} = \Gamma_{111}\, g^{11} + \Gamma_{112}\, g^{12} = 0$$

$$\Gamma^{2}_{11} = \Gamma_{111}\, g^{21} + \Gamma_{112}\, g^{22} = 0$$

$$\Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = \Gamma_{121}\, g^{11} + \Gamma_{121}\, g^{12} = 0$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \Gamma_{122}\, g^{21} + \Gamma_{122}\, g^{22} = r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{1}_{22} = \Gamma_{221}\, g^{11} + \Gamma_{222}\, g^{12} = -r(1) = -r$$

$$\Gamma^{2}_{22} = \Gamma_{221}\, g^{21} + \Gamma_{222}\, g^{22} = 0$$

$r = r(u^1, u^2)$ $\vec{m} = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$

$r_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}\, r_k + b_{ij}\, \vec{m}$ فرمولهای گاوس

$$\frac{\partial m}{\partial u^i} = \vec{m}_i = b_i^1 \vec{r}_1 + b_i^2 \vec{r}_2 + \alpha \vec{m}$$

چون $|\vec{m}| = 1 \Leftarrow 2 m_i \cdot m = 0$

$m \cdot m$

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۲۰

— فرمولهای وینگارتن $m_i = b_i^j \vec{r}_j$

طرفین فرمولهای وینگارتن را در r_l ضرب کنیم

$$\underbrace{m_i \cdot r_l}_{-b_{il}} = \underbrace{b_i^j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_l}_{b_i^j g_{jl}}$$

قضیه — برای بدست آوردن علائم کریستوفل نوع اول می توان از فرمولهای زیر استفاده کرد.

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right]$$

و

$$\Gamma^{l}_{ij} = \frac{g^{lk}}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right]$$

معادلات گاوس — کودازی

اگر $r = r(u^1, u^2)$ مشتق‌پذیر از رده ی حداقل C^k $(k \geq 3)$ باشد

Subject هندسه دیفرانسیل
Year ۹۴ Month ۲ Date ۲۵

از فرمول‌های گاوس داریم

$$\vec r_{ijl} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{k}}{\partial u^{l}} r_k + \Gamma_{ij}^{k}\vec r_{kl} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^{l}}\vec m + b_{ij}\vec m_l$$

با جایگذاری

$$r_{kl} = \Gamma_{kl}^{t} r_t + b_{kl}\cdot\vec m$$

,

$$m_l = -b_l^{t} r_t$$

و استفاده از رابطه

$$r_{ijk} = r_{ikj}$$

پس از محاسبه خواهیم داشت ←

$$b = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1} +$$

$$-\left(\Gamma_{11}^{s}\Gamma_{22}^{r} - \Gamma_{12}^{s}\Gamma\right) - \begin{vmatrix}\Gamma_{11}^{1} & \Gamma_{12}^{t}\\ \Gamma_{21}^{1} & \Gamma_{22}^{t}\end{vmatrix} g_{t}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^{i} b_{i2} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^{j} b_{j1}\\[2mm] \dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma_{21}^{i} b_{i2} = \dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^{j} b_{j1}\end{cases}$$

KHATEREH

Subject هندسه دیفرانسیل
Year ۹۴ Month ۲ Date ۲۵

قضیه (گاوس) ← برای هر رویه از رده‌ی C^3 ($k\geq 3$) پارامتری منتظم گویند. انحنای گاوسی به ضرایب متریک یا تانسور متریک اساسی و مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم آنها وابسته است.
theorema egregium

$$K = \frac{b}{g}$$

در صفحه قبل

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}$$

- تعریف ← برای رویه‌ی منتظم با پارامتری‌سازی $r = r(u^1, u^2)$ را متعامد گویند (مختصات متعامد گویند) هرگاه $g_{12} = g_{21} = 0$ یعنی

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

- مدارها و نصف‌النهارها بر هم عمود هستند.
u^1 خم‌ها — u^2 خم‌ها

پارامتری‌سازی $r = r(u^1, u^2)$ را نیمه ژئودزیک (با مختصات نیمه ژئودزیک) گوییم هرگاه $g_{11} = 1$ و $g_{12} = g_{21} = 0$ و تابع $g_{22} = G(u^1, u^2)$

$$ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$$

KHATEREH

. صفحه در مختصات دکارتی $ds^2 = (d\ )^2 + (dy)^2$

صفحه در مختصات $ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$

نیمه ژئودزیک — متری یکی از خم ها ژئودزیک و دیگری معلوم نیست باشد

با توجه به فرمولهای گاوس - کوداتزی برای رویه‌ای با مختصات نیمه ژئودزیک داریم

- انحنای رویه‌ها نیمه ژئودزیک

$$\boxed{K = \frac{b}{g} = \frac{-1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^2}}$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{vmatrix} = G > 0$$

قضیه‌ی بونه — برای دو فرم

$$\begin{cases} I = g_{ij}\,du^i du^j \\ II = b_{ij}\,du^i du^j \end{cases}$$

با ضرایب حداقل از رده‌ی C^2 — تحت شرایط زیر رویه‌ای وجود دارد که I متریک و II دومین فرم اساسی آن است.

(1) $g_{11} > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$

(2) ضرایب g_{ij} ها، ضرایب b_{ij} در فرمولهای گاوس - کوداتزی صدق کند.

- آیا $I = (du^1)^2 + (du^2)^2$ و $II = (du^1)^2 - (du^2)^2$ فرمهای اساسی یک رویه اند؟

قضیه‌ی بونه

شرط (1) برقرار است g_{ij} ها ثابت اند پس مشتقات آن هم صفر است پس

$b = 0$ اما $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = -1$ — چنین رویه‌ای موجود نیست

تناقض

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۲۰

آیا

$$I = (du^2)^2 \qquad II = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

متریک و دومین فرم اساسی رویه هستند؟ از قضیه‌ی بونه ۲ شرط را چک می‌کنیم. هردو شرط برقرارند ـ پس یک رویه با این دو فرم اساسی وجود دارد.

تمرین ← آیا ① $I = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2$ ، $II = \cos^2 u^1 (du^1)^2 + (du^2)^2$ ، فرم‌ها اساسی یک رویه‌اند؟

② $I = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2$

$II = (du^2)^2 + 0$.

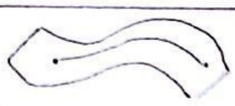
← انحنای ژئودزیک و ژئودزیک‌ها →

فرض کنید $\gamma(s)$ یک منحنی روی رویه با پارامتری منتظم $r(u^1, u^2)$ باشد. پس

$$\gamma(s) = r(u^1(s), u^2(s))$$

$$T(s) = \gamma'(s) = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial u^1}}_{r_1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial u^2}}_{r_2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial s}$$

KNATEREH



Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۲۰

$$T'(s) = \gamma''(s) = \overbrace{\frac{\partial r_i}{\partial u^1}}^{r_{i1}} \cdot \frac{du^1}{ds} \cdot \frac{du^1}{ds} + \overbrace{\frac{\partial r_i}{\partial u^2}}^{r_{i2}} \cdot \frac{du^2}{ds} \cdot \frac{du^2}{ds} + r_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

بردار انحنا $\vec{K} = kN = r_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + r_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$

$$r_{ij} = \left(\Gamma_{ij}^{k} r_k + b_{ij} \vec{m}\right)$$

$$K = \left(\Gamma_{ij}^{k} \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^k}{ds^2}\right) \vec{r}_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} \cdot m$$

جمله‌ی اول در رویه‌ی مماس است با K_g و جمله‌ی دوم بر رویه‌ی عمود است با K_n نمایش می‌دهیم:

$$\vec{K}_g = \underbrace{\left(\Gamma_{ij}^{k} \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^k}{ds^2}\right)}_{\text{انحنای ژئودزیک}} r_k$$

K_g را انحنای ژئودزیک خم می‌نامیم.

KNATEREH

$= \Gamma_{11}^{1}\left(\frac{1}{a}\right)^{2}\vec{r}_1 + \Gamma_{11}^{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{2}\vec{r}_2$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\phi \end{bmatrix} \rightarrow g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2\cos^2\phi} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{g^{1j}}{2}\left[\frac{\partial g_{1j}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^j}\right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{g^{2j}}{2}\left[\frac{\partial g_{2j}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^2} - \partial_j g\right] = 0$$

$K_g = 0$ پس هر نصف النهار یک ژئودزیک است.

$\underset{u^1}{\phi} = \phi_0 \qquad \underset{u^2}{\theta} = \frac{s}{a\cos\phi_0}$

$\frac{du^1}{ds} = 0 \qquad \frac{d^2u^1}{ds^2} = 0 \qquad \frac{du^2}{ds} = \frac{1}{a\cos\phi_0}$

$\frac{du^2}{ds^2} = 0$

$$K_g = \left(\Gamma_{22}^{1}\frac{1}{a^2\cos^2\phi_0}\vec{r}_1\right) + \left(\Gamma_{22}^{2}\frac{1}{a^2\cos^2\phi_0}\vec{r}_2\right)$$

- خم $\gamma(s)$ روی رویه را ژئودزیک می‌نامیم هرگاه $\vec{K}_g \equiv 0$

خط یا منحنی

مثال - اگر $\vec{a}$ برداری یکه در صفحه باشد

خط راست گذرنده از b و در راستای a $\qquad \gamma(s) = s\vec{a} + \vec{b}$

برای صفحهٔ دکارتی $\Gamma_{ij}^{k} = 0$

$\gamma(s) = (sa^1 + b^1, sa^2 + b^2, 0)$

$\gamma'(s) = a \ , \ \gamma''(s) = 0$

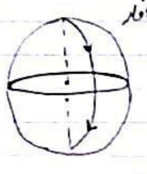
$K = \underset{0}{K_g} + \underset{0}{K_n}$

خط راست ژئودزیک است

- تمرین - Γ_{ij}^{k} برای کره‌ای به شعاع a محاسبه نمایید.

$r(\phi,\theta) = (a\cos\phi\cos\theta \ , \ a\cos\phi\sin\theta \ , \ a\sin\phi)$

نصف النهار $\theta = \theta_0 \ , \ \phi = \frac{s}{a} \ , \ |r(\phi,\theta_0)| = a$



$\frac{du^1}{ds} = \frac{1}{a} \qquad \frac{d^2u^1}{ds^2} = 0$

$$K_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{k}\frac{du^i}{ds}\cdot\frac{du^j}{ds}\right)\vec{r}_k =$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{g^{11}}{2}\left[\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right] = \frac{1}{2a^2}\left[2a^2\cos\phi\sin\phi\right]$$

$$= \cos\phi\sin\phi$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{g^{22}}{2}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right] = 0$$

$$K_g = \cos\phi_0 \sin\phi_0 \frac{1}{a^2\cos^2\phi_0}\vec{r_1} = \frac{1}{a^2} tg\phi_0 \vec{r_1}$$

ـ فقط دایره استوا ژئودزیک است.

دیدیم که $\vec{K} = \underbrace{\vec{K}_g}_{\text{مماس بر رویه}} + \underbrace{\vec{K}_n}_{\text{عمود (موازی } m)}$

$K \perp T$

پس

$K_g \perp T$

$K_g \parallel \vec{m} \times \vec{T} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{برداری که}}$

بنابراین $\underbrace{K_g}_{\text{بردار انحنای ژئودزیک}} = \underbrace{k_g}_{\text{انحنای ژئودزیک}} \vec{u}$

مثال ـ برای نصف النهارها چون $\vec{K}_g = 0$ پس $k_g = 0$

برای مدارها $\phi = \phi_0$

$$\vec{m} = (-\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$$

$$r_1 = a(-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

$$r_2 = a(-\cos\phi\sin\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)$$

$$\vec{u} = m \times T = -(\cos\phi_0\cos\theta, \cos\phi_0\sin\theta, \sin\phi_0) \times \frac{r}{a\cos\phi_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\phi_0\cos\theta & \cos\phi_0\sin\theta_0 & \sin\phi_0 \\ -\cos\phi_0\sin\theta & \cos\phi_0\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{g^{11}}{2}\left[\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right] = \frac{1}{2a^2}\left[2a^2\cos\varphi\sin\varphi\right]$$

$$= \cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{g^{22}}{2}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right] = 0$$

$$k_g = \cos\varphi_0 \sin\varphi_0 \frac{1}{a^2\cos^2\varphi_0}\, \vec{r_1} = \frac{1}{a^2}\, tg\,\varphi_0\, \vec{r_1}$$

فقط در راستای ژئودزیک است.

دیدیم که $\vec{K} = \underbrace{\vec{k_g}}_{\text{مماس بر رویه}} + \vec{k_n}$ عمود (موازی)

$K \perp T$

پس

$k_g \perp T$

$k_g \parallel \vec{m} \times \vec{T} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{بردار یکه}}$

بنابراین $K_g = k_g \vec{u}$

بردار انحنای ژئودزیک — انحنای ژئودزیک

مثال ← برای نصف النهارها چون $\vec{K_g} = 0$ پس $k_g = 0$

برای مدارها $\varphi = \varphi_0$

$$\vec{m} = (-\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi)$$

$$r_1 = a(-\sin\varphi\cos\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$$

$$r_2 = a(-\cos\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$\vec{u} = m \times T = -(\cos\varphi_0\cos\theta,\ \cos\varphi_0\sin\theta,\ \sin\varphi_0) \times \frac{r}{a\cos\varphi_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi_0\cos\theta & \cos\varphi_0\sin\theta_0 & \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0\sin\theta & \cos\varphi_0\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

اگر $u^1(t)$ و $u^2(t)$ معادلات پارامتری خم $\gamma(t)$ روی رویه‌ی $r=r(u^1,u^2)$ باشد، آنگاه

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2u^1}{dt^2}+\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} & \frac{d^2u^2}{dt^2}+\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \end{vmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$$

درحالی که $t=s$ باشد آنگاه $g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}=1$ خواهد بود.

تمرین ۱ـ انحنای ژئودزیک k_g را برای مارپیچ

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

واقع بر استوانه‌ی

$$r(u^1,u^2) = (a\cos u^1, a\sin u^1, u^2)$$

و همان مارپیچ روی مارپیچ‌گون

$$\begin{cases} t = u^1 \\ bt = u^2 \end{cases}$$

$$R(u^1,u^2) = (u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, u^2)$$

به دست آورید.

تمرین ۲ـ انحنای ژئودزیک خم‌های مختصاتی (u^1 خم‌ها و u^2 خم‌ها) را برای یک رویه‌ی دورانی به دست آورید.

$$r(u^1,u^2) = (f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, h(u^1))$$

* * * *

قضیه: اگر $r=r(u^1,u^2)$ رویه‌ی پارامتریک منتظم از رده‌ی C^k باشد آنگاه برای هر نقطه از رویه و هر بردار مماس آن یک و تنها یک ژئودزیک ماکزیمال وجود دارد که از آن نقطه می‌گذرد و بر آن بردار مماس است.

اگر $u^1=u^1(t)$ و $u^2=u^2(t)$ معادلات پارامتری $\gamma(t)$ روی رویه باشد

γ ژئودزیک گذرنده از نقطه‌ی p در جهت بردار v است $\Longleftrightarrow$

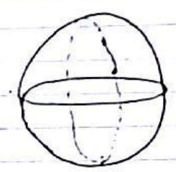
$$\frac{d^2u^k}{dt^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}=0, \quad \gamma'(0)=\vec{v}, \quad \gamma(0)=p$$

ژئودزیک‌های صفحه ← خط راست

کره ← دایره‌های عظیمه

Subject: هندسه دیفرانسیل
Year: ۹۴ Month: ۲ Date: ۲۷

قضیه (خاصیت مینی مال بودن ژئودزیک‌ها) ← طول ژئودزیک بین دو نقطه‌ی به اندازه‌ی کافی نزدیک به هم از ژئودزیک، کوتاهترین فاصله بین آن دو نقطه روی رویه است.

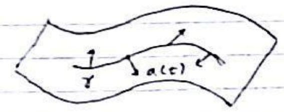


Subject: هندسه دیفرانسیل (جلسه آخر)
Year: ۹۴ Month: ۳ Date: ۳

میدانهای برداری ←

هرگاه S یک رویه و $F: S \to \mathbb{R}^3$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $p \in S$ بردار $F(p)$ بر S در نقطه‌ی p مماس باشد. F را یک میدان برداری (مماسی) بر S می‌گوییم.

در صورتیکه $\gamma(t) = r(u^1(t), u^2(t))$ خمی روی رویه‌ی پارامتری منتظم باشد و تابعی داشته باشیم که در هر نقطه از این خم یک بردار مماس بر رویه بدهد. تابع فوق را میدان برداری در امتداد خم γ گوییم.

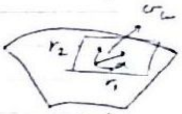


$\gamma: I \to S$ (رویه)

$a: I \to \mathbb{R}$

مثلاً $\gamma': I \to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری در امتداد γ است.

اگر $\vec{a}$ برداری مماس بر رویه باشد، a را می‌توان برحسب $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ نوشت



$$\vec{a} = a^1\vec{r_1} + a^2\vec{r_2} = a^i\vec{r_i}$$

$$|a|^2 = a \cdot a = (a^i \cdot \vec{r_i}) \cdot (a^j \cdot \vec{r_j}) = a^i a^j \underbrace{\vec{r_i} \cdot \vec{r_j}}_{g_{ij}}$$

$$|a|^2 = g_{ij} \cdot a^i a^j$$

حال اگر a یک میدان برداری روی رویه‌ی پارامتری منتظم $r = r(u^1, u^2)$ باشد،

$$\vec{a}(u^1, u^2) = a^1(u^1, u^2)\, r_1(u^1, u^2) + a^2(u^1, u^2)\, r_2(u^1, u^2) = a^i \vec{r_i}$$

حال دیفرانسیل می‌گیریم.

$$d\vec{a} = da^i\vec{r_i} + a^i\overbrace{d\vec{r_i}}$$

دیفرانسیل کل

$$dr_i = \frac{\partial r_i}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial r_i}{\partial u^2}du^2$$

$$= da^i r_i + a^i(r_{ij}du^j)$$

$$= da^i r_i + a^i(\Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} \cdot \vec{m})du^j$$

$$+ \underbrace{\left(da^k + \Gamma_{ij}^k a^i du^j\right)}_{\text{مماس بر رویه}} \vec{r_k} + \underbrace{b_{ij} a^i du^j \vec{m}}_{\text{عمود بر رویه}}$$

- این را دیفرانسیل مطلق $\vec{a}$ گوییم و آن را با $D\vec{a}$ نمایش می‌دهیم

اگر $a(t)$ میدان برداری خم $\gamma(t)$ باشد، مشابه قبل

$$a(t) = a^i(t)\, r_i(u^1(t), u^2(t))$$

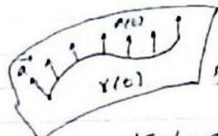
$$\frac{Da}{dt} = \left(\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k a^i(t) \frac{du^j}{dt}\right)\vec{r_k}$$

تعریف: میدان برداری $a(t)$ در امتداد $\gamma(t)$ را روی رویه‌ی $r(u^1, u^2)$ موازی گوییم هرگاه $\frac{D\vec{a}}{dt} = 0$ باشد.

یعنی

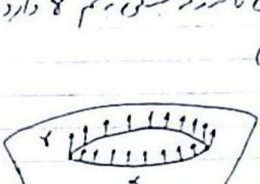
$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k a^i \frac{du^j}{dt} = 0$$

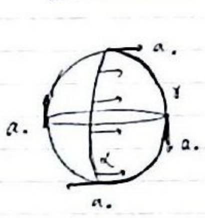
قضیه — برای هر خم $\gamma:[t_0,t_1]\to S$



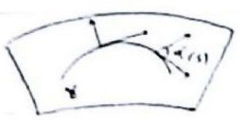
روی رویه‌ی S و هر بردار مماس $\vec{a}_0$ در نقطه‌ی $\gamma(t_0)$ بر S یک میدان برداری یکتای $a(t)$ در امتداد γ وجود دارد که $a(t_0)=a_0$.

$a(t)$ را انتقال موازی a_0 نیز می‌نامند که بستگی به خم γ دارد.
(متغیر مستقل - انتقال موازی)





قضیه — فرض کنید $\gamma(s)$ یک خم روی رویه با پارامتر طول قوس باشد و $\vec{a}(s)$ یک میدان برداری موازی در امتداد γ باشد که زاویه‌ی بین $a(s)$ و $T(s)$ (مماس بر $\gamma(s)$) برابر $\alpha(s)$ باشد. آنگاه



$$\frac{d\alpha}{ds}=k_g$$ — انحنای ژئودزیک

تعریف: یک ناحیه بر یک رویه را همبند ساده می‌نامیم هرگاه هر دو نقطه آن توسط یک خم در رویه قابل وصل بوده و نقاط داخل هر خم بسته در ناحیه، در ناحیه باشند. یعنی حفره‌ای نداشته باشد.

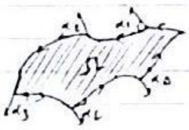

همبند ساده


همبند ساده نیست


همبند ساده نیست

قضیه (گاوس ـ بونه) ← اگر Ω یک ناحیه در رویه‌ی منتظم S باشد، که جهت پذیر است (یعنی رویه دارای پشت و رو باشد) یا یک بردار عمود پیوسته بر آن وجود دارد

Ω همبند ساده است و مرز آن با منحنی های جهت دار $\alpha_1 \dots \alpha_m$ یک منحنی پیوسته تشکیل می دهد که دو به دو با هم زاویه‌ی α_i را می سازند (جهت روی مرز مثبت است یعنی با حرکت روی آن Ω در دست چپ است.)

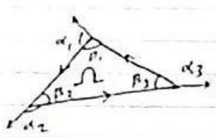


آنگاه

$$\underset{\Omega}{\iint} K\,dS + \oint_{C} k_g + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 2\pi$$

Ω انتگرال رویه ای — انحنای گاوسی — C مرز ناحیه — برحسب رادیان

مثال ساده ←



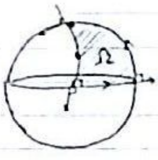
مثلث در صفحه

$K = 0 \quad k_g = 0$

چون منحنی‌ها خطاند

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$

$(\pi - \beta_1) + (\pi - \beta_2) + (\pi - \beta_3) = 2\pi \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$



مثال ← روی کره‌ای به شعاع a

Ω ناحیه‌ای بین دو نصف النهار که زاویه‌ی ۹۰ می سازند

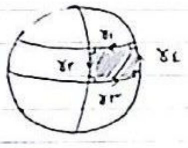
$$K = \frac{1}{a^2} \quad k_g = 0$$

منحنی‌ها دایره عظیمه

$$\underset{\Omega}{\iint} \frac{1}{a^2}\,ds + \oint 0 \cdot ds + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{8} 4\pi a^2}_{\text{مساحت کره}} = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

مثال ←



γ_1 مدار $\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \rightarrow k_g = \frac{-1}{a} \tan\varphi_0$

γ_2 نصف النهار $\quad \theta = 0 \rightarrow k_g = 0$

γ_3 مدار ـ استوا $\quad \varphi = 0 \rightarrow k_g = 0$

γ_4 نصف النهار $\quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow k_g = 0$

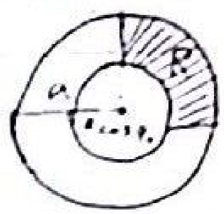
$$K = \frac{1}{a^2}$$

$$\underset{\Omega}{\iint} K\,ds + \oint_{C} k_g\,ds + \sum_{\text{ها}} \alpha_i$$

Subject: هندسه دیفرانسیل (جلسه آخر) Year: ۹۴ Month: ۳ Date: ۳

تحقیق قضیه گاوس بونه

$$\frac{1}{a^2}\iint_{\Omega} ds + \frac{-1}{a}\underbrace{\int_{\gamma_1} ds}_{\text{طول خم } \gamma_1 \,=\, \frac{1}{4}\text{ طول مدار}} + 4\times\frac{\pi}{2}$$



$$= \frac{1}{a^2}\iint_{R}\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}\;dx\,dy + \frac{1}{4}\,2\pi a\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-1}{a}$$

$$+2\pi = \frac{1}{a^2}\iint\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} + 2\pi =$$

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\frac{\sqrt{2}}{2}}^{a}(a^2-r^2)^{\frac{-1}{2}}\,r\,dr\,d\theta - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} + 2\pi =$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(-(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{a\frac{\sqrt{2}}{2}}^{a}\right) - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} + 2\pi$$

$$= 2\pi$$ ← صحت قضیه گاوس-بونه

$$\iint_{\Omega} K\,ds + \oint_{C} k_g\,ds + \sum \alpha_i = 2\pi(1 - \text{[illegible]})$$