فصل دوم: روش مستقیم برای سیستم‌های گسسته

مقدمه

روش اجزاء محدود شامل پنج گام زیر است:

- پیش‌پردازش (Preprocessing) : تقسیم ناحیه مسأله به المان‌ها
- فرمولاسیون المان (Element formulation) : تعیین معادلات حاکم برای یک المان منفرد

- حل معادلات (Solving the equations)
- پس‌پردازش (Postprocessing) : تعیین کمیت‌های مورد نظر مانند تنش‌ها و کرنش‌ها

××

در این فصل از روش حل اجزاء محدود برای تحلیل سیستم‌های گسسته مانند خرپاها یا مجموعه فنرها استفاده می‌کنیم.

در این سیستم‌ها بدلیل سادگی می‌توان رفتار هر المان را بطور مستقیم و بدون استفاده از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای فرمول‌بندی نمود (گام دوم).

در این فصل با نحوه ترکیب معادلات حاکم بر المان‌های منفرد برای بدست آوردن معادلات کل سیستم نیز آشنا خواهیم شد (گام سوم).

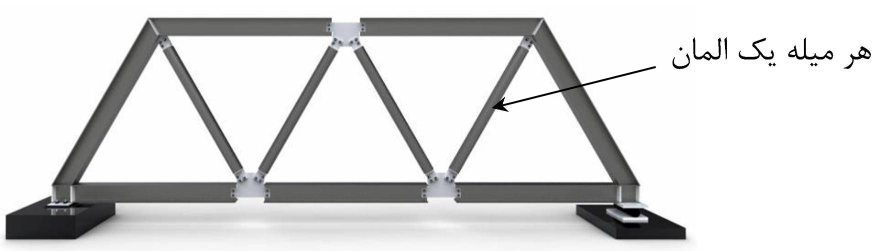
××

تشریح رفتار یک المان میله منفرد

نیروی گره i از المان e را با F_i^e و جابجایی آن را با u_i^e مشخص می‌کنیم.

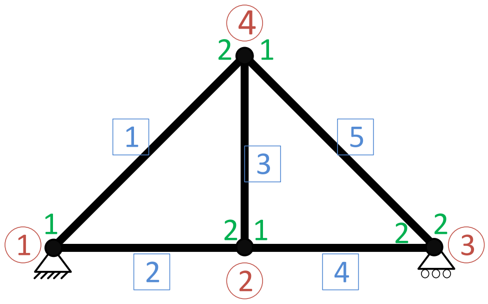
مثلاً $u_{2y}^{(5)}$ یعنی مؤلفه y جابجایی در گره ۲ از المان ۵.

$$u^{(\text{شماره المان})}_{\text{شماره گره المان}}$$



××

هر گره علاوه بر شماره خود در المان که به آن شماره موضعی گره می‌گوییم دارای یک شماره در کل مجموعه به نام شماره کلی گره است.



وقتی شماره گره در کل مجموعه (شماره کلی) مدنظر باشد

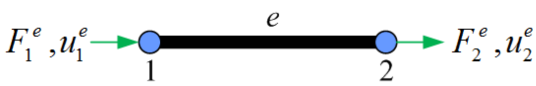
بالانویس شماره المان را حذف می‌کنیم.

پس $u_{1y}^{(5)}$ در شکل روبرو با u_{4y} معادل است.

××

مطابق شکل المانی میله‌ای را در نظر بگیرید که در راستای محور x قرار دارد.

مدول یانگ المان e را با E^e، سطح مقطع آن را با A^e و طول آن را با l^e مشخص می‌کنیم.



برای تعادل المان لازم است داشته باشیم:

(۱-۲)

بردار نیروهای گرهی المان را با $\tilde{\mathbf{F}}^e$ و بردار جابجایی المان را با $\tilde{\mathbf{u}}^e$ نمایش می‌دهیم.

××

برای این المان دو گرهی این ماتریس‌ها عبارتند از:

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \qquad (۲-۲)$$

اگر تنش را در المان با σ^e، کرنش را با ε^e و تغییر طول المان را با δ^e نشان دهیم می‌توان نوشت:

(۳-۲)

که در آن k^e برابر است با:

$$k^e = \frac{A^e E^e}{l^e} \qquad (۴-۲)$$

××

تغییر طول این المان بر حسب جابجایی‌های گرهی برابر است با:

$$\delta^e = u_2^e - u_1^e \qquad (۵-۲)$$

با جاگذاری از معادله (۲-۵) در معادله (۲-۳) خواهیم داشت:

$$F_2^e = k^e\left(u_2^e - u_1^e\right) \qquad (۶-۲)$$

با توجه به معادله تعادل المان در (۲-۱) می‌توان نوشت:

(۷-۲)

××

حال دو معادله (۲-۶) و (۲-۷) را با هم به فرم ماتریسی می‌نویسیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}^e} \qquad (۸-۲)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{K}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e \qquad (۹-۲)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{K}}^e$ ماتریس سختی المان نام داشته و در این حالت برابراست با:

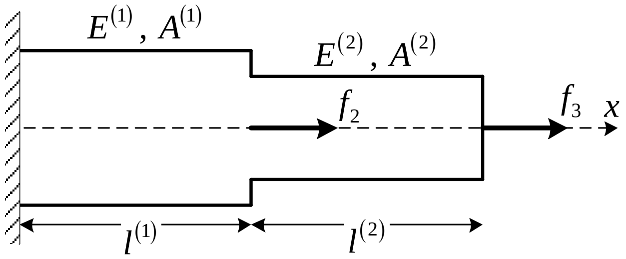
(۱۰-۲)

××

معادلات حاکم بر کل سیستم

یکی از ویژگی‌های مهم ماتریس سختی المان تقارن آن است. یعنی: $\tilde{\mathbf{K}}^e = \left(\tilde{\mathbf{K}}^e\right)^T$

به این منظور سیستم دو میله‌ای شکل را در نظر بگیرید.

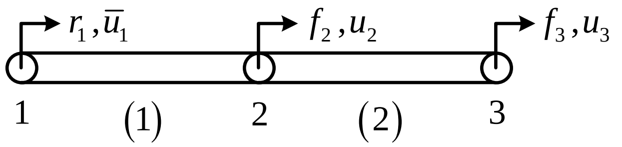


××

گام اول در روش اجزاء محدود تقسیم سازه به المان‌هاست.

در سیستم‌های گسسته ساده، لازم است گره‌ها در محل اعمال نیروها یا محل تغییر خواص مقطع یا ماده قرار داده شوند.

شماره‌گذاری گره‌ها برای شماره موضعی باید در جهت مثبت x باشد.

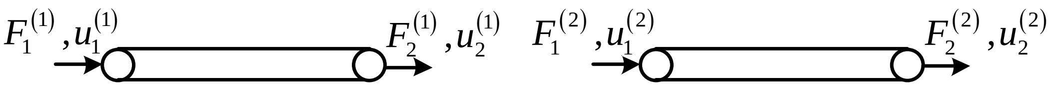


عکس‌العمل تکیه‌گاه $\leftarrow r_1$

جابجایی از پیش معین $\leftarrow \bar{u}_1$

××

حال دو المان را جدا کرده و مثل قبل معادلات مربوط به هر المان را می‌نویسیم:



(۲-۱۱)

با استفاده از دو شکل قبلی می‌توان نوشت:

$$F_1^{(1)} = r_1$$
$$F_2^{(1)} + F_1^{(2)} = f_2$$
$$F_2^{(2)} = f_3$$

××

یا به فرم ماتریسی :

$$\underset{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}^{(1)}}{\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}^{(2)}}{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix}}} = \underset{\text{نیروهای خارجی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی}}{\begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}} \qquad (۲-۱۲)$$

چون المان اول شامل گره سوم نیست بنابراین در بردار نیروی گرهی بسط یافته آن سطر سوم صفر شده است.

××

از طرفی مطابق با معادله (۲-۸) برای المان اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۳)$$

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۴)$$

طبق این دو معادله بردارهای $\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}$ و $\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}$ در (۲-۱۲) بصورت زیر قابل ذکرند:

(۲-۱۵)

××

(۲-۱۶)

با جاگذاری از معادلات (۲-۱۵) و (۲-۱۶) در (۲-۱۲) خواهیم داشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad (۲-۱۷)$$

××

یا به فرم ماتریسی:

$$\left(\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(1)} + \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(2)}\right)\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad \text{or} \quad \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (۲-۱۸)$$

دو معادله اخیر معادلات اسمبل (سرهم) شده و متغیر داخل پرانتز ماتریس سختی اسمبل (سرهم) شده نام دارند.

ماتریس سختی اسمبل شده در این حالت برابر است با:

(۲-۱۹)

براحتی می‌توان نشان داد ماتریس سختی $\tilde{\mathbf{K}}^{e}$ تکین است یعنی دترمینان آن برابر صفر است.

××

عملیات تعیین ماتریس سختی سیستم را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۲)$$

چون المان اول شامل گره سوم نیست سطر و ستون سوم در ماتریس سختی بسط یافته آن صفر شده‌اند.

(۲۱-۲)

××

روشی دیگر برای سرهم کردن ماتریس سختی روش اسمبل مستقیم است که از شماره کلی گره استفاده می‌کند:

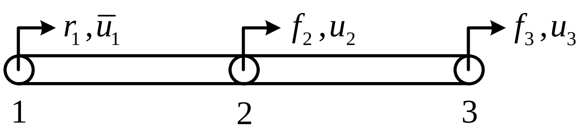
$$\vec{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$\vec{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad (۲۲-۲)$$

××

اعمال شرایط مرزی و حل معادلات

همانطور که گفتیم ماتریس سختی $\vec{\mathbf{K}}^{e}$ تکین است یعنی دترمینان آن برابر صفر است.



برای حل‌پذیر شدن این معادله لازم است شرایط مرزی را اعمال نمود.

برای آشنایی با روش اعمال شرایط مرزی به سیستم دو میله‌ای قبلی باز می‌گردیم. در این مثال شرط مرزی $u_1=\bar{u}_1$ است.

جابجایی از پیش معین $\bar{u}_1$ در این حالت صفر است.

××

همانطور که دیدیم معادله $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}}=\tilde{\mathbf{f}}$ برای این سیستم بصورت زیر است:

(۲-۲۳)

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا عکس‌العمل مجهول r_1 را از سمت راست حذف و به جای آن جابجایی معین این تکیه‌گاه یعنی $\bar{u}_1$ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\begin{matrix} \neq \\ = \\ = \end{matrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

اما با اینکار دیگر تساوی برای سطر اول رابطه بدست آمده برقرار نیست.

××

اگر همه درایه‌های سطر و ستون اول $\tilde{\mathbf{K}}^{e}$ را صفر کرده و درایه ضریب $\bar{u}_1$ یعنی $\tilde{\mathbf{K}}_{11}^{e}$ را برابر یک قرار دهیم تساوی برای سطر اول برقرار می‌شود.

اما اینکار سطر دوم و سوم رابطه را از تساوی خارج می‌کند.

با توجه به معادله (۲-۲۳) اگر طرف راست رابطه را به شکل زیر تغییر دهیم دوباره تساوی برقرار می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ f_2-\left(-k^{(1)}\right)\bar{u}_1 \\ f_3-(0)\bar{u}_1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۴)$$

××

بعد از محاسبه u_2 و u_3 ، از سطر اول معادله (۲-۲۳) برای پیدا کردن عکس‌العمل مجهول r_1 استفاده می‌کنیم:

$$r_1 = k^{(1)}\bar{u}_1 - k^{(1)}u_2 + 0\times u_3 \qquad (۲-۲۵)$$

نکته: بهتر است شماره کلی گره‌ها از گره‌هایی آغاز شود که جابجایی آنها از پیش معین است (مانند تکیه‌گاهها).

این ترتیب سبب می‌شود اندازه دستگاه معادلات حاصل از اعمال شرایط مرزی کوچکتر و حل آن راحت‌تر شود.

××

سؤال: الگوریتم به کار رفته چگونه معادله تکین (۲-۲۳) را به معادله غیر تکین (۲-۲۴) تبدیل کرد؟

اما با کمک این الگوریتم کلیه معلومات مسأله به سمت راست معادله جابجا شده و مجهولات در سمت چپ باقی ماندند.

با این تدبیر، اندازه دستگاه معادلات در (۲-۲۴) کاهش یافته و با حذف سطرها و ستون‌های اضافی، ماتریس ضرایب از تکینی خارج شد.

××

سؤال: چگونه حذف سطرها و ستون‌های اضافی، ماتریس را از حالت تکینی خارج می‌کند؟

پاسخ: به دستگاه معادله مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 2x + 3y + 0z = 4 \\ x - y + 0z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس تکین است اما بدیهی است که معادله اول دستگاه بدیهی است و متغیر z نیز جزء مجهولات آن نیست.

××

حال اگر معادله بدیهی و متغیر اضافی z را از دستگاه قبل حذف کنیم به دستگاه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

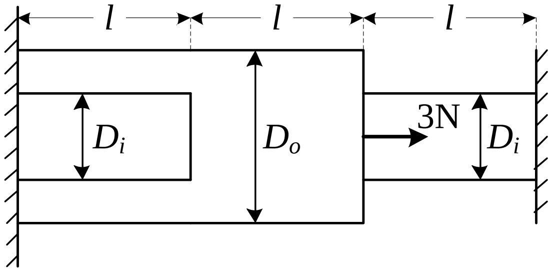
این دستگاه دقیقاً معادل دستگاه قبلی است اما ماتریس ضرایب آن دیگر تکین نیست.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

××

مثال (۲-۱)

در شکل زیر اگر $D_o = 2D_i$ باشد با استفاده از روش اجزاء محدود نیروهای تکیه‌گاهی را تعیین کنید.



حل: در گام اول سازه را به المان‌هایی تقسیم می‌کنیم.

ماتریس سختی هر المان برابراست با:

××

طول و مدول الاستیسیته برای تمام المان‌ها یکسان است و فقط لازم است مساحت‌ها را حساب کنیم:

$$A^{(1)} = \frac{\pi}{4}\left(D_o^2 - D_i^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(4D_i^2 - D_i^2\right) = 3\frac{\pi}{4}\left(D_i^2\right) = 3A$$

$$A^{(2)} = \frac{\pi}{4}D_o^2 = 4\frac{\pi}{4}D_i^2 = 4A \qquad A^{(3)} = \frac{\pi}{4}D_i^2 = A$$

بنابراین ماتریس سختی المان‌های مختلف برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}}^{(2)} = \frac{4AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{K}}^{(3)} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

××

ماتریس سختی سیستم از ماتریس سختی المان‌ها بدست می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{AE}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4+1 & -4 \\ -3 & 0 & -4 & 3+4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \\ -3 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

بعد از تعیین ماتریس $\tilde{\mathbf{K}}^e$ معادله $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$ را برای سیستم تشکیل می‌دهیم.

××

(الف)

حال باید شرایط مرزی $u_1=\bar{u}_1=0$ و $u_2=\bar{u}_2=0$ را اعمال کنیم:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ 3+\frac{AE}{l}\bar{u}_2 \\ 0+\frac{3AE}{l}\bar{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

××

یا به عبارت ساده‌تر:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل این معادله بدست می‌آید:

$$u_3 = \frac{21}{19}\frac{l}{AE} \qquad u_4 = \frac{12}{19}\frac{l}{AE}$$

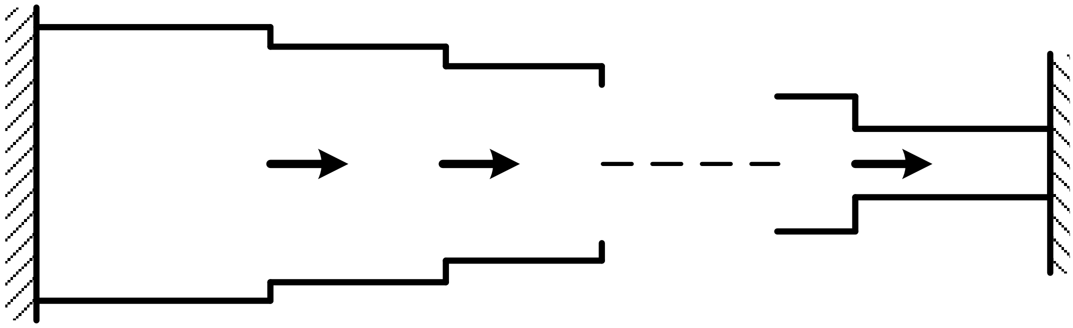
حال از معادله (الف) داریم:

$$r_1 = \frac{AE}{l}\left(3u_1 - 3u_4\right) = \frac{AE}{l}\left(3\times 0 - 3\times\frac{12}{19}\frac{l}{AE}\right) = -\frac{36}{19}$$

××

تمرین سری اول

برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب بنویسید که n را به عنوان ورودی دریافت نموده و جابجایی وسط میله و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی میله n قسمتی زیر را به روش اجزاء محدود محاسبه نماید. $f_i = \frac{5}{i}$, $\frac{E_i A_i}{L_i} = \frac{3}{i}$



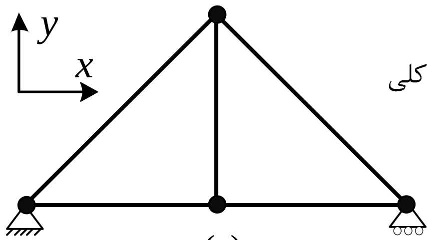
××

سیستم‌های خرپای دوبعدی

در این حالت المان‌های میله مطابق شکل (a) در صفحه xy قرار دارند.

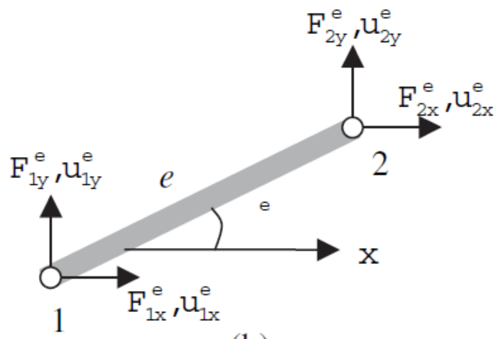
مطابق شکل (b) در حالت دوبعدی، متغیرهای برداری جابجایی و نیرو در هر گره دو مؤلفه دارند و ماتریس‌های نیرو و جابجایی المان عبارتند از:

(۲-۲۶)



(x, y): مختصات کلی

(a)



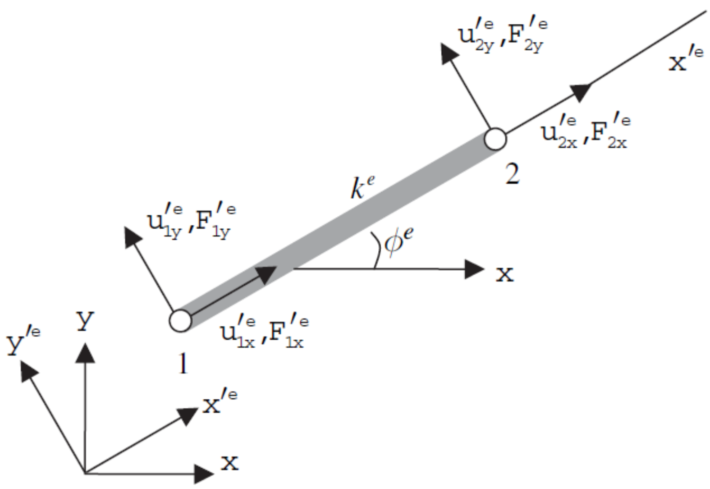
(b)

××

محور x'^e در راستای محور المان قرار داشته و جهت آن از گره ۱ به گره ۲ مثبت است.

(x'^e, y'^e): مختصات موضعی المان

۱ و ۲ شماره موضعی گره



×××××××××××××××××××××××××××××××××××××

زاویه ϕ^e در جهت پادساعتگرد مثبت است. بنابراین محور y'^e در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x'^e قرار دارد.

در صورت استفاده از سیستم مختصات (x'^e, y'^e) معادله (۲-۱۰) برای سختی المان برقرار بوده و می‌توان نوشت:

(۲-۲۷)

با توجه به اینکه میله خرپا تنها بار محوری تحمل می‌کند خواهیم داشت:

$$F'^e_{1y} = F'^e_{2y} = 0 \tag{۲-۲۸}$$

××

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F'^e_{1x} \\ F'^e_{1y} \\ F'^e_{2x} \\ F'^e_{2y} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}'^e} = k^e \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}'^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u'^e_{1x} \\ u'^e_{1y} \\ u'^e_{2x} \\ u'^e_{2y} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}'^e} \quad \text{or} \quad \tilde{\mathbf{F}}'^e = \tilde{\mathbf{K}}'^e \tilde{\mathbf{u}}'^e \tag{۲-۲۹}$$

در این معادله $\tilde{\mathbf{K}}'^e$ ماتریس سختی المان، $\tilde{\mathbf{F}}'^e$ بردار نیروی گرهی و $\tilde{\mathbf{u}}'^e$ بردار جابجایی گرهی المان همگی در مختصات موضعی المان هستند.

××

مؤلفه‌های جابجایی گرهی در مختصات موضعی برحسب مؤلفه‌های متناظر در مختصات کلی عبارتند از:

(۲-۳۰)

که در آن $i = (1,2)$ است.

این معادله را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\tilde{\mathbf{u}}'^e = \tilde{\mathbf{R}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e \tag{۲-۳۱}$$

$\tilde{\mathbf{R}}^e$ ماتریس دوران نامیده می‌شود.

××

بردار جابجایی گرهی و ماتریس چرخش برای المان دو گرهی در دو بعد برابرند با:

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ u_{2y}^e \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\mathbf{R}}^e = \begin{bmatrix} \cos\phi^e & \sin\phi^e & 0 & 0 \\ -\sin\phi^e & \cos\phi^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi^e & \sin\phi^e \\ 0 & 0 & -\sin\phi^e & \cos\phi^e \end{bmatrix} \tag{۳۲-۲}$$

ماتریس $\vec{\mathbf{R}}^e$ ماتریسی اورتوگونال است یعنی معکوس آن با ترانهاده آن مساوی است:

(۳۳-۲)

××

حال معادله (۲-۳۱) را در $\left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}}$ ضرب می‌کنیم تا بدست آید:

$$\left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{u}}'^e = \left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{R}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e = \left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{-1} \vec{\mathbf{R}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e = \tilde{\mathbf{u}}^e \tag{۳۴-۲}$$

مؤلفه‌های بردار نیروی المان هم با قانون یکسانی تبدیل می‌شوند:

(۳۵-۲)

با کمک این روابط می‌توان رابطه بین $\tilde{\mathbf{F}}^e$ و $\tilde{\mathbf{u}}^e$ را تعیین کرد:

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{F}}'^e = \left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{K}}'^e \tilde{\mathbf{u}}'^e = \underbrace{\left(\vec{\mathbf{R}}^e\right)^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{K}}'^e \vec{\mathbf{R}}^e}_{\vec{\mathbf{K}}^e} \tilde{\mathbf{u}}^e \quad \text{or} \quad \tilde{\mathbf{F}}^e = \vec{\mathbf{K}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e \tag{۳۶-۲}$$

××

$\vec{\mathbf{K}}^e$ ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات کلی (global) بوده و برابر است با:

(۳۷-۲)

با جاگذاری به جای $\vec{\mathbf{R}}^e$ و $\vec{\mathbf{K}}'^e$ در معادله بالا خواهیم داشت:

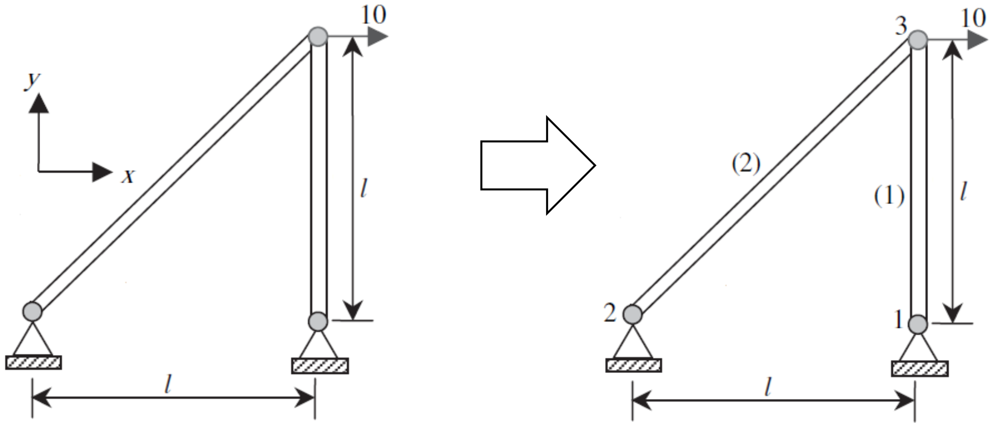
$$\vec{\mathbf{K}}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e \\ \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e \\ -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e \\ -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e \end{bmatrix} \tag{۳۸-۲}$$

همانطور که مشاهده می‌شود $\vec{\mathbf{K}}^e$ ماتریسی متقارن است.

××

مثال (۲-۲)

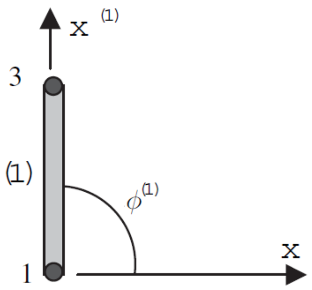
حل: در گام اول سازه را به المان‌هایی تقسیم می‌کنیم. هر میله یک المان هر اتصال یک گره.



××

در گام دوم ماتریس سختی هر المان را بدست می‌آوریم. ابتدا المان اول:

این المان دارای گره‌های شماره ۱ و ۳ کلی است و با جهت مثبت محور x زاویه $\phi^{(1)}=90^{\circ}$ می‌سازد. ضمناً داریم:

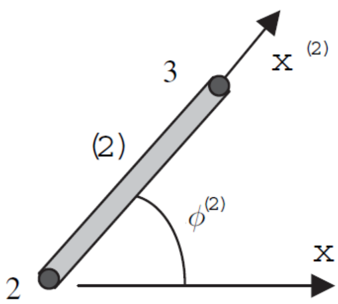


بنابراین مطابق با معادله (۲-۳۸) ماتریس سختی المان برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}}^{(1)}=\frac{AE}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_{1x} & u_{1y} & u_{3x} & u_{3y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{array}$$

××

حال المان دوم: این المان دارای گره‌های شماره ۲ و ۳ کلی است و با جهت مثبت محور x زاویه $\phi^{(2)}=45^{\circ}$ می‌سازد. ضمناً داریم:



بنابراین مطابق با معادله (۲-۳۸) ماتریس سختی المان برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}}^{(2)}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_{2x} & u_{2y} & u_{3x} & u_{3y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{array}$$

××

$$\vec{\mathbf{K}}=\frac{AE}{l}\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{2x} & u_{2y} & u_{3x} & u_{3y} \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\\
0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\
0 & -1 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} u_{1x}\\ u_{1y}\\ \underline{u_{2x}}\\ \underline{u_{2y}}\\ \underline{u_{3x}}\\ \underline{u_{3y}} \end{matrix}
\end{array}$$

××

از طرف دیگر داریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}=\begin{bmatrix} u_{1x}\\ u_{1y}\\ u_{2x}\\ u_{2y}\\ u_{3x}\\ u_{3y}\end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{f}}=\begin{bmatrix} r_{1x}\\ r_{1y}\\ r_{2x}\\ r_{2y}\\ 10\\ 0\end{bmatrix}$$

به همین ترتیب اگر مؤلفه‌ای از جابجایی در یک گره از پیش معین باشد مؤلفه نیروی متناظر عکس‌العملی مجهول خواهد بود.

××

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}}\\
0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\
0 & -1 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ u_{3x}\\ u_{3y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{1x}\\ r_{1y}\\ r_{2x}\\ r_{2y}\\ 10\\ 0\end{bmatrix} \qquad \text{(الف)}$$

××

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2\sqrt{2}}&1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\u_{3x}\\u_{3y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\10\\0\end{bmatrix}$$

یا به عبارت ساده‌تر:

××

با حل این معادله جابجایی‌های مجهول حاصل می‌آید:

عکس‌العمل‌های مجهول هم مثل قبل از معادله (الف) حساب می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}r_{1x}\\r_{1y}\\r_{2x}\\r_{2y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{3x}\\u_{3y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10+20\sqrt{2}\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\10\\-10\\-10\end{bmatrix}$$

××

برای ارزیابی درستی جوابها می‌توان چک کرد که معادلات تعادل برقرار باشند:

در این قسمت تغییر شکل هر میله را حساب می‌کنیم:

$$\delta^{(1)}=u'^{1}_{2x}-u'^{1}_{1x}$$

از طرفی با توجه به معادله (۲-۳۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} u'^{1}_{1x} \\ u'^{1}_{1y} \\ u'^{1}_{2x} \\ u'^{1}_{2y} \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} \begin{bmatrix} u^{1}_{1x} \\ u^{1}_{1y} \\ u^{1}_{2x} \\ u^{1}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ 0 & 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{1}_{1x} \\ u^{1}_{1y} \\ u^{1}_{2x} \\ u^{1}_{2y} \end{bmatrix}$$

××

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} u'^{1}_{1x} \\ u'^{1}_{1y} \\ u'^{1}_{2x} \\ u'^{1}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{1}_{1x} \\ u^{1}_{1y} \\ u^{1}_{2x} \\ u^{1}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{1}_{1y} \\ -u^{1}_{1x} \\ u^{1}_{2y} \\ -u^{1}_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1y} \\ -u_{1x} \\ u_{3y} \\ -u_{3x} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ -10-20\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\delta^{(1)}}{l} = \frac{-10}{AE} \qquad \sigma^{(1)} = E\varepsilon^{(1)} = \frac{-10}{A} \qquad F^{(1)} = A\sigma^{(1)} = -10$$

××

به روشی کاملاً مشابه برای المان دوم می‌توان نشان داد:

$$\delta^{(2)} = u'^{2}_{2x} - u'^{2}_{1x} = \frac{20l}{AE} \qquad \varepsilon^{(2)} = \frac{\delta^{(2)}}{l} = \frac{10\sqrt{2}}{AE} \qquad \sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = \frac{10\sqrt{2}}{A}$$