

## باسمه تعالی

### فصل اول : نظریه ی گراف

۱: اگر  $A$  ماتریس مجاورت گراف  $G$  از مرتبه ی ۴ باشد. حاصل ضرب درایه های قطری ماتریس  $A^2$ ، کدام عدد نمی تواند باشد؟ (کنکور ۱۳۸۰)

۳ (۱)                      ۱۲ (۲)                      ۱۸ (۳)                      ۳۶ (۴)

حل: می دانیم که هر درایه ی ماتریس  $A^2$  برابر درجه ی یکی از رأس های گراف متناظر است. حال چون مرتبه ی گراف ۴ می باشد، هریک از اعداد مربوط به گزینه ها را به حاصل ضرب ۴ عدد طبیعی کمتر از ۴ تبدیل می کنیم. (درجه ی هر رأس در این مورد کمتر از ۳ و مخالف صفر است)

$$3 = 3 \times 1 \times 1 \times 1$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2 \times 1$$

$$18 = 3 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$36 = 3 \times 3 \times 2 \times 2$$

از طرفی تعداد رئوس فرد در هر گراف باید زوج باشد. لذا گزینه ی ۳ نمی تواند مربوط به درجات رئوس یک گراف باشد.

۲: گرافی که دنباله ی درجه ی رأس هایش « ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ » می باشد، چگونه است؟ (کنکور ۱۳۸۰)

(۱) قطعاً دور دارد                      (۲) درخت                      (۳) همبند                      (۴) ناهمبند

حل: این گراف از مرتبه ی ۸ است. از طرفی

$$D = 2q = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12 \rightarrow q = 6$$

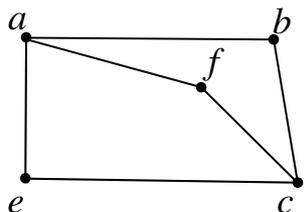
یعنی گراف دارای اندازه ی ۶ می باشد. اگر این گراف دارای حداقل  $\binom{8-1}{2} + 1 = \binom{7}{2} + 1 = 22$  یال باشد، همبند

می شود. حال چون تعداد یال های آن کمتر از ۲۲ می باشد، لذا ناهمبند است.

۳: در گراف  $G$  با درجه ی رأس های « ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ » دو رأس با ماکسیمم درجه غیر مجاورند. تعداد دور های با طول ۴ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۱)

۳ (۱)                      ۲ (۲)                      ۱ (۳)                      ۰ (۴)

حل : با توجه به صورت مسئله می توان گراف زیر را رسم کرد.

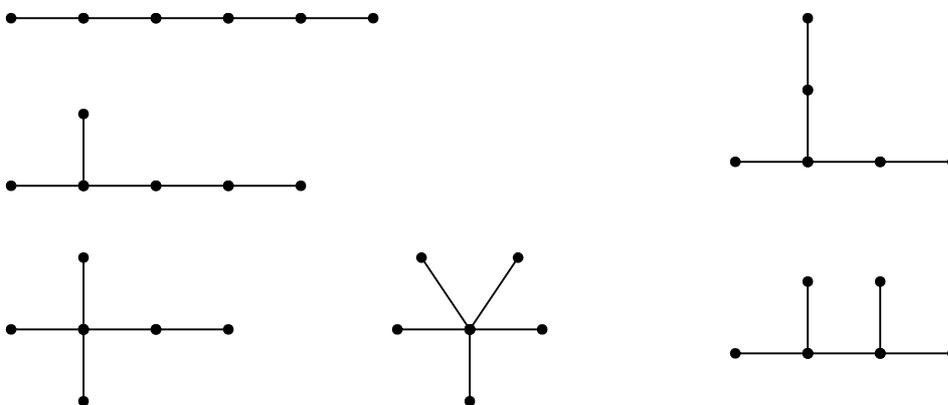


این گراف فقط سه دور به طول ۴ دارد. این دور ها عبارتند از:  $abcea$  و  $abcfa$  و  $afcea$ .

۴ : تعداد درخت های از مرتبه ی ۶ چند تا است؟ (کنکور ۸۲)

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

حل : با توجه به تعریف درخت های متفاوت ، گزینه ی ۳ درست است.



۵: درجه ی رأس های گراف همبند  $G$  به صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و  $b$  و  $a$  است، کمترین عدد  $a + b$  کدام است؟ (کنکور

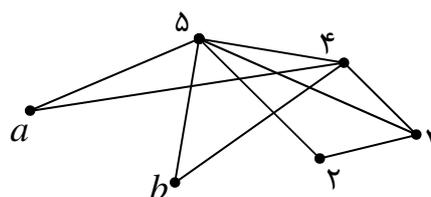
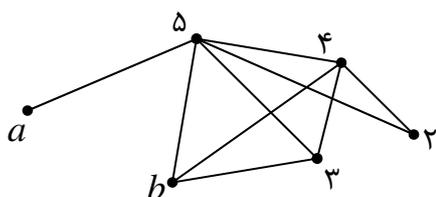
۱۳۸۳)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

حل : چون گراف دارای ۶ رأس بوده و رأس درجه ۵ دارد، لذا برای هر دو رأس با درجه های  $a$  و  $b$  یک یال رسم شده است؟ از

رأس با درجه ی ۴ نیز لااقل به یکی از رأس های با درجه  $a$  یا  $b$  یک یال رسم شده است. پس الزاماً یکی از عدد های  $a$  یا  $b$

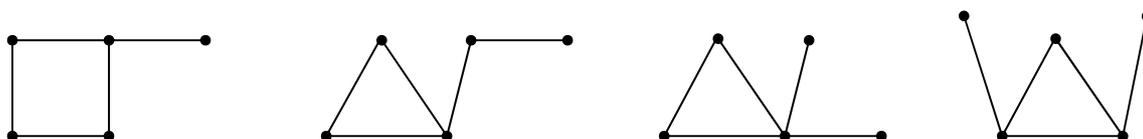
مساوی یا بزرگتر از ۲ می باشد. از طرفی باید تعداد رأس های فرد، زوج باشد. در نتیجه کمترین مقدار  $a + b$  می تواند ۴ باشد.



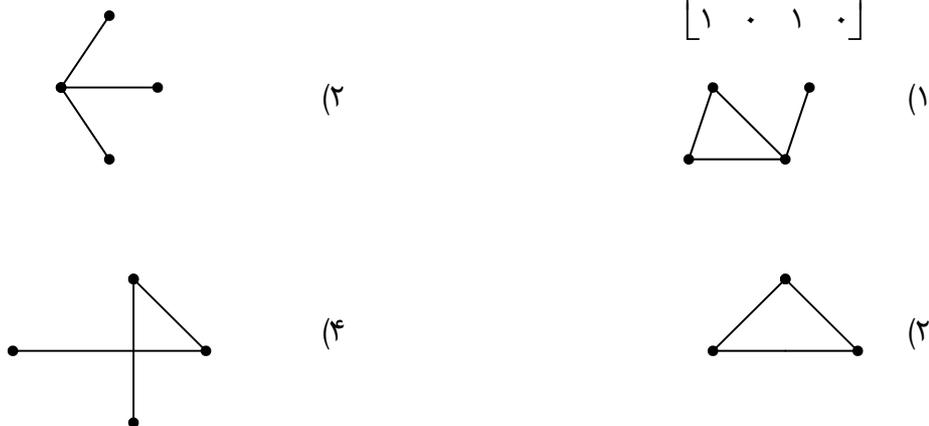
۶: چند نوع گراف ساده، همبند و نامنظم که مجموع مرتبه و اندازه ی آن ۱۰ باشد، وجود دارند؟ (کنکور ۱۳۸۴)

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

حل: مجموعه مرتبه و اندازه ی هر درخت عددی فرد است. پس این گراف درخت نیست. چون این گراف همبند است، الزاماً دارای دور کمتر از ۵ می باشد. زیرا گراف با طول دور ۵ با در نظر گرفتن اندازه و مرتبه هر دو ۵ است، یک گراف منتظم می باشد. لذا طول دور ۳ یا ۴ می توانند باشد. چون قرار است گراف نامنظم باشد، پس باید دور به طول ۳ داشته و  $p = q = 5$  باشد. (گزینه ی ۲)

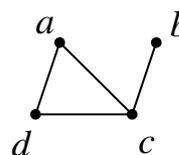


۷: ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  متناظر با کدام گراف است؟ (کنکور ۱۳۸۴)



حل: این ماتریس  $4 \times 4$  و متقارن و دارای داراییه های ۱ و ۰ بوده و تمام داراییه های روی قطر اصلی آن صفر هستند. پس با توجه با ماتریس زیر، گزینه ی ۱ درست است.

$$A = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \\ c & \\ d & \end{matrix}$$



۸: در یک گراف ساده از مرتبه ی ۶، دنباله ی درجه رأس های آن، به کدام صورت می تواند باشد؟ (کنکور ۱۳۸۵)

- (۱) ۰ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵  
 (۲) ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵  
 (۳) ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵  
 (۴) ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵

حل: این گراف دارای ۶ رأس می باشد. لذا

گزینه ی ۱ نادرست است، زیرا دارای یک رأس از درجه ی  $p - 1 = 5$  می باشد. لذا همبند است و چون همبند است، نمی تواند رأس درجه ی صفر داشته باشد.

گزینه ی ۲ نادرست است، زیرا در آن تعداد رئوس فرد آن فرد است. (باید زوج باشد).

گزینه ی ۳ نادرست است، زیرا اگر گراف دارای دو رأس درجه ی ۴ و ۵ باشد، نمی تواند یک رأس درجه ی صفر و دو رأس درجه ی ۱ داشته باشد.

پس گزینه ی ۴ درست است.

۹: در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس های زوج عددی ..... و تعداد رأس های فرد عددی ..... است. (کنکور ۱۳۸۶)

- (۱) فرد - فرد      (۲) فرد - زوج      (۳) زوج - فرد      (۴) زوج - زوج

حل: تعداد رئوس فرد، باید زوج باشد. حال چون تعداد کل رئوس زوج (۱۶) است، پس تعداد رئوس زوج این گراف خاص نیز زوج است. زیرا اگر از  $p = 16$  یک عدد زوج (تعداد رئوس فرد) جدا شوند، تعداد رئوس باقی مانده (تعداد رئوس زوج) باید زوج باشد.

۱۰: اگر  $A$  ماتریس مجاورت یک درخت و حاصل ضرب درایه های قطری ماتریس  $A^2$  برابر ۲۴ و ماکسیمم درجه ی آن ۴ باشد. (کنکور ۱۳۸۶)

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۷      (۴) ۸

حل: ابتدا ۲۴ را به حاصل ضرب تبدیل می کنیم.

$$24 = \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{رأس } 3} \times \underbrace{\dots \times 1}_{\text{رأس } p-3}$$

$$\underbrace{4, 3, 2, 1, \dots, 1}_{\text{رأس } p}$$

$$D = 2q \rightarrow 4 + 3 + 2 + (p - 3) \cdot 1 \rightarrow 2q = p + 6 \xrightarrow{p-q=1} q = 7$$

۱۱: در یک گراف کامل از مرتبه ی ۵ چند دور با طول ۴ وجود دارد. (کنکور ۱۳۸۷)

- ۹ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۵ (۳)      ۲۰ (۴)

حل :

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2} = \binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

۱۲: اگر  $A$  ماتریس مجاورت گراف همبند  $G$  باشد، کدام دنباله ی اعداد برای درایه های قطر  $A^2$  مورد قبول است. (کنکور

۱۳۸۸)

- ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ (۱)      ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ (۲)

- ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ (۳)      ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ (۴)

گزینه ی ۱ درست نیست، زیرا گراف همبند، نمی تواند رأس درجه ی صفر داشته باشد.

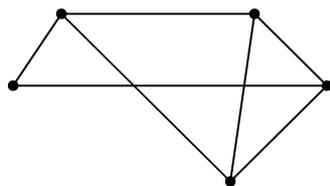
گزینه ی ۲ درست نیست زیرا تعداد رئوس فرد آن فرد است. (باید زوج باشد).

گزینه ی ۳ درست نیست زیرا گراف از مرتبه ی ۵ نمی تواند رأس درجه ی ۵ داشته باشد. (باید حداکثر درجه ی رأس

$$p - 1 = 4 \text{ باشد.})$$

پس گزینه ی ۴ درست است.

۱۳: دو رأس متناظر با بازه های  $(a, b)$  و  $(c, d)$  از اعداد حقیقی مجاورند به شرط



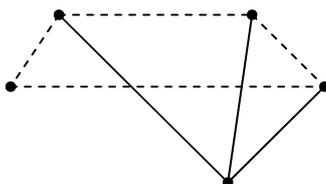
آنکه اشتراک این دو بازه تهی نباشد. گراف مقابل به چند طریق می تواند، گراف بازه ای

باشد؟ (کنکور ۱۳۸۸)

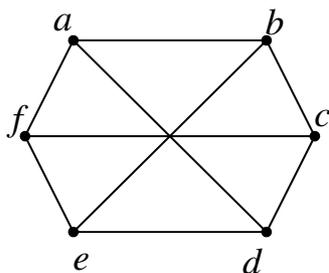
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ نشدنی (۳)      ۳ (۴)

حل : اگر در گرافی چهارضلعی فاقد قطر یافت شود، آن چهارضلعی نمی تواند بازه ای باشد.

به چهار ضلعی در گراف داده شده توجه کنید.



\*\*\*



۱۴ : در گراف ۳- منتظم مقابل، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ (کنکور ۱۳۸۹)

- ۶ (۱)      ۹ (۲)      ۸ (۳)      ۷ (۴)

حل : تمام دور های به طول ۴ در گراف مقابل عبارتند از:

$abcda$  و  $bcdab$  و  $cdefc$  و  $defad$  و  $efabe$  و  $fabcf$  و  $abeda$  و  $fcdaf$  و  $befcb$

که به تعداد ۹ مسیر می باشند.

\*\*\*

۱۵ : اگر  $A$  ماتریس مجاورت یک درخت با مرتبه  $7$  باشد. مجموع درایه های قطری ماتریس  $A^2$  کدام است؟

(کنکور ۱۳۸۹)

- ۸ (۱)      ۱۴ (۲)      ۱۲ (۳)      ۹ (۴)

حل :

$$A^2 \text{ مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس } = 2q = 2(p - 1) = 2(7 - 1) = 12$$

\*\*\*

موفق باشید.

**جابر عامری ، دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی**