« ریاضی هشتم »

Derakhtedanesh8.blog.ir

09190475485

فصل ۱
اعداد صحیح وگویا

اعداد صحیح:

*** حرکت بر روی محور :** جابجایی از یک نقطه به نقطه دیگر را حرکت گویند، و اگر ایـن حرکـت در جهت مثبت (سمت راست)باشد، با علامت مثبت و اگر در جهت منفی(سمت چپ) باشد، علامت منفی خواهد داشت.

◀ **مثال :**

*** قرینه :** به اعدادی که فاصله ی آن ها تا مبدأ (صفر) با هم برابر، اما در جهت مخالف یکدیگر قرار دارند، دو عدد قرینه گویند :

◀ **مثال :** $-(+۷)=-۷ \quad , \quad -(-۱۲)=+۱۲$

*** جمع و تفریق اعداد صحیح :**

۱) اگر هر دو عدد هم علامت باشند، باهم جمع شده با علامت مشترک.

۲) اگر علامت های مختلف داشته باشند، از هم کم شده با علامت عدد بیش تری (بدون توجـه بـه علامت، عدد بیش تر باشد) ◀ **مثال:**

$$(-۱۲)+(-۵)=-۱۷$$
$$(+۸۰)-(+۶۰)=۸۰-۶۰=۲۰$$

*** ضرب و تقسیم اعداد صحیح :**

× یا ÷	+	-
+	+	-
-	-	+

◀ **مثال :**

$$(-۷)\times(-۵)=+۳۵ \quad , \quad (-۶۰)\div(+۱۲)=-۵$$

ایستگاه ریاضی ۸

*** حق تقدم در محاسبات ریاضی :**

۱) پرانتز ۲) توان یا جذر ۳) ضرب و تقسیم از چپ به راست

۴) جمع و تفریق از چپ به راست

◀ مثال :

$$۴+۶\div\underbrace{(-۵+۲)}_{-۳}\times۴-۷=۴+\underbrace{۶\div(-۳)\times۴}_{-۸}-۷=۴-۸-۷=-۱۱$$

*** جمع اعداد متوالی (پشت سرهم) :** اعداد را دوبار جمع می زنیم. یک بار از کوچک بـه بـزرگ (صعودی) و بار دیگر از بزرگ به کوچک (نزولی) تا الگویی کشف شود. این روش را آقای گـاوس در کودکی کشف نموده است.

◀ مثال : مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰ را به دست آورید.

پاسخ : به صورت ستونی جمع می کنیم :

$$\begin{array}{c} ۱+۲+۳+۴+...+۴۸+۴۹+۵۰ \\ ۵۰+۴۹+۴۸+۴۷+...+۳+۲+۱ \\ \hline ۵۱+۵۱+۵۱+۵۱+...+۵۱+۵۱+۵۱ \end{array}$$

در نتیجه : ۵۰ تا ۵۱ خواهیم داشت یعنی : $۵۰\times۵۱=۲۵۵۰$

اما چون دوبار جمع زدیم پس حاصل را بر ۲ تقسیم می کنیم : $۲۵۵۰\div۲=۱۲۷۵$

ایستگاه ریاضی ۸

مطالعه بیش تر

کارد فریدریس گاوس در ۱۱ اردیبهشت ۱۱۵۵ شمسی در آلمان متولد شد. پدرش کشـاورز بـود و وضـع مـالی ضعیفی داشتند. در زمان کودکی (حدود ۱۰ ساله) توانست برای اولین بار مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با الگویـابی محاسبه کند. او از ریاضی دانان مشهور عصر خود بود و به نام شاهزاده ی ریاضی معروف بود. در رشته ی فیزیک توانست دستگاه انحراف مغناطیسی و مغناطیس سنج را اختراع کند. در ریاضیات نیز قضیه هـای مهمـی ماننـد قضیه بنیادین جبر و قضیه اعداد مختلط را اثبات کرد. سرانجام پس از ۷۹ سال دارفانی را وداع گفت.

معرفی عددهای گویا

* به هر عددی که بتوانیم آن را به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر عدد صحیح بنویسیم به طوری که مخرج صفر نباشد، عدد **گویا** می گوییم.

◀ مثال :

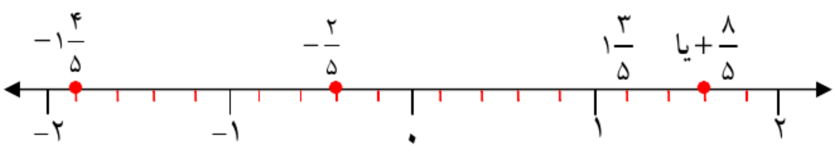
$$-\frac{۵}{۶}\,,\ \frac{۸}{-۳}\,,\ ۰/۷\,,\ -۲\frac{۱}{۳}\,,\ ۱۸$$

نکته (۱) : هر کدام از عددهای طبیعی و صحیح نیز یک عدد گویا هستند.

$$۵۰ = \frac{+۵۰}{۱} = +\frac{۱۰۰}{۲}$$

نکته (۲) : هر عدد گویا را می توانیم روی محور اعداد نمایش دهیم.

◀ **مثال** :



ایستگاه ریاضی ۸

نکته (۳) : قرینه ی اعداد گویا همانند عددهای صحیح است.

◀**مثال** :

$$-(+2\frac{3}{4}) = -2\frac{3}{4} \qquad\qquad -(-\frac{7}{5}) = +\frac{7}{5}$$

نکته (۴) : برای نوشتن معکوس هر عدد گویا، جای صورت و مخرج آن را عوض می کنیم.

◀**مثال** :

(مخلوط به کسر) $-4\frac{2}{3} \xrightarrow[-\frac{14}{3}]{\text{معکوس}} -\frac{3}{14}$ ، $-\frac{11}{6} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{6}{11}$

نکته (۵) : اگر بخواهیم کسرهایی مساوی با یک کسر بنویسیم، کافی است که صورت و مخرج آن را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم.

$$-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8} = -\frac{9}{12} = -\frac{12}{16} = \dots$$

×۲

×۲

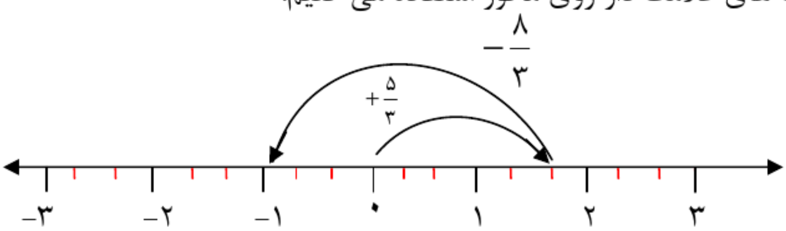
نکته (۶) : علامت کسر می تواند در کنار، صورت یا مخرج کسر گذاشته شود.

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$$

٭ جمع و تفریق اعداد گویا

الف) به کمک محور : از حرکت های علامت دار روی محور استفاده می کنیم.

◀**مثال** :



$$(+\frac{5}{3}) + (-\frac{8}{3}) = -\frac{3}{3} = -1$$

ایستگاه ریاضی ۸

ب) بدون محور : اگر مخرج کسرها مساوی باشند، یکی از مخرج ها را نوشته و حاصل صورت ها را طبق علامت ها کم یا زیاد می کنیم و اگر مخرج ها مساوی نباشند ابتدا باید مخرج مشترک (ک.م.م) گرفته و سپس حاصل را به دست می آوریم.

◀ مثال :

$$(-\frac{۴}{۹})+(+\frac{۵}{۹})=\frac{-۴+۵}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

$$(+\frac{۵}{۷})+(-\frac{۲}{۳})=\frac{+۱۵-۱۴}{۲۱}=\frac{۱}{۲۱}$$

$$(-\frac{۳}{۱۰})\overset{+}{-}(-\frac{۴}{۱۵})=\frac{-۹+۸}{۳۰}=\frac{-۱}{۳۰}$$

ک.م.م [۱۰ و ۱۵]=۳۰

❋ ضرب اعداد گویا

ابتدا علامت ها را درهم ضرب کرده، سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می شود.

نکته : اعداد مخلوط را به کسر تبدیل می کنیم و قبل از ضرب چنانچه ساده شوند، ساده می کنیم.

◀ مثال :

$$(-\frac{\cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۱۵}_{۳}})\times(+\frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۱۶}_{۴}})=-\frac{۱}{۱۲}$$

❋ تقسیم اعداد گویا

در تقسیم اعداد گویا : عدد اول خودش، علامت تقسیم به علامت ضرب و عدد دوم معکوس می شود. ادامه ی عملیات مانند ضرب است. ◀ مثال:

$$(+۴\frac{۲}{۵})\div(-\frac{۲}{۷})=(+\frac{\cancel{۲۲}^{۱۱}}{۵})\times(-\frac{۷}{\cancel{۲}_{۱}})=-\frac{۷۷}{۵}$$

نکته

$x<۲$ یعنی همه ی عددهای کوچک تر از ۲

$x>۲$ یعنی همه ی عددهای بزرگ تر از ۲

$x\geq۲$ یعنی همه ی عددهای بزرگ تر از ۲ یا مساوی آن.

ایستگاه ریاضی ۸

$۱ < x < ۳$ یعنی همه ی عددهای بین ۱ و ۳ (خود ۱ و ۳ جزء این اعداد نیستند).

$۰ < x \le ۵$ یعنی همه ی عددهای بین ۰ و ۵ به همراه خود عدد ۵

$-۲ \le x \le ۴$ یعنی همه ی عددهای بین ۲- و ۴ و خود عددهای ۲- و ۴

اشتباهات رایج

* بگوییم $-۲\frac{۳}{۵}$ یعنی ۲- واحد باضافه $-\frac{۳}{۵}$.

* نگوییم : $-۲\frac{۳}{۵}$ یعنی $-۲+\frac{۳}{۵}$.

* موقع ساده کردن، نمی توانیم عددهای صورت را باهم یا مخرج ها را باهم ساده کنیم. در ضمن حتماً باید عمل ضرب باشد.

مثال :

(۵ ها باهم ساده نمی شوند) $\frac{۵+۱۲}{۷+۵} = \frac{۱۷}{۱۲}$

* وقتی یک کسر را معکوس می کنیم، علامتش تغییر نمی کند. $-\frac{۷}{۵} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{۵}{۷}$

* عدد صفر معکوس ندارد. چون تقسیم بر صفر معنی ندارد. (تعریف نشده).

$\frac{۰}{۱} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{۰}$ (تعریف نشده)

*روش دور در دور ونزدیک در نزدیک:

در تقسیم دو کسر،اعداد دور را درهم ضرب و در صورت می نویسیم و اعداد نزدیک به هم را نیز درهم ضرب و در مخرج می نویسیم. مثال:

$$\frac{-\frac{۴}{۵}}{+\frac{۲}{۳}} = -\frac{۴\times ۳}{۵\times ۲} = -\frac{۱۲}{۱۰} = -\frac{۶}{۵}$$

* تبدیل کسر به اعشار:

الف) صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم اگر باقی مانده صفر شود، آن را عدد اعشاری مختوم می نامند.

◀مثال : $\frac{۴}{۵} = ۰/۸$

ب) اگر در تقسیم باقی مانده صفر نشده و عدد اعشاری مرتب تکرار شود به آن متناوب ساده گویند.

◀مثال :

(خط تیره یعنی عدد ۳ چندین بار تکرار شده است) $\frac{۱}{۳} \cong ۰/۳۳۳۳۳...... = ۰/\overline{۳}$

ج) اگر اعداد اعشاری پس از چند رقم دوباره تکرار شوند، آن عدد را متناوب مرکب گوییم.

$\frac{۷}{۱۵} \cong ۰/۴۶۶۶۶..... = ۰/۴\overline{۶}$

*پیدا کردن عددی گویا بین هر دو عدد گویا:

الف) هم مخرج کردن : بین $\frac{۴}{۵}, \frac{۳}{۴}$ یک کسر بنویسید.

$\frac{۴}{۵} = \frac{۳۲}{۴۰}$ و $\frac{۳}{۴} = \frac{۳۰}{۴۰}$

در نتیجه : $\frac{۳}{۴} < \frac{۳۱}{۴۰} < \frac{۴}{۵}$

ب) جمع کردن صورت ها باهم و مخرج ها باهم.

◀مثال بین $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{٤}$ یک کسر پیدا کنید.

$\frac{۱}{۴} < \frac{۱+۱}{۴+۳} < \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۷} < \frac{۱}{۳}$

ایستگاه ریاضی ۸

فصل «۲»
حساب عددهای طبیعی

اعداد طبیعی به سه دسته تقسیم می شوند : اعداد اول، اعداد مرکب و عدد یک.

شمارنده:

به عددهای طبیعی که عددی مانند b بر آن ها بخش پذیر است، شمارنده ها یا مقسوم علیه های عدد b می گویند.

◀ مثال :

۱۸ و ۹ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱ : شمارنده های طبیعی ۱۸

۷ و ۱ : شمارنده های طبیعی ۷

عدد اول:

به عددهای طبیعی که فقط ۲ شمارنده (یک و خود عدد)داشته باشند عدد اول گویند.

مانند :

۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ....

عدد مرکب:

به هر عدد طبیعی که بیش از ۲ شمارنده داشته باشد، عدد مرکب گویند. مانند ۱۸.

❊ هر عدد مرکب را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک نوشت.

مانند :

۱۰=۲×۵ و ۱۲=۴×۳ و ۲۱=۳×۷

نکته :عدد یک نه اول است و نه مرکب.

ب. م.م و ک.م.م:

ب.م.م دو عدد : حاصل ضرب شمارنده های اول مشترک با کم ترین تکرار (توان کمتر)

ایستگاه ریاضی ۸

ک.م.م دو عدد : حاصل ضرب شمارنده های اول مشترک و غیرمشترک با بیش ترین تکرار (توان بیشتر)

※ اگر ب.م.م دو عدد برابر یک باشد، گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول (متباین) هستند.

◀مثال :

(۱۵ و ۴۹)=۱ و (۱۱ و ۷)=۱ و (۹ و ۸)=۱

نکات

۱- هر دو عدد متوالی (پشت سر هم) نسبت به هم اول (متباین) هستند.۱=(۱۵ و ۱۴)

۲- هر دو عدد اول متفاوت نسبت به هم اول اند. ۱=(۱۷ و ۵)

۳- ک.م.م دو عدد متباین می شود حاصل ضرب آن ها.

◀مثال :

$$(۵,۷)=۱ \Rightarrow [۵,۷]=۵\times۷=۳۵$$

۴- بعضی از اعداد مرکب نسبت به هم اول اند. ۱=(۲۷ و ۲۵)

۵- اگر عددی اول باشد، همه ی مضرب هایش به جز خود عدد مرکب هستند.

۶- اگر عددی مرکب باشد، همه ی مضرب هایش نیز مرکب هستند.

تعیین عددهای اول

روش غربال (الک کردن) : این روش توسط اِراتّستن دانشمند یونانی کشف شده و چون در هر مرحله تعدادی از عددهای غیر اول حذف می شوند، به روش غربال مشهور است.

مراحل :

۱) عدد ۱ را خط می زنیم (عدد یک نه اول است و نه مرکب)

۲) همه ی مضرب های ۲ به جز خود ۲ را خط می زنیم.

۳) همه ی مضرب های ۳ به جز خود ۳ را خط می زنیم.

۴) همه ی مضرب های ۵ به جز خود ۵ را خط می زنیم.

ایستگاه ریاضی ۸

به این ترتیب خط زدن مضرب های اعداد اول را تا جایی ادامه می دهیم که به عدد اولی برسیم که مجذور (مربع) آن از بزرگ ترین عدد داده شده، بزرگ تر باشد.

◀مثال : اگر روش غربال را برای اعداد از ۱ تا ۸۰ به کار بریم، آخرین عدد اولی کـه بایـد مضـرب هایش را خط بزنیم چند است؟ عدد ۷ است زیرا : $۷^۲ = ۴۹ < ۸۰$

عدد اول بعد از ۷ عدد ۱۱ می باشد که $۱۱^۲ = ۱۲۱ > ۸۰$

روش تقسیم کردن (بخش پذیری)

برای تشخیص اینکه عددی اول است یا مرکب، آن عدد را بر عـددهای اول کوچـک تـر از جـذرش تقسیم می کنیم، اگر بر هیچ کدام بخش پذیر نبود، اول و در غیر این صورت مرکب است.

◀مثال :

آیا عدد ۹۷ اول است ؟ $\sqrt{۹۷} \cong ۹$

۹۷ را بر ۲ و ۳ و ۵ و ۷ تقسیم می کنیم.

۹۷ ÷ ۷ = ۱۳	۹۷ ÷ ۵ = ۱۹	۹۷ ÷ ۳ = ۳۲	۹۷ ÷ ۲ = ۴۸
۷	۵	۹	۸-
۲۷	۴۷	۰۷	۱۷
۲۱	۴۵	۶	۱۶
۶	۲	۱	۱

عدد ۹۷ بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ بخش پذیر نیست پس ۹۷ عددی اول است.

* در بخش پذیری می توان از قواعد بخش پذیری استفاده کرد.

* هر عدد زوج بر ۲ بخش پذیر است.

* عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

* عددی بر ۵ بخش پذیر است که یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

◀**مثال** :برای تشخیص اول یا مرکب بودن عدد ۱۷۱ حداکثر به چند تقسیم نیاز داریم ؟

$\sqrt{۱۷۳} \cong ۱۳/۱$

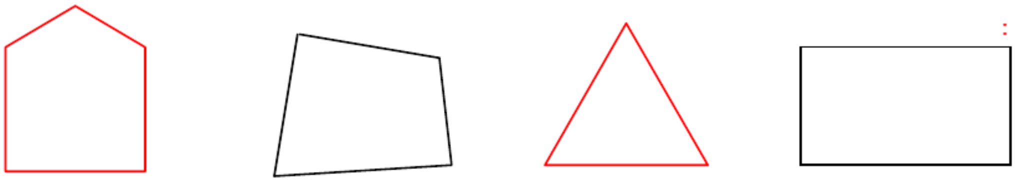
پس باید بخش پذیری بر اعداد ۱۳ و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ را بررسی کنیم یعنی ۶ تقسیم.

ایستگاه ریاضی ۸

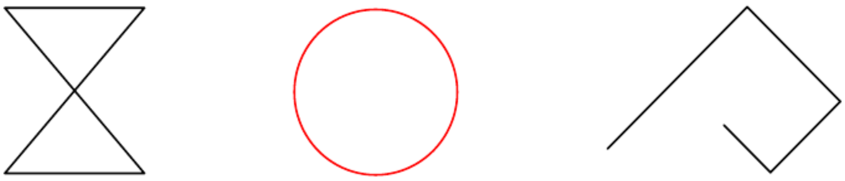
فصل ۳
چندضلعی ها

چندضلعی : به هر خط شکسته ی بسته به شرطی که اضلاعش هم دیگر را قطع نکنند، چندضلعی می گوییم.

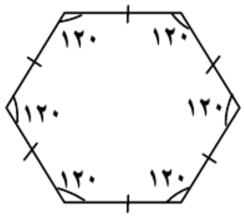
◀ مثال :



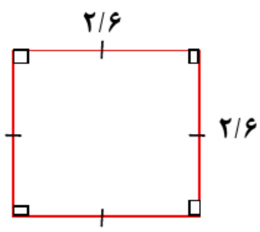
* شکل های زیر چندضلعی نیستند چرا؟



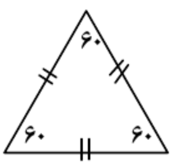
چند ضلعی منتظم : اگر در یک چندضلعی، همه ی ضلع ها باهم و همه ی زاویه ها باهم مساوی باشند، چندضلعی را منتظم گویند.



۶ ضلعی منتظم



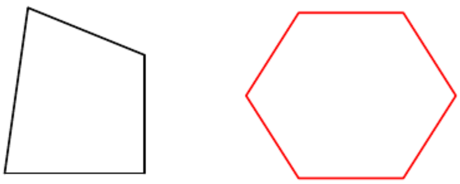
مربع



مثلث متساوی الاضلاع

چندضلعی محدب (کوژ) : به چندضلعی که همه ی زاویه های آن کوچک تر از ۱۸۰ درجه باشد، چندضلعی محدب (کوژ) گویند.

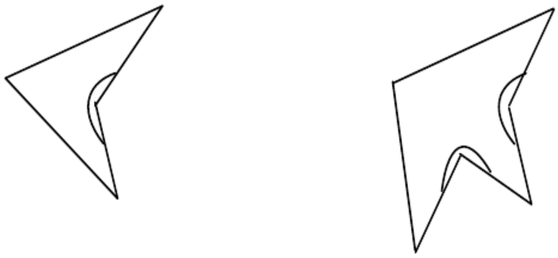
◀ مثال :



ایستگاه ریاضی ۸

چندضلعی مقعر (کاو) : چندضلعی که حداقل یک زاویه ی بزرگ تر از ۱۸۰ درجه داشته باشد مقعر یا کاو گویند.

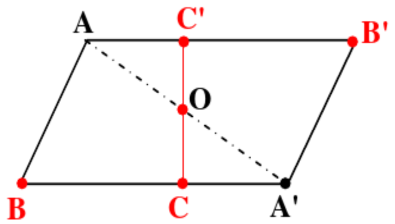
◀ مثال :



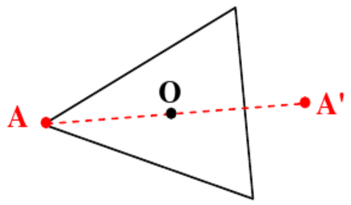
مرکز تقارن : اگر نتیجه ی دوران ۱۸۰ درجه ای یک شکل حول یک نقطه روی شکل قرار گیرد می گوییم شکل مرکز تقارن دارد.

تشخیص مرکز تقارن : برای اینکه مشخص کنیم یک نقطه مرکز تقارن شکل است یا نه، از هر نقطه روی شکل به نقطه ی داده شده وصل کرده و به همان اندازه ادامه می دهیم. اگر نقطه ی حاصل روی شکل قرار گرفت، نقطه ی داده شده مرکز تقارن می باشد در غیر این صورت مرکز تقارن نیست.

(O مرکز تقارن است)



(O مرکز تقارن نیست)



نکته

در چندضلعی های منتظم اگر تعداد ضلع ها زوج باشد، مرکز تقارن دارند و اگر تعداد ضلع ها فرد باشند، مرکز تقارن ندارند.

◀ مثال : ۸ ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی ۵ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

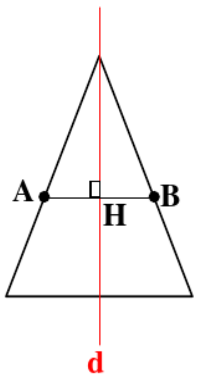
ایستگاه ریاضی ۸

محور تقارن (خط تقارن) : خطی است که اگر کاغذ را روی آن تا کنیم همه ی نقاط شکل روی هم قرار گیرند.

تشخیص محور تقارن : از هر نقطه روی شکل بر خط عمود کرده و به همان اندازه ادامه می دهیم، اگر نقطه حاصل روی شکل قرار گرفت، خط رسم شده محور تقارن می باشد.

مثال :

در مثلث متساوی الساقین خط d محور تقارن است زیرا $\overline{AH} = \overline{BH}$.



نکته

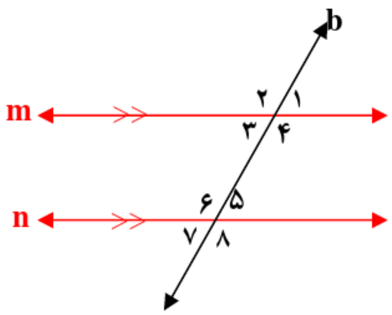
چند ضلعی های منتظم به تعداد ضلع هایشان خط تقارن دارند.

مثال : ۵ ضلعی منتظم ۵ محور تقارن و ۶ ضلعی منتظم ۶ محور تقارن دارد.

توازی و تعامد

اگر خطی مانند b دو خط n,m را چنان قطع کند که روی آن ها زاویه های مساوی ایجاد کند، می گوییم m با n موازی است. ($m \parallel n$)

(به خط b مورب گویند).



$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$, $\hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸}$

ایستگاه ریاضی ۸

نکات

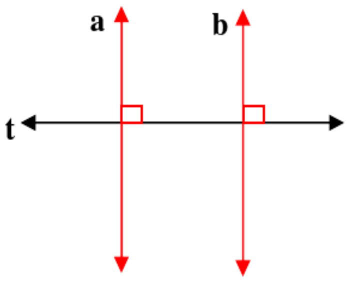
۱)اگر دو خط باهم موازی نباشند، آن ها را متقاطع گویند و با علامت || نشان می دهند.

۲)اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند روی آن ۸ زاویه ایجاد می شود که چهار زاویه تند آن و چهار زاویه باز آن باهم مساوی اند.

۳)دو خط موازی با یک خط باهم موازی اند.

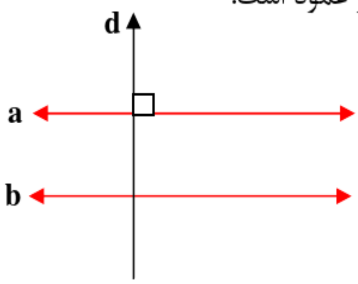
$$\left.\begin{array}{l} d_{۱} \| a \\ d_{۲} \| a \end{array}\right\} \Rightarrow d_{۱} \| d_{۲}$$

۴)دو خط عمود بر یک خط باهم موازی اند.



$$\left.\begin{array}{l} a \perp t \\ b \perp t \end{array}\right\} \Rightarrow a \| b$$

۵)اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.



$$\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ a \| b \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp b$$

چهارضلعی ها

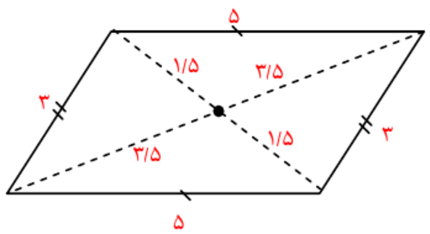
متوازی الاضلاع : چهارضلعی که ضلع های روبروی آن دو به دو باهم موازی اند.

مستطیل : متوازی الاضلاعی است که زاویه های قائمه دارد.

مربع : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه های قائمه دارد.

لوزی : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند.

خاصیت های متوازی الاضلاع :



۱) ضلع های روبرو باهم موازی و مساوی اند.

۲) زاویه های روبرو باهم مساوی اند.

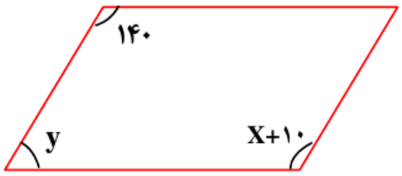
۳) قطرها همدیگر را نصف می کنند.

۴) زاویه های مجاور مکمل اند.

* مستطیل، مربع و لوزی همه ی خاصیت های متوازی الاضلاع را دارند.

ذوزنقه : چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن باهم موازی اند.

◀ مثال : شکل زیر متوازی الاضلاع است مقدار y,x را به دست آورید.



پاسخ :

$x + ۱۰ = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۱۴۰ - ۱۰ = ۱۳۰$

$y + ۱۴۰ = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۱۸۰ - ۱۴۰ = ۴۰$

نکات

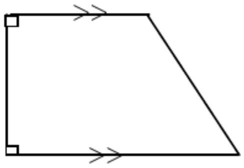
الف) در مربع قطرها باهم مساوی و عمود منصف یکدیگرند.

ب) مربع نوعی لوزی است اما هر لوزی مربع نیست.

ج) در مستطیل قطرها باهم مساوی اند.

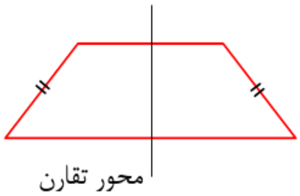
د) در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند.

ذوزنقه ای که یکی از ساق ها بر قاعده ها عمود باشد، ذوزنقه قائم الزاویه نامیده می شود.



ایستگاه ریاضی ۸

تعریف :ذوزنقه ای که ساق های آن باهم مساوی اند، ذوزنقه متساوی الساقین نامیده می شود.



دقت کنید

۱) اگر وسط ضلع های هر متوازی الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم، متوازی الاضلاع تشکیل می شود.

۲) اگر وسط ضلع های هر مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، لوزی تشکیل می شود.

۳) اگر وسط ضلع های هر لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، مستطیل تشکیل می شود.

۴) اگر وسط ضلع های هر مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم، مربع تشکیل می شود.

* مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

* مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی : $(n-۲)\times ۱۸۰$ (n تعداد اضلاع)

* اندازه ی یک زاویه داخلی چندضلعی منتظم : $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$

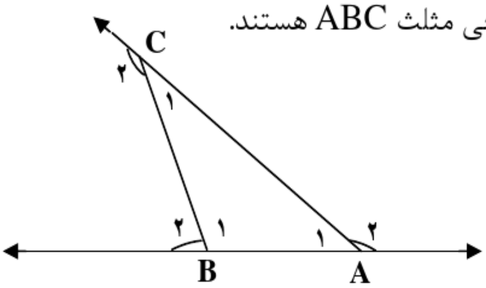
◄ مثال :اندازه ی یک زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟

$$n=۸ \Rightarrow \frac{(۸-۲)\times ۱۸۰}{۸}=\frac{۶\times ۱۸۰}{۸}=\frac{۱۰۸۰}{۸}=۱۳۵^\circ$$

زاویه خارجی : زاویه ای که در هر رأس یک چندضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود، زاویه ی خارجی آن رأس نامیده می شود.

ایستگاه ریاضی ۸

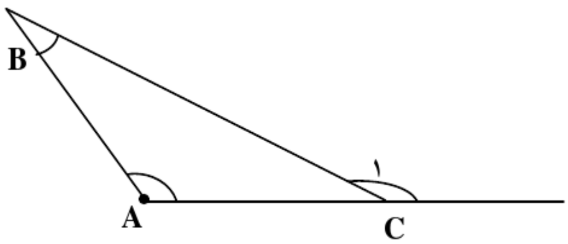
◀**مثال** : زاویه های $\hat{C}_{۲} , \hat{B}_{۲} , \hat{A}_{۲}$ زاویه های خارجی مثلث ABC هستند.



مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ درجه است و اندازه ی یک زاویه خارجی در n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{۳۶۰^{\circ}}{n}$.

در هر مثلث هر زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{C}_{۱} = \hat{A} + \hat{B}$$



تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

◀مثال :۶ ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{۶ \times (۶-۳)}{۲} = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹$$

فصل ۴
جبر ومعادله

☼**جملات متشابه** : جملاتی که قسمت حروفی و توان آن ها عیناً مثل هم باشند، متشابه نامیده می شوند. مانند : $\frac{۲}{۳}a^{۲}b , ۶a^{۲}b$

☼ساده کردن عبارت جبری

ابتدا جمله های متشابه را مشخص می کنیم، سپس ضرایب جملات متشابه را باهم جمع یا تفریـق کرده و جمله های غیرمتشابه را به همان صورت می نویسیم.

◄مثال :

$$\underline{۴m^{۲}} - ۵y + \underline{\underline{۲my}} - \underline{۶m^{۲}} + \underline{\underline{۱۰my}} = -۲m^{۲} - ۵y + ۱۲my$$

☼ضرب دو جمله ای

در ضرب دو جمله ی جبری، ضریب های عددی درهم و متغیرها (حرف ها) را نیز درهم ضرب مـی کنیم.

◄مثال: $۲a(۳b)=۶ab \quad , \quad -۵x(-۳x)=۱۵x^{۲}$

* در ضرب حروف، اگر حرف ها مثل هم باشند به صورت توان دار نوشته می شـوند و در غیـر ایـن صورت دنبال هم نوشته می شوند.

☼ضرب تک جمله ای در چند جمله ای

تک جمله ای در هر یک از جمله های چند جمله ای ضرب می شود.

◄مثال:

$$۳a(۴a-۵b)=۱۲a^{۲}-۱۵ab$$

☼ضرب چند جمله ای در چند جمله ای:

هر یک از جمله های چند جمله ای اول را در همه ی جمله های چند جمله ای دوم ضرب می کنیم.

◄مثال:

$(x+۵)(x-۳)=x^۲-۳x+۵x-۱۵=x^۲+۲x-۱۵$

* یک عدد دو رقمی را به صورت $\overline{ab}$ و یک عدد سه رقمی را به صورت $\overline{abc}$ و.... نشان می دهیم. مقلوب عدد $\overline{ab}$ را به صورت $\overline{ba}$ نشان می دهیم. مثلاً مقلوب عدد ۶۵ می شود ۵۶.

☼مقدار عددی یک عبارت جبری :

برای پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری، مقادیر داده شده را در عبارت جبری به جای متغیرها قرار می دهیم و با رعایت ترتیب انجام عملیات، مقدار عددی عبارت را به دست می آوریم.

◄مثال:

$$t=۶, k=-۳ \Rightarrow t^۲+۵kt=۶^۲+۵(-۳)(۶)=۳۶+(-۹۰)=-۵۴$$

☼تجزیه عبارت های جبری (تبدیل به ضرب) :

برای تبدیل یک عبارت جبری به ضرب دو عبارت طبق مراحل زیر عمل می کنیم :

۱- ب.م.م ضرایب را مشخص می کنیم.

۲- حروف مشترک را با توان کوچک تر همراه ب.م.م ضرایب می نویسیم.

۳- هر جمله را بر جمله ی مشترک تقسیم کرده و حاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

◄مثال:

$۴۲xy^۳-۳۵x^۲y^۲=.......(...........)$

۱) $(۴۲,۳۵)=۷$

۲) حروف مشترک با توان کم تر : $xy^۲$

۳) تک تک جملات را بر $۷xy^۲$ تقسیم می کنیم :

$$\frac{۴۲xy^۳}{۷xy^۲}=۶y,\frac{-۳۵x^۲y^۲}{۷xy^۲}=-۵x$$

در نتیجه :

$۴۲xy^۲-۳۵x^۲y^۲=۷xy^۲(۶y-۵x)$

☼حل معادله

روش اول : مانند سایر معادله ها، ابتدا عددهای معلوم و جمله های مجهول را با جابجایی مرتب کرده و سپس معادله را حل می کنیم.

◄مثال:

$$\frac{۳}{۵}x-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۳}{۵}x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳+۲}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

$$x=\frac{۵}{۴}\div\frac{۳}{۵}=\frac{۵}{۴}\times\frac{۵}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۲۵}{۱۲}$$

روش دوم : معادله را به روش غیر کسری در می آوریم. ابتدا همه ی جمله های هر دو طرف معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب کرده، پس از ساده کردن کسرها، معادله معمولی بدون کسر به دست می آید.

◄مثال:

۳۰= [۲ و ۳ و ۵]

$$۳۰\cdot(\frac{۲}{۵}x-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲})$$

$$\overset{۶}{\cancel{۳۰}}\times\frac{۲}{\underset{۱}{\cancel{۵}}}x-\overset{۱۰}{\cancel{۳۰}}\times\frac{۲}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}=\overset{۱۵}{\cancel{۳۰}}\times\frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}$$

$$۱۲x-۲۰=۱۵$$

$$۱۲x=۱۵+۲۰=۳۵$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{۳۵}{۱۲}$$

☼ اشتباهات رایج :

۱) عبارتی مثل $۳x+۳y$ ساده نمی شود چون جمله های آن متشابه نیستند.

۲) جملات $۲n$, $n+۲$ باهم برابر نیستند.

۳) عددها فقط در جمله های داخل پرانتز ضرب می شوند و در عبارت های بعد از پرانتز ضرب نمی شوند.

$$۵(۳x-۶y)+۷t=۱۵x-۳۰y+۷t$$

۴) عبارت $-۷x^۳y$ یک جمله به حساب می آید.

۵) $(a+b)^۲ \neq a^۲b^۲$

۶) $\overline{ab} \neq ab$ زیرا ab یعنی a در b ضرب می شود و $\overline{ab}$ یعنی عددی دو رقمی .

۷) برای محاسبه $۵(-۴)(-۳)$ از چپ به راست ضرب می کنیم که می شود ۶۰ و نباید ۵ را هم در ۴- و هم در ۳- ضرب کرد.

نکات:

۱- مجموع یک عدد دو رقمی و مقلوبش بر ۱۱ بخش پذیر است.

◄مثال:

$$۵۷ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۷۵ \longrightarrow ۷۵+۵۷=۱۳۲=۱۱\times۱۲$$

۲- تفاضل هر دو عدد دو رقمی از مقلوبش مضربی از ۹ است.

◄مثال:

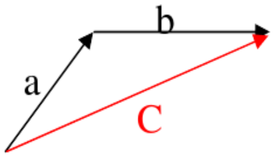
$$۷۴ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۴۷ \longrightarrow ۷۴+۴۷=۲۷=۳\times۹$$

فصل ۵
بردار و مختصات

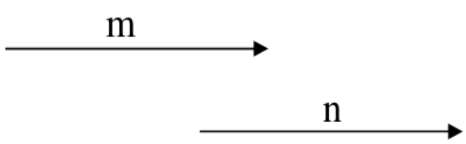
* جمع بردارها (برآیند) : اگر دو بردار دنبال هم باشند، بردار حاصل جمع آن ها برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کند، که بیش تر به روش مثلثی معروف است.

تساوی جبری

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{C}$$



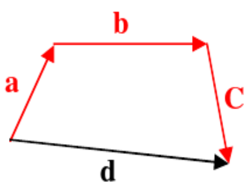
* بردارهای هم سنگ (مساوی) : هرگاه چند بردار هم اندازه، هم جهت و هم راستا باشند، به آن ها بردارهای مساوی گویند. $\vec{m}=\vec{n}$

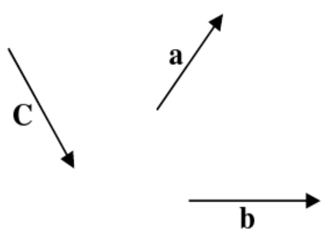


* حاصل جمع چند بردار : هم سنگ با هر بردار را طوری رسم می کنیم که بردارها دنبال هم باشند آن گاه بردار حاصل جمع برداری است که ابتدای اولی را به انتهای آخرین بردار وصل می کند.

(همراه با جهت)

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{C}=\vec{d}$$





* بردارهای قرینه : دو بردار که هم راستا، هم اندازه و دارای جهت مخالف باشند، بردارهای قرینه هستند .

بردار صفر را به صورت $\vec{O}$ نشان می دهند.

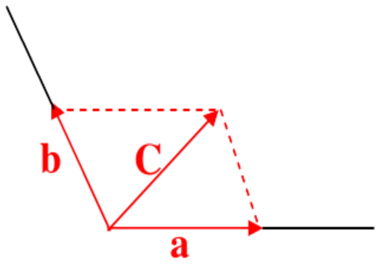
$$\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{O}$$

٭ تجزیه بردار : اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم، از انتهای آن بردار بـه مـوازات راسـتای داده شده رسم می کنیم هر کجا این خطوط با امتدادها برخورد کند، انتهای بردارهای تجزیه شـده مـی باشد.

◀ : مثال :

بردار $\vec{C}$ را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.

$$\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$$



٭ ضرب عدد در بردار:

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد هم در طول و هم در عرض بردار ضرب می شود.

$$\boxed{K\times\begin{bmatrix}b\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kb\\km\end{bmatrix}}$$

◀ مثال «۱» :

$$۵\times\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۲۰\end{bmatrix}\qquad,\qquad(-۳)\begin{bmatrix}-۶\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸\\-۶\end{bmatrix}$$

◀ مثال «۲» :

اگر $\vec{t}=\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}$ و $\vec{m}=\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\vec{x}=-۲\vec{t}+۳\vec{m}$ را به دست آورید.

$$\vec{x}=-۲\vec{t}+۳\vec{m}=(-۲)\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸\\۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱۵\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۳\\۱۲\end{bmatrix}$$

٭حل معادله مختصاتی:

هر معادله ی برداری یا مختصاتی را مانند معادلات معمولی و با مراحل زیر حل می کنیم :

۱. مجهول ها را در یک طرف تساوی و مختصات ها را در طرف دیگر تساوی می نویسیم.

۲. حاصل مجهول ها و حاصل عددهای معلوم را به دست می آوریم.

۳. طول و عرض مختصات حاصل را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

◀مثال :

معادله زیر را حل کنید :

$$۳\vec{x}+\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\+۳\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۹\div ۳\\ ۳\div ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix}$$

بردارهای واحد مختصات

بردار $\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ را بردار واحد طول و بردار $\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ را بردار واحد عرض می نامند. برای تبدیل مختصات یک بردار به بردارهای واحد کافی است عدد طول را ضریب $\vec{i}$ و عدد عرض را ضریب $\vec{j}$ قرار دهیم.

ایستگاه ریاضی ۸

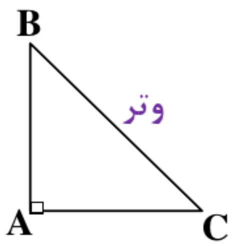
◀مثال: معادله ی $3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$ را حل کنید.

راه حل شیما	راه حل نادیا
$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$	$3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{x}=-5\vec{i}+\vec{j}$
$2\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	$2\vec{X}=-5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{i}-\vec{j}$
$2\vec{x}=\begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}$	$2\vec{x}=-8\vec{i}$
$\vec{x}=\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}$	$\vec{x}=-4\vec{i}$

فصل ۶
مثلث

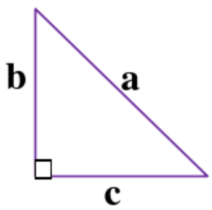
رابطه ی فیثاغورس:

مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است. زاویه A قائمه (راست)، AC,AB اضلاع قائم و BC وتر مثلث است.



رابطه ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر بیان می شود :

مربع ضلع قائم دیگر+ مربع یکی از ضلع های قائم = مربع وتر

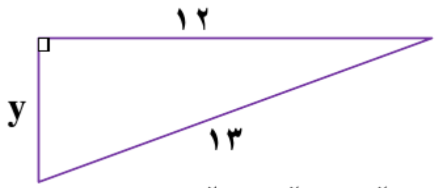


$$\boxed{a^2 = b^2 + C^2}$$

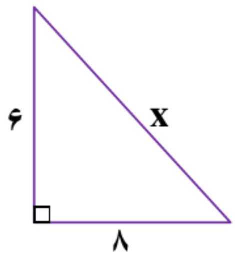
عکس این رابطه هم درست است یعنی اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

◀ مثال : «۱»

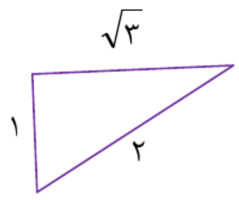
در شکل های زیر مقادیر y,x را به دست آورید.



$$۱۳^2 = y^2 + ۱۲^2$$
$$۱۶۹ = y^2 + ۱۴۴$$
$$y^2 = ۱۶۹ - ۱۴۴ = ۲۵$$
$$y = \sqrt{۲۵} = ۵ \Rightarrow \boxed{y=۵}$$



$$x^2 = ۶^2 + ۸^2$$
$$x^2 = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$$
$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$



◀مثال : «۲»

آیا مثلث زیر قائم الزاویه است؟ چرا؟ بله زیرا :

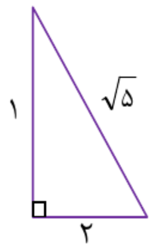
$$۲^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲$$

$$۴ = ۳ + ۱$$

$$۴ = ۴$$

* رسم پاره خطی به طول $\sqrt{b}$: ابتدا دو عدد پیدا می کنیم که اگر به توان دو رسانده و باهم جمع کنیم، عدد زیر رادیکال به دست می آید. سپس مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع این دو عدد رسم می کنیم. وتر مثلث به اندازه ی عدد داده شده می باشد.

◀مثال : «۱»



پاره خطی به طول $\sqrt{۵}$ سانتی متر رسم کنید.

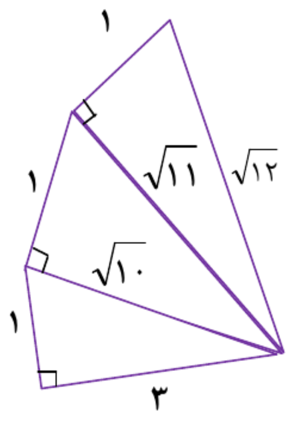
مثلثی به اضلاع ۱ و ۲ سانتی متر رسم می کنیم زیرا : $۱^۲ + ۲^۲ = ۱ + ۴ = ۵$ پس وتر مثلث جواب مسئله است.

مهسا با ماشین حساب $\sqrt{۵}$ را محاسبه کرد و حاصل تقریباً ۲/۳۶ شد سپس پاره خطی به طول ۲۳ میلی متر رسم کرد. آیا روش کار مهسا درست است؟

◀مثال : «۲»

پاره خطی به طول $\sqrt{۱۲}$ سانتی متر رسم کنید.

بزرگ ترین عددی که مجذور آن از ۱۲ کمتر باشد، عدد ۳ است. لذا مثلثی به اضلاع قائم ۳ و ۱ رسم کرده، سپس با عمود کردن ضلع های یک واحدی بر وترها، کار را ادامه داده تا به $\sqrt{۱۲}$ برسیم.

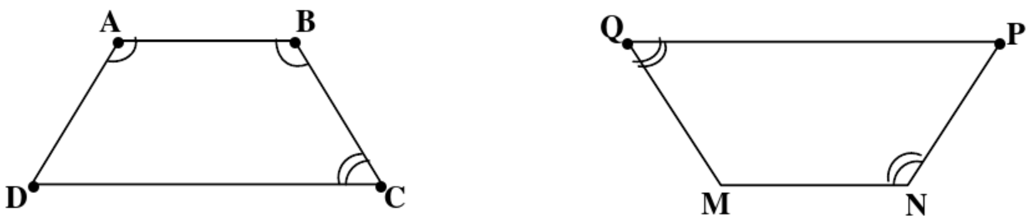


ایستگاه ریاضی ۸

شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) بر شکل دیگری منطبق کنیم به طوری که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می گوییم این دو شکل هم نهشت هستند.
با دوران ۱۸۰ درجه مرکزی دو شکل مقابل برهم منطبق می شوند پس هم نهشت اند.
اجزای متناظر :

$$\overline{AB}=\overline{MN},\ \overline{AD}=\overline{PN},\ \overline{BC}=MQ,\ \hat{A}=\hat{M},\ \hat{B}=\hat{M},\ \hat{C}=\hat{Q},\ \hat{D}=\hat{P},\ \overline{DC}=PQ$$



◀مثال : دو مثلث MNP,ABC هم نهشت اند (انتقال). اندازه ی مجهول را به دست آورید.

$$\overline{AB}=\overline{MN}$$
$$۷=۳z+۱$$
$$۷-۱=۳z$$
$$۶=۳z$$
$$z=\frac{۶}{۳}=۲$$

$$\overline{AC}=\overline{MP}$$
$$x+۱=۲x-۸$$
$$۱+۸=۲x-x$$
$$\boxed{x=۹}$$

$$\overline{BC}=\overline{NP}$$
$$۲y=۱۲$$
$$y=\frac{۱۲}{۱۲}=۶$$
$$\boxed{y=۶}$$

ایستگاه ریاضی ۸

* حالت های هم نهشتی در مثلث ها :

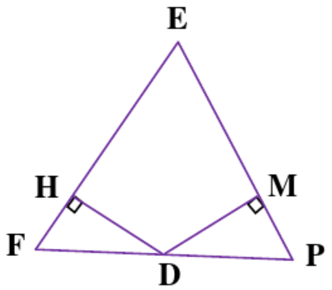
برای همه ی مثلث ها:

۱. سه ضلع (ض ض ض)
۲. دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
۳. دو زاویه و ضلع بین (زض ز)

مخصوص مثلث قائم الزاویه:

۴. وتر و یک ضلع (و ض)
۵. وتر و یک زاویه تند (و ز)

مثال : مثلث EFP متساوی الاضلاع و نقطه D وسط FP است چرا دو مثلث FHD و DPM هم نهشت اند؟



$$\left.\begin{array}{r} \text{(D وسط FP)}\ \overline{FD}=\overline{DP} \\ \text{(مثلث متساوی الاضلاع)}\ \hat{B}=\hat{C}=60^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \overset{\Delta}{FHD} \cong \overset{\Delta}{DMP}$$

نکته «۱» :

برخی از اعداد فیثاغورسی عبارتند از : (۱۰و ۸ و۶) ، (۵ و ۴ و۳) ، (۳۰و۲۴ و ۱۸)، (۱۳و۱۲ و۵)، (۲۶و ۲۴و۱۰)، (۱۷و۱۵و ۸)، (۲۶و ۲۴و ۷)، (۲۵و۲۰ و۱۵)

نکته «۲» :

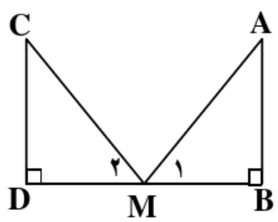
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

نکته «۳» :

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اشتباهات رایج :

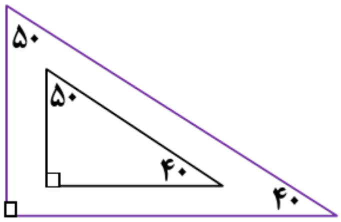
۱) در شکل مقابل زاویه های M_1, M_2 متقابل به رأس نیستند.



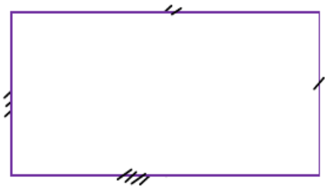
۲) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

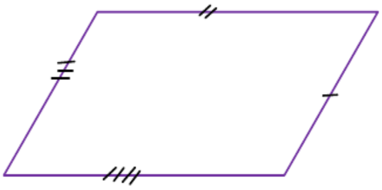
◀ مثال :

مثلث های زیر هم نهشت نیستند.



۳) حالت های هم نهشتی ۵ گانه مطرح شده مخصوص مثلث ها هستند و در شکل های دیگر مثل چهارضلعی ها برای اثبات هم نهشتی آن ها کاربرد ندارند مثلاً در چهارضلعی های زیر هر چهارضلع متناظر باهم برابرند، اما دو شکل هم نهشت نیستند.





شگفتی اعداد:

۱۳×۱۳+۱ =۱۷۰

۱۳۳×۱۳۳+۱۱=۱۷۷۰۰

۱۳۳۳×۱۳۳۳+۱۱۱=۱۷۷۷۰۰۰

۱۳۳۳۳×۱۳۳۳۳+۱۱۱۱=۱۷۷۷۷۰۰۰۰

فصل ۷
توان و جذر

* ضرب عددهای توان دار :

الف) در ضرب عددهای توان دار اگر پایه ها مساوی باشند، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را باهم جمع می کنیم.

$$\boxed{d^m \times d^n = a^{m+n}}$$

ب) در ضرب عددهای توان دار اگر توان ها مساوی باشند، یکی از تـوان هـا را نوشـته و پایـه هـا را درهم ضرب می کنیم.

$$\boxed{a^m \times b^m = (a \times b)^m}$$

◀ مثال:

$$۴^۷ \times ۴^۳ = ۴^{۷+۳} = ۴^{۱۰} \quad , \quad (\frac{۱}{۲})^۵ \times (۰/۵) = (۰/۵)^{۵+۱} = (۰/۵)^۶$$

$$(-۳)^{۱۱} \times (-۷)^{۱۱} = (-۳ \times -۷)^{۱۱} = ۲۱^{۱۱} \quad , \quad (\frac{۳}{۶})^{۲۰} \times ۸^{۲۰} = (\frac{۳}{۴} \times ۸)^{۲۰} = ۶^{۲۰}$$

* به توان رساندن یک عدد توان دار : برای به توان رساندن یک عدد توان دار کافی است توان ها را درهم ضرب کنیم.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$$

◀ مثال:

$$(۵^۷)^۴ = ۵^۷ \times ۵^۷ \times ۵^۷ \times ۵^۷ = ۵^{۴\times۷} = ۵^{۲۸}$$

تقسیم اعداد توان دار :

الف) تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی : در تقسیم عددهای توان دار، اگر پایه ها مسـاوی باشند، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم. (توان اولی منهای توان دومی).

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

◀ مثال:

$$۱۷^{۵۰} \div ۱۷^{۲۰} = ۱۷^{۵۰-۲۰} = ۱۷^{۳۰}$$

$$(-۹)^{۱۳} \div (-۹) = (-۹)^{۱۳-۱} = (-۹)^{۱۲}$$

ایستگاه ریاضی ۸

ب) تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی : در تقسیم عددهای توان دار، اگر توان ها مساوی باشند، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$$\boxed{a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m}$$

◀ مثال:

$$۱۸^۷ \div ۶^۷ = (\frac{۱۸}{۶})^۷ = ۳^۷$$

$$(-۲۰)^{۱۱} \div (-۵)^{۱۱} = (\frac{-۲۰}{-۵})^{۱۱} = ۴^{۱۱}$$

نکات

۱) اگر بخواهیم یک عدد توان دار را بدون پرانتز به توان برسانیم، باید توان را به توان برسانیم و اجازه ی ضرب توان ها را نداریم. $(a^b)^c \neq a^{b^c}$

◀ مثال:

$$(۷^۵)^۲ = ۷^{۵\times۲} = ۷^{۱۰} \quad , \quad ۷^{۵^۲} = ۷^{۲۵}$$

۲) در جمع اعداد توان دار، اگر عددها مساوی باشند، ابتدا جمع را به ضرب تبدیل می کنیم، به این صورت که تعداد عددها را در یکی از آن ها ضرب می کنیم.

◀ مثال:

$$۳^۸ + ۳^۸ + ۳^۸ = ۳ \times ۳^۸ = ۳^۹$$

۳) اگر پایه یا توان مساوی نداشتیم، با تجزیه به عامل های اول می توان پایه یا توان مساوی ایجاد کرد.

◀ مثال:

$$۲۷ \times ۹^۴ = ۳^۳ \times (۳^۲)^۴ = ۳^۳ \times ۳^۸ = ۳^{۱۱}$$

۴) در تقسیم با پایه های مساوی، اگر توان عدد اول از عدد دوم کوچک تر باشد، می توان حاصل را به صورت یک کسر نوشت.

◀ مثال:

$$۷^۹ \div ۷^{۱۷} = \frac{۷^۹}{۷^{۱۷}} = \frac{۱}{۷^۸} = (\frac{۱}{۷})^۸$$

۵) در تقسیم پایه ها، اگر برهم بخش پذیر نبودند، حاصل را به صورت کسر می نویسیم.

$$۳^{۱۰} \div ۴^{۱۰} = (\frac{۳}{۴})^{۱۰}$$

۶) برای ساده کردن کسرهای توان دار، ابتدا توان های مساوی یا پایه هـای مساوی را از هـم جـدا کرده، سپس حاصل هر کدام را به دست می آوریم.

$$\frac{۳^{۱۲}\times ۲^{۷}}{۲^{۱۱}\times ۳^{۸}}=\frac{۳^{۱۲}}{۳^{۸}}\times\frac{۲^{۷}}{۲^{۱۱}}=\frac{۳^{۴}}{۱}\times\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۳^{۴}}{۲^{۴}}=(\frac{۳}{۲})^{۴}$$

جذر تقریبی

جذر هر عدد مقداری مثبت است. ولی ریشه های یک عدد همواره دو مقدار قرینه ی هم هستند.

سئوال ۱) جذر عددهای زیر را بنویسید.

$\sqrt{۰/۴۹}=۰/۷$ ، $\sqrt{\frac{۱}{۲۵}}=\frac{۱}{۵}$ ، $\sqrt{۳۶}=۶$

سئوال ۲) ریشه های عدد ۳۶ را مشخص کنید. ۶ و ۶-

نکته :اعداد منفی جذر ندارند.

روش محاسبه جذر تقریبی یک عدد :

می خواهیم جذر تقریبی ۱۲ را حساب کنیم. مجذورهای کامل قبل و بعد از ۱۲ را تعیین می کنیم.

$$\underset{۳}{\sqrt{۹}} < \sqrt{۱۲} < \underset{۴}{\sqrt{۱۶}}$$

یعنی $\sqrt{۱۲}$ بین ۳ و ۴ قرار دارد. عـدد وسـط بـین ۳ و ۴ عـدد ۳/۵ اسـت.

مجذور ۳/۵ می شود ۱۲/۲۵ که از ۱۲ بیش تر است پس $\sqrt{۱۲}$ از ۳/۵ کوچک تر است. حال مجذور عددهای ۳/۴ و ۳/۳ و..... را بررسی می کنیم. عددی که مجذورش به ۱۲ نزدیـک تـر باشـد، جـواب است

عدد	۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴
مجذور	۹	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

$\Rightarrow \sqrt{۱۲}\cong ۳/۴$

اگر بخواهیم جذر ۱۲ را تا دو رقم اعشار حساب کنیم از عدد وسط ۳/۴ و ۳/۵ یعنـی مجـذور ۳/۴۵ شـروع کـرده و مراحـل را ماننـد قبـل تکـرار مـی کنـیم. جـذر ۱۲ از ۳/۴۵ بـزرگ تـر اسـت.
$(۳/۴۵)^{۲}=۱۱/۹۰$

عدد	۳/۴۶	۳/۴۷
مجذور	۱۱/۹۷	۱۲/۰۴

$\Rightarrow \sqrt{۱۲}\cong ۳/۴۶$

٭ نمایش اعداد رادیکالی روی محور :

الف) نقطه ی شروع را که عددی صحیح بوده و همراه عدد رادیکالی می آید، مشخص می کنیم.

ایستگاه ریاضی ۸

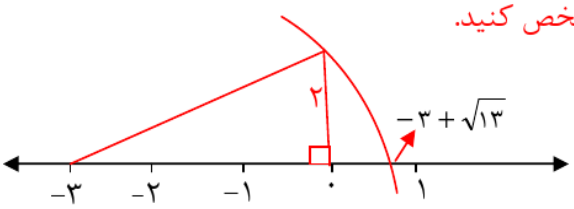
ب) جهت رسم مثلث قائم الزاویه را تعیین می کنیم. اگر علامت رادیکال مثبت بود، به سمت راست و اگر منفی بود به سمت چپ کمان می زنیم.

ج) دو عدد را پیدا کرده که مجموع مجذورهای آن ها با عدد زیر رادیکال برابر باشد.

د) دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر مثلث باز کرده و به مرکز نقطه شروع (عدد صحیح) قرار داده و کمان می زنیم.

هـ) محل برخورد کمان با محور، جای عدد خواسته شده است.

◀ **مثال** :جای عدد $-۳+\sqrt{۱۳}$ را روی محور مشخص کنید.



الف) نقطه شروع ۳-

ب) جهت رسم مثلث +

ج) ضلع های مثلث ۲ و ۳

$۲^۲+۳^۲=۹+۴=۱۳$

❋ **خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها** : جذر حاصل ضرب یا تقسیم دو عدد با حاصل ضرب یا تقسیم جذر هر یک از آن ها مساوی است.

$$\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}} \quad و \quad \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(b\neq ۰)}$$

◀ **مثال** :

$$\sqrt{۹۰۰}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۱۰۰}=۳\times۱۰=۳۰$$

$$\sqrt{\frac{۶۴}{۸۱}}=\frac{\sqrt{۶۴}}{\sqrt{۸۱}}=\frac{۸}{۹}$$

نکته : جداسازی در جمع و تفریق درست نیست یعنی :

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

◀ **مثال**:

$$\begin{cases}\sqrt{۴}+\sqrt{۹}=۲+۳=۵\\ \sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}\cong ۳/۶\end{cases}$$

❋ محاسبه ی جذر یک عدد با ماشین حساب :

الف) ماشین حساب معمولی : دکمه $\boxed{\sqrt{\ }}$ ← تایپ عدد

ب) ماشین حساب مهندسی : تایپ عدد ← **دکمه** $\boxed{\sqrt{\ }}$

فصل ۸
آمار و احتمال

❋**علم آمار :** علم جمع آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده ها) است.

❋**داده :** اطلاعات عددی به دست آمده را داده گویند.

❋**انواع نمودار :**

الف) نمودار ستونی : برای مقایسه تعداد و پیدا کردن بیشترین و کمترین داده.

ب) نمودار خط شکسته : برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

ج) نمودار تصویری : برای مقایسه ی داده های تقریبی بکار می رود.

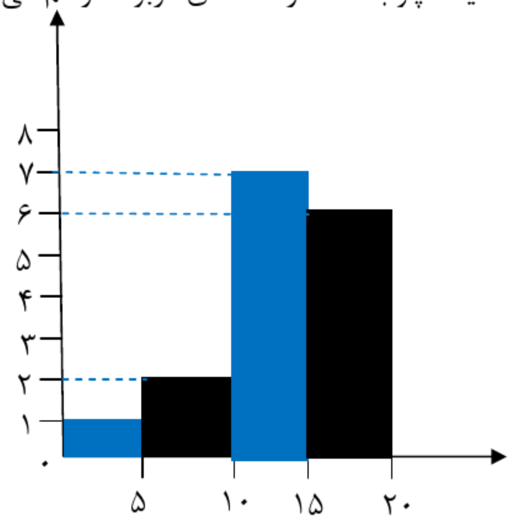
د) نمودار دایره ای : برای نشان دادن نسبت داده ها به کل و سهم هر بخش استفاده می شود.

❋**دسته بندی داده ها :**

◀**مثال :** نمره های درس ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره به شرح زیر می باشد. جدول داده های آماری آن را در چهار دسته تنظیم کنید.

۹و ۱۱و ۲۰و ۱۲/۵و ۱۸و ۱۳و ۱۴/۵و ۱۶و ۲۰و ۸و ۲و ۱۴و ۱۷و ۱۰/۵و ۱۹و ۱۲

ابتدا دامنه ی تغییرات را مشخص می کنیم. فاصله ی بین بیشترین و کمترین داده های هر مسئله آماری را دامنه ی تغییرات می گوییم. در این مثال دامنه ی تغییرات ۱۸=۲-۲۰ می باشد. به ازای هر عدد یک چوب خط در دسته ی مربوطه رسم می کنیم.



فراوانی	خط نشان	حدود دسته ها
۱	/	$۰ \leq x < ۵$
۲	//	$۵ \leq x < ۱۰$
۷	~~////~~ //	$۱۰ \leq x < ۱۵$
۶	~~////~~ /	$۱۵ \leq x \leq ۲۰$
۲۰	-	جمع

❋**میانگین داده ها :** میانگین داده های آماری از تقسیم مجموع آن ها بر تعدادشان به دست می آید.

به صورت جبری $\bar{x}=\frac{S}{n}$ یا میانگین = $\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$

ایستگاه ریاضی ۸

◀ **مثال** :میانگین اعداد ۱۷ و ۲۰ و ۱۲ و ۱۱ را به دست آورید.

$$\text{میانگین} = \frac{۱۱+۱۲+۲+۱۷}{۴} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵$$

* اگر تعداد داده های آماری زیاد باشد، از دستور زیر میانگین را محاسبه می کنیم :

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون (مرکز دسته} \times \text{فراوانی)}}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$$

◀ **مثال** : میانگین اعداد زیر را به دست آورید.

۹و ۱۱و ۲۰و ۱۸و ۱۲/۵و ۱۶و ۱۴/۵و ۱۳و ۲۰و ۸و ۲و ۱۹و ۱۲و ۱۰/۵و ۱۴و ۱۷

نکته :

$$\text{مرکز دسته} = \frac{\text{انتهای دسته} + \text{ابتدای دسته}}{۲}$$

حدود دسته	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز× فراوانی
$۰ \le x < ۵$	/	۱	۲/۵	۲/۵
$۵ \le x < ۱۰$	//	۲	۷/۵	۱۵
$۱۰ \le x < ۱۵$	~~////~~ //	۷	۱۲/۵	۸۷/۵
$۰/۵ \le x \le ۲۰$	~~////~~ /	۶	۱۷/۵	۱۰۵
جمع	-	۱۶	-	۲۱۰

$$\text{میانگین} = \frac{۲۱۰}{۱۶} \cong ۱۳/۱$$

◀ **مثال** : میانگین نمرات نادیا در سه درس ریاضی، علوم و عربی ۱۸ است. اگر نمرات ریاضی و علوم او ۱۷ و ۱۹ باشند، نمره ی عربی او چند است؟

مجموع سه درس : ۳×۱۸=۵۴

مجموع نمرات ریاضی و علوم : ۱۷+۱۹=۳۶

نمره ی عربی : ۵۴-۳۶=۱۸

***احتمال یا اندازه گیری شانس** : در ریاضی احتمال اتفاق افتادن هر پیشامد از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}}$$

◀ **مثال ۱** : یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که فرد بیاید چه قدر است؟

تعداد حالت های مطلوب =۳ ، (۵ و ۳ و ۱)

همه ی حالت ها =۶ ، (۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱)

ایستگاه ریاضی ۸

احتمال فرد آمدن = $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

◀ **مثال ۲ :** در یک کیسه ۴ مهره ی آبی، ۵ مهره ی قرمز و ۶ مهره ی سفید وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج کرده ایم. احتمال این که قرمز بیاید چه قدر است؟

(۵ مهره قرمز) **۵= تعداد حالت مطلوب**

(۶+۵+۴ =۱۵) **۱۵= همه ی حالت ها**

$\Rightarrow$ **احتمال قرمز** = $\frac{۵}{۱۵}$ = $\frac{۱}{۳}$

نکته ۱) : اگر پیشامدی به هیچ وجه رخ ندهد، احتمال آن صفر است. مثال : احتمال رخ دادن عددی دو رقمی در پرتاب تاس مساوی صفر است.

نکته ۲) : اگر پیشامدی به طور قطع رخ دهد، احتمال آن مساوی صفر است.

◀ **مثال :** احتمال این که از داخل کیسه ای حاوی ۷ مهره ی قرمز، مهره ای قرمز خارج شود مساوی یک است.

نکته ۳) : در ریاضی احتمال رخ دادن هر پیشامد، یک، صفر، یا عددی بین صفر و یک است.

نکته ۴) : مجموع احتمال های ممکن در یک مسئله مساوی یک است.

نکته ۵) : به کمک مجموع احتمال ها، می توان احتمال رخ ندادن پیشامدها را محاسبه کرد :

احتمال رخ دادن -۱ = احتمال رخ ندادن

◀ **مثال :** احتمال برخورد یک دارت به یک هدف $\frac{۳}{۱۰}$ می باشد. احتمال برخورد نکردن دارت به هدف چه قدر است؟

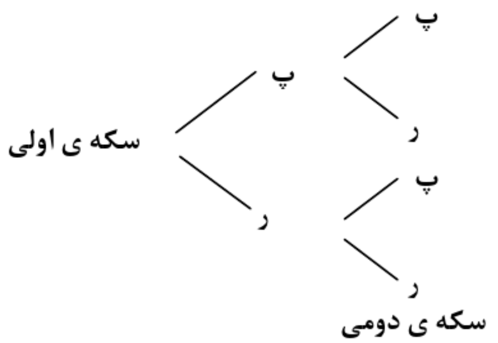
احتمال برخورد نکردن $\frac{۷}{۱۰}=۱-\frac{۳}{۱۰}$

حالت های ممکن در یک پیشامد : برای به دست آوردن کل حالت های ممکن می توان از جدول نظام دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

◀ **مثال :** دو سکه را باهم پرتاب کرده ایم. تمام حالت های ممکن را بنویسید.

سکه ی اولی	**(رو)**	**(پشت)**	**(رو)**	**(پشت)**
سکه ی دومی	**(رو)**	**(رو)**	**(پشت)**	**(پشت)**

نمودار درختی



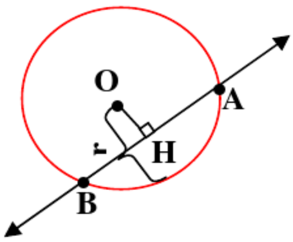
ایستگاه ریاضی ۸

فصل ۹
دایره ها

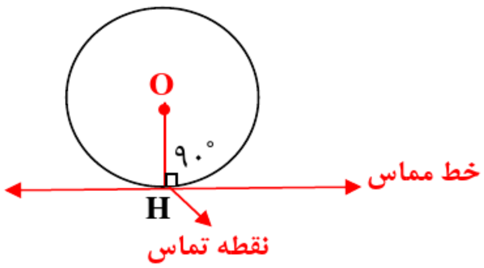
❋ خط و دایره

یک خط و یک دایره دارای سه حالت زیر می باشند :

۱. خط، دایره را در دو نقطه قطع کند. (شعاع $\overline{OH} < r$)

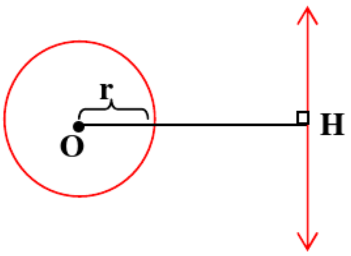


۲. خط دایره را در یک نقطه قطع کند. ($\overline{OH} = r$)



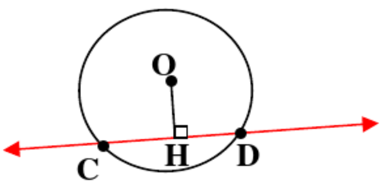
نکته : شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۳. خط دایره را قطع نکند. ($\overline{OH} > r$)



◀ **مثال «۱» :** فاصله ی خطی تا مرکز دایره $\frac{۲}{۳}$ شعاع دایره است. وضع خط و دایره را با رسم شکل توضیح دهید.

پاسخ : چون فاصله خط تا مرکز دایره از شعاع کوچک تر است پس خط دایره را در دو نقطه قطع می کند یعنی : $\overline{OH} < r$



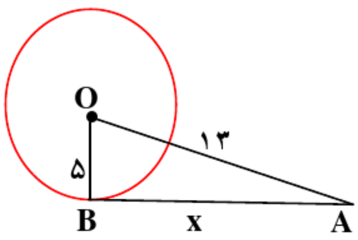
◀ **مثال «۲» :** در شکل زیر $\overline{AB}$ بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

پاسخ : مثلث AOB قائم الزاویه است $OB \perp AB \Rightarrow$

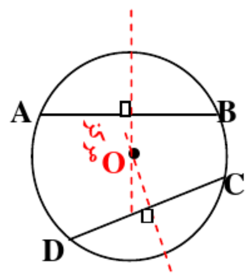
$$۱۳^۲ = x^۲ + ۵^۲$$

$$۱۶۹ = x^۲ + ۲۵$$

$$x^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow x = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

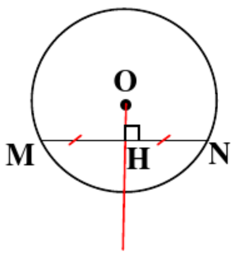


※ **پیدا کردن مرکز دایره :** در هر دایره عمود منصف هر وتر، قطر دایره می باشد بنابراین با رسم دو وتر دلخواه (غیرموازی) و رسم عمود منصف های آن ها، محل برخورد عمود منصف ها (قطرها) مرکز دایره را مشخص می کند.



نکته : خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و برعکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره می گذرد، بر وتر عمود است.

◀ **مثال :** در شکل مقابل O مرکز دایره و $\overline{MH} = \overline{HN}, \hat{H} = ۹۰^\circ$



※ **زاویه مرکزی :** هر زاویه که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره باشند، زاویه مرکزی نامیده می شود.

※ اندازه ی هر زاویه مرکزی با اندازه ی کمان مقابل آن مساوی است.

$$\hat{O} = \overset{\frown}{AB} = ۷۰^\circ$$