

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# دومین رے تمرین ها

پایه یازدهم



12<sup>th</sup> IOAA team

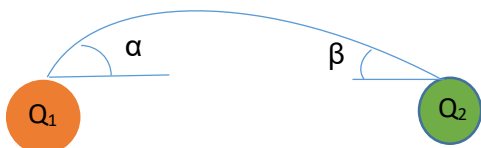
I.R.IRAN

دوازدهمین تیم ایران در المپیاد جهانی

نجوم و اختر فیزیک

### سوال 1:

دو بار  $q_1$  و  $q_2$  به فاصله  $d$  از یک دیگر داریم. اگر یک خط میدان الکتریکی با زاویه  $\alpha$  از جسم اول خارج شود، با چه زاویه ای ( $\beta$ ) به جسم دوم وارد می شود؟



### سوال 2:

ساعت ۲ بامداد ۱۵ فروردین در شهر تهران، تعداد بسیار زیادی از ستارگان در ارتفاع بین ۷۰ تا ۸۰ درجه هستند. کدام یک از این ستارگان در طول سالیان بسیار طولانی دارای بیشترین میل ممکن خواهد شد؟ بعد و میل کنونی این ستاره را به دست آورید. همچنین بعد و میل ستاره در آن زمان را هم بیابید.

### سوال 3:

ناظری در شهر ۱ با عرض جغرافیایی ۴۵ درجه میخواهد با سرعت ۲۰۰ کیلومتر بر ساعت به سمت شهر ۲ که در فاصله ۱۲۰۰ کیلومتری او است حرکت کند. این ناظر قبل از حرکت ستاره S را در سمت ۹۰ درجه شرقی مشاهده میکند. وقتی ناظر به شهر ۲ میرسد ستاره S را در سرسو میبیند. عرض جغرافیای شهر ۲ را بیابید.

### سوال 4:

یک ماهواره با حجم ۱۰۰۰۰ مترمکعب در یک مدار سهموی با فاصله حضیض ۰,۵ واحد نجومی در حال چرخش به دور خورشید است. یک ماهواره کوچک دیگر در حال چرخش در مدار بیضی با نیم قطر اطول ۱ واحد نجومی و خروج از مرکز ۰,۱۱ است. اگر مدارها هم صفحه باشند احتمال اینکه این دو ماهواره به هم برخورد کنند چقدر است؟

### سوال 5:

فرض کنید همه شهابسنگ ها با چگالی عددی  $n(r) = n_0(1 - \frac{r}{R})$  در منظومه شمسی پخش شده اند که در آن  $R=50$  AU ،  $n_0$  چگالی عددی آنها در  $r=0$  و برابر  $100 m^{-3}$  و فاصله از خورشید است. تخمین بزنید احتمال اینکه یک شهاب سنگ به یک انسان برخورد کند چقدر است؟

---

### سوال 6:

در جهانی هستیم که  $q$  تابع  $H$  است. به این صورت که  $q = \left(\frac{H}{H_0}\right)^2$  که  $q$  پارامتر کندشوندگی و  $H$  پارامتر هابل است.

الف) پارامتر هابل را بر حسب  $t$  بدست آورید.

نکته: هیچ اطلاعاتی درباره  $y$  مولفه های کیهان نداریم.

ب) فرض کنید این کیهان تک مولفه ای است. ضریب  $\omega$  این مولفه چند است؟

ج)  $\Omega_0$  چقدر است؟ (از بدست آوردن  $\Omega_0$  های عجیب نهراسید!)

---

### سوال 7:

فرض کنید کیهانی داریم که در آن به جای نیروی گرانش نیروی دافعه ای به صورت  $\vec{F} = \frac{+GMm \hat{r}}{r^2}$  است. در این کیهان شعاع یک پوسته دلخواه هرزمان دلخواه را به صورت  $r = a\chi$  نشان میدهم که در آن  $a$  فاکتور مقیاس و  $\chi$  شعاع پوسته در زمان حال است.

انرژی این پوسته برابر  $\alpha m \chi^2$  است، که  $m$  جرم آن و  $\alpha$  یک ثابت است. برای این کیهان نیز قانون هابل برقرار است.

الف) پتانسیل مربوط به این نیرو را بدست آورید.

ب) با نوشتن پایستگی انرژی، رابطه ای بین سرعت پوسته ، فاکتور مقیاس ،  $\chi$  ،  $\alpha$  و چگالی داخل پوسته به دست آورید. این رابطه را بر حسب ثابت هابل بازنویسی کنید.

ج) پارامتر چگالی را به صورت  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$  تعریف میکنیم که در آن چگالی مربوط به حالت  $\alpha = 0$  است. رابطه ی قسمت قبل را بر حسب پارامتر چگالی، ثابت هابل و  $\alpha$  بازنویسی کنید.

د) فرض کنید معادله حالت اجزای تشکیل دهنده ی این عالم به صورت  $p_i = \omega_i \rho_i c^2$  باشد. رابطه ی زیر را برای ثابت هابل اثبات کنید.

$$H = \frac{H_0}{a} \sqrt{1 - \sum \Omega_{0,i} + \sum (\Omega_{0,i} a^{-(1+3\omega_i)})}$$

ه)  $\alpha$  را به صورت ضربی از توان های ثابت بنیادی مینویسیم  $\alpha = \Phi G^\sigma h^\delta c^\psi$  با استفاده از تحلیل ابعادی، توان های  $\delta$ ،  $\sigma$  و  $\Psi$  را بدست آورید.

و) با توجه به علامت پارامتر چگالی مقادیر قابل قبول برای  $\Phi$  در چه بازه ای است؟

ز) برای کیهانی با  $\Phi = 0.5$  و متشکل از ماده ای با  $\omega = -2/3$ ،  $a(t)$  و  $\rho(t)$  را بدست آورید و نمودار آن ها را به صورت کیفی رسم کنید.

ح) آیا این کیهان با یک انفجار به وجود آمده است؟ در  $t \rightarrow \infty$  چه اتفاقی برای این کیهان می افتد؟

## سوال 8:

باز هم اندر باب فشار مرکز!

الف) چگالی ستاره را از مرکز تا شعاع  $r$  ثابت و برابر  $\rho(r)$  در نظر بگیرید و سپس ثابت کنید:

$$P_C = P(r) + \frac{3Gm_r^2}{8\pi r^4}$$

ب) حال ثابت کنید  $P_C$  با  $r$  کاهش می یابد و علت فیزیکی این اتفاق را شرح دهید.

$$P_C > \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} G \bar{\rho}^{\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}}$$

ج) با توجه به قسمت قبل ثابت کنید:

د) استدلال کنید که بدون داشتن اطلاعاتی درباره ی تابعیت  $\rho(r)$  این بهترین حد برای  $P_C$  است.

## سوال 9:

بررسی رابطه لین - امدن از منظری دیگر :

می دانیم معادله لین امدن به صورت زیر است :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

حال فرض کنید بتوانیم  $\theta$  را به صورت بسطی از  $\xi$  بنویسیم یعنی :

$$\theta = 1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

الف) با استفاده از فرض بالا رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{2a_1}{\xi} + 6a_2 + 12a_3 \xi + \dots$$

ب) حال فرض کنید طرف راست رابطه لین امدن را به صورت بسط تیلور حول  $\xi = 0$  نوشت یعنی:

$$\theta^n = f(\xi) = f(0) + \xi f(0)' + \xi^2 \frac{f(0)''}{2} + \dots$$

سپس با استفاده از رابطه بالا ، رابطه زیر را اثبات کنید :

$$-\theta^n = -1 - a_1 n \xi - \frac{n(n-1)a_1 + 2na_2}{2} \xi^2 + \dots$$

پ) حال با استفاده از دو قسمت بالا رابطه زیر را اثبات کنید :

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n}{120} \xi^4 - \frac{n(8n-5)}{15120} \xi^6 + \dots$$

ت) حال با روشی تقریباً مشابه سعی کنید جواب معادله لین-امدن به ازای  $n = 5$  را پیدا کنید.